Existencia de vortex-sheets en las ecuaciones de Euler 2D

Antonio Hidalgo Torné

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

MÁSTERES DE LA UAM 2018 - 2019

Facultad de Ciencias

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Máster:

Matemáticas y Aplicaciones

Existencia de vortex-sheets en las ecuaciones de Euler 2D.

Antonio Hidalgo Torné

Trabajo Fin de Máster. Curso 2018-2019.

Director: Francisco Gancedo García (US)
Tutor: Alberto Ruiz González (UAM)
Lugar: Facultad de Ciencias - UAM
Departamento: Matemáticas
Convocatoria: Septiembre

Universidad Autónoma de Madrid

Índice general

Abstract **5**

Introducción **7**

1. Definiciones y resultados previos. **9**
1.1. Propiedades y ejemplos de soluciones 14
1.1.1. Vortex Sheet como dato inicial 17

2. Vorticidad inicial positiva **19**
2.1. Términos no lineales 19
2.2. Teorema de Delort 27

3. Vorticidad con simetría axial impar **39**

4. Prueba alternativa. Simetría radial. **49**
4.1. Acotación de términos no lineales 50
4.2. Convergencia en distribución 58
4.3. Aplicación a las ecuaciones de Euler 61

Bibliografía **71**

Abstract

Fluid mechanics is a branch of classical Physics, having many applications and relevance in science and engineering. Despite its age, no general solutions to its fundamental equations are known, so it is a current important field of research. Quoting the Nobel Prize in Physics Richard Feynman, "Turbulence is the most important unsolved problem of classical Physics". Mathematically, fluid mechanics equations play an important role in the theory of Partial Differential Equations because of their complexity. They are of such importance that one of the seven Millenium Prize Problems deals with the Navier-Stokes equations, one of the most famous equations of fluids.

In this work we will study two-dimensional Euler equations, which are among the first partial derivative equations in history, dating from the year 1757. The result of local existence for smooth initial data was first proven in [20], and global existence in [32]. Global existence results have been extended up till vorticity data in L^1 [23]. When the vorticity is bounded, the solutions are unique [34]. There is no uniqueness, even for null initial data, if we allow the vorticity to be very irregular [25] [7] [29].

Our goal is to study the existence of solutions in a case weaker than L^1, which is when the vorticity belongs to $RM \cap H^{-1}$. Only partial results are known in this case. This regularity allows the vorticity support to concentrate in a curve, so it is called *vortex sheet*. This case has important applications, as it models real phenomena. The proofs we are going to give are based on smoothing the initial data using mollifiers, and taking limits. We will start from the results of [9], which shows properties of mollified solutions. Other methods that reach similar results do consider the Navier-Stokes equations and vanish the viscosity at the limit [5] [23], or use another smoothing techniques inspired by numerical methods, which are called *vortex methods* [21].

In the first chapter we will explain the motivations for the problem and recall the main results needed for the following chapters. We will begin by introducing Euler's equations and some important properties of its solutions. These results are classic and can be seen with more detail in [23]. Later we will give the definition of weak solution that will be used throughout the work. We will exhibit the theorem for mollified solutions [9] that will establish the basis for other chapters' results. Finally, we will show some examples and properties of solutions to Euler's equations, ending with several results when the initial vorticity is a vortex sheet.

In the second chapter we will discuss this work's main theorem, which states the existence of a solution when the initial vorticity has a non-negative vortex sheet component with compact support, and another one in L^p without sign restriction. The first

work showing the existence of solutions for vortex sheet data is due to Delort [8], and the flexibility of his reasoning allows the addition of the second component. His proof has been simplified and generalized, but the existence of solutions without the sign restriction is still an open question. The main issue is the convergence of non-linear terms. In the first part of this chapter we will analyze these terms, rewriting them using Biot-Savart law. The particular form of non-linearities allows us to obtain some properties that are generally false for quadratic terms of velocity. These properties, together with the theorem for mollified solutions from the first chapter, reduce the proof of existence into showing that the vorticity does not accumulate in small measured sets. Up to this point the sign hypothesis is not necessary, but is required in this step. Finally, we show that the results match the solution definition from the first chapter.

In the third chapter we exhibit an extension of chapter two's result based on the article [22]. Instead of the sign restriction, now the vorticity must have a distinguished sign in each half-plane, and odd symmetry with respect to the symmetry axis. The L^p component must also respect this symmetry. We will begin by proving that if the initial vorticity has the previous symmetry, it keeps it as it evolves in time. By analogy with the previous chapter, we have to prove that the vorticity does not accumulate in sets of small measure. A key observation is that the evolution keeps the sign of the vortex sheet in each half-plane. Like in the previous chapter, having a locally defined sign is enough to prove that there is no accumulation, so we only need new bounds near the symmetry axis. In the first part of this chapter we will obtain new estimates using symmetry, and in the second part we will prove existence using these results.

The fourth chapter uses a different approach based on harmonic analysis using Hardy spaces, as in [10] [27]. The main idea is that non-linear terms belong to a more regular space than L^1_{loc}, and this is enough to prove convergence in the sense of distribution. At the beginning of this chapter, we will introduce the spaces which we will work with. To show the convergence of non-linear terms, we will divide the proof into three parts. Firstly, we will see that non-linear terms are bounded in the space h^1. This is the only result that requires the sign hypothesis. Then, we will prove that being bounded in h^1 and having pointwise convergence implies convergence in the distribution sense. Finally, we will show that we can apply these results to non-linear terms, obtaining existence. Although the main result is analogous to the theorem of chapter two, this approach allows the extension of the result to the case where the vorticity has radial symmetry. To conclude the work, we will note that the sign hypothesis is necessary for the techniques used in this chapter.

Introducción

La mecánica de fluidos es una rama de la Física clásica, teniendo numerosas aplicaciones y relevancia en ciencia e ingeniería. A pesar de su antigüedad no se conocen soluciones generales a sus ecuaciones principales, por lo que es un importante campo de investigación. En palabras del premio Nobel de Física Richard Feynman, "La turbulencia es el problema sin resolver más importante de la Física clásica". Matemáticamente, las ecuaciones de mecánica de fluidos juegan un papel importante dentro de las Ecuaciones en Derivadas Parciales por su complejidad. Tanto es así que uno de los siete problemas del milenio versa sobre las ecuaciones de Navier-Stokes, que son de las ecuaciones más famosas en fluidos.

En este trabajo vamos a estudiar las ecuaciones de Euler bidimensionales, que están entre las primeras ecuaciones en derivadas parciales de la historia, datando del año 1757. El resultado de existencia local para datos iniciales regulares fue probado por primera vez en [20], y la existencia global en [32]. Los resultados de existencia global se han extendido hasta datos de vorticidad en L^1 [23]. La unicidad se tiene cuando la vorticidad está acotada [34], y se tiene no unicidad incluso para dato inicial nulo si permitimos que la vorticidad sea muy irregular [25] [7] [29].

Nuestro objetivo es estudiar la existencia de soluciones en un caso más débil que L^1, que es cuando la vorticidad pertenece a $RM \cap H^{-1}$, del cual solo se tienen resultados parciales. Esta regularidad permite que el soporte de la vorticidad se concentre en una curva, por lo que se denomina *vortex sheet*. Este caso es importante en la práctica porque modeliza fenómenos reales. Las demostraciones que vamos a presentar se basan en regularizar el dato inicial usando aproximaciones de la identidad, y tomar límite. Partiremos de los resultados de [9], que ilustra propiedades de las soluciones regularizadas. Otros métodos que llegan a resultados análogos son considerar las ecuaciones de Navier-Stokes y anular la viscosidad [5] [23]; o utilizar otro tipo de regularizaciones inspiradas en métodos numéricos, que se denominan *vortex methods* [21].

En el capítulo uno motivaremos el problema y recordaremos los principales resultados necesarios para los siguientes capítulos. Comenzaremos por introducir las ecuaciones de Euler y algunas propiedades importantes de sus soluciones. Estos resultados son clásicos y pueden verse con mayor detalle en [23]. Posteriormente daremos la definición de solución débil que usaremos a lo largo del trabajo. Presentaremos el teorema para soluciones regularizadas de [9] que servirá de base para los resultados de otros capítulos. Por último veremos algunos ejemplos y propiedades de soluciones a las ecuaciones de Euler, terminando por mencionar algunos resultados cuando el dato

inicial es un vortex sheet.

En el segundo capítulo trataremos el teorema principal del trabajo, que será probar la existencia de solución cuando la vorticidad inicial tiene una componente vortex sheet no negativa con soporte compacto, y otra componente en L^p sin restricción de signo. Delort [8] fue el primero en demostrar la existencia para dato vortex sheet, y la flexibilidad de la prueba permite añadir la segunda componente. Su prueba ha sido posteriormente simplificada y generalizada ligeramente, pero sigue siendo una pregunta abierta la existencia de solución sin la restricción de signo. La dificultad reside en la convergencia del los términos no lineales. En la primera parte del capítulo haremos un análisis de estos términos, reescribiéndolos en función de la vorticidad. La forma particular de las no linealidades permite obtener algunas propiedades que en general son falsas para términos cuadráticos de la velocidad. Este estudio, junto al teorema para soluciones regularizadas del primer capítulo, reduce la demostración de existencia a probar que la vorticidad no se acumula en conjuntos de medida pequeña. Hasta este punto no es necesaria la hipótesis de signo, pero se requiere en este paso. Para finalizar, mostramos que los resultados casan con la definición de solución del primer capítulo.

En el tercer capítulo presentamos una extensión al teorema del capítulo dos basándonos en el artículo [22]. En lugar de la restricción de signo, ahora la vorticidad ha de tener signo definido en cada semiplano, y tener simetría impar respecto al eje de separación. La perturbación en L^p también debe respetar la simetría. Comenzaremos por probar que si la vorticidad inicial tiene la simetría anterior, la mantiene en el tiempo. Por analogía al capítulo anterior, solo tenemos que probar que la vorticidad no se acumula en conjuntos de medida pequeña. Demostraremos que la evolución mantiene los signos del vortex sheet en cada semiplano. Al igual que en el capítulo anterior, tener signo definido localmente es suficiente para probar que no hay acumulación, por lo que solo necesitamos nuevas cotas cerca del eje. En la primera parte del capítulo probaremos nuevas cotas utilizando la simetría, y en la segunda parte probaremos el resultado de existencia usando estas estimaciones.

El cuarto capítulo presenta un enfoque distinto utilizando análisis armónico usando espacios de Hardy, al igual que en [10] [27]. La idea principal es que los términos no lineales pertecenen a un espacio más regular que L^1_{loc}, y esto es suficiente para probar la convergencia en distribución. Comenzaremos introduciendo los espacios con los que vamos a trabajar. Para mostrar que los términos no lineales convergen en distribución, dividiremos la prueba en tres partes. En primer lugar veremos que los términos no lineales están acotados en el espacio h^1. Este será el único resultado que usa la hipótesis de signo. En segundo lugar, veremos que estar acotado en h^1 y tener convergencia puntual implican convergencia en distribución. Por último, veremos que podemos aplicar estos resultados a los términos no lineales, concluyendo la prueba de existencia global. Aunque el resultado principal sea análogo al del capítulo dos, este enfoque permite extender el resultado al caso en que la vorticidad tiene simetría radial. Para concluir el trabajo, veremos con un ejemplo que la restricción de signo es necesaria para las técnicas utilizadas en este capítulo.

Capítulo 1

Definiciones y resultados previos.

Los fluidos siempre están presentes en nuestro entorno, y es habitual que fluidos de distinta naturaleza se encuentren, siendo una pregunta interesante cómo evolucionan entre sí. Podemos pensar en agua y aire, en un spray que rociamos, en nubes... Dependiendo de las condiciones hay distintos modelos y simplificaciones.

Una primera idealización es considerar que cualquier parte del fluido evoluciona conservando su volumen. Esta propiedad se denomina incompresibilidad. De manera general, los gases no se consideran incompresibles, mientras que sólidos y líquidos sí. Esto se refleja en el funcionamiento de las prensas hidráulicas. Otra idealización es considerar que el fluido no tiene fricción interna o viscosidad. Esta suposición es razonable al trabajar con agua o aire, pero hay fluidos muy viscosos como la miel o el aceite. Denominamos fluidos ideales a los no viscosos e incompresibles.

Las ecuaciones de Euler rigen la dinámica de los fluidos ideales, y en el plano componen el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $u = (u_1, u_2)$ representa la velocidad del fluido,

$$(u \cdot \nabla) = \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

y p la presión. Hemos denotado por $x = (x_1, x_2)$ las coordenadas espaciales, y t la temporal. La incompresibilidad queda representada en

$$\nabla \cdot u := \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

A partir de ahora denotaremos las derivadas parciales como $\partial_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, y análogamente para t.

Dado un vector $a = (a_1, a_2)$, denotaremos $a^\perp = (-a_2, a_1)$ su vector ortogonal, y análogamente $\nabla^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$. De la condición $\nabla \cdot u = 0$ se tiene que existe una función escalar (potencial vector) ψ tal que $u = \nabla^\perp \psi$. Llamaremos a ψ la función corriente. Otra magnitud importante es la vorticidad del fluido ω, definida como el rotacional de la velocidad, es decir $\omega = \nabla^\perp \cdot u = \Delta\psi$.

Sabiendo que en dos dimensiones la ecuación $\omega = \Delta\psi$ se soluciona mediante convolución con el núcleo $\frac{1}{2\pi} \ln|x|$, podemos recuperar la velocidad a partir de la vorticidad mediante la ley de Biot y Savart

$$u(t,x) = \nabla^\perp \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln|x-y|}{2\pi} \omega(y,t)dy = \int_{\mathbb{R}^2} K_2(x-y)\omega(y,t)dy, \tag{1.2}$$

donde

$$K_2(x) = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

De (1.2), se deduce que para ω con integral no nula y soporte compacto, si $|x| >> 1$

$$u(t,x) \approx K_2(x) \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t,y)dy = C(t)\frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

De esta fórmula se deduce que $|u|^2 \approx |x|^{-2}$ cuando $x \to \infty$, y como $|x|^{-2}$ no es integrable lejos del origen en dos dimensiones, tenemos que en general $u \notin L^2(\mathbb{R}^2)$ si ω no tiene integral nula. En cambio, si $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$, veamos que $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$. En concreto, desarrollando en serie el denominador y utilizando el soporte compacto de ω vemos que

$$\begin{aligned} 2\pi u(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x|^2} \frac{(x-y)^\perp}{1 + |y|^2/|x|^2 - 2x/|x| \cdot y/|x|} \omega(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x|^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \omega(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^\perp}{|x|^2}\omega(y)dy + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\omega(y)dy. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La integral del término $x^\perp$ es nula por la condición $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$, y el resto se va a infinito como $|x|^{-2}$, por lo que $u \approx |x|^{-4}$ cuando $|x| \to \infty$, que sí es integrable. Cuando la integral de ω no es nula (pero finita) es útil usar la siguiente descomposición.

Definición 1.1 (Descomposición Radial-Energía)**.** *Un campo vectorial incompresible regular $v(x) \in \mathbb{R}^2$ tiene una descomposición Radial-Energía si existe una vorticidad regular radial $\overline{\omega}(|x|)$ tal que*

$$v(x) = u(x) + \overline{v}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx < \infty, \quad \nabla \cdot u = 0,$$

$$\overline{v}(x) = \frac{x^\perp}{|x|^2} \int_0^{|x|} s\overline{\omega}(s)ds.$$

Lema 1.1. *Cualquier campo vectorial regular incompresible con vorticidad de soporte compacto $\omega = \nabla^\perp \cdot v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tiene una descomposición energía radial.*

Demostración: Basta considerar cualquier función radial de soporte compacto $\overline{\omega}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\omega}. \tag{1.4}$$

Definiendo $\overline{v}$ acorde con la definición 1.1, tendremos directamente que es incompresible. En consecuencia u es incompresible, y por construcción $\omega_u = \omega - \overline{\omega}$ es de soporte compacto e integral nula, por lo que $|u|^2$ es integrable. □

Nota 1.1. *Esta descomposición no es única, depende de la elección de $\overline{\omega}$. Lo interesante es que permite separar la componente de energía finita de la infinita, y ésta solo depende de la integral de ω. Además, las ecuaciones de Euler preservan la integral y el soporte compacto de la vorticidad (en tiempo finito), por lo que podemos tomar la parte radial constante en el tiempo.*

Gracias a (1.2) podemos obtener una ecuación de evolución para ω. Tomando vorticidad en la ecuación (1.1), obtenemos que

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \cdot \nabla u + u \cdot \nabla \omega = 0,$$

que para fluidos bidimensionales se reduce a

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = 0, \tag{1.5}$$

ya que $\omega = (0, 0, \omega), u = (u_1, u_2, 0)$. Esta ecuación, junto a la ley de Biot y Savart (1.2), forma una ecuación integrodiferencial para ω. Obtener ω a partir de u es directo, pero también podemos recuperar u conociento ω como $u = \nabla^\perp \Delta^{-1} \omega$. Por último, podemos recuperar la presión tomando divergencia en (1.1) como $p = -\Delta^{-1} \nabla \cdot ((u \cdot \nabla) u)$. Esto muestra la equivalencia entre obtener la vorticidad o la velocidad.

También podemos ver (1.5) como $\frac{D\omega}{Dt} = 0$, donde $\frac{D}{Dt}$ representa la derivada material, por lo que ω se mueve con la velocidad del fluido. Estas ideas se formalizan con la definición de trayectoria.

Definición 1.2. *Dado un campo vectorial regular v, definimos las trayectorias $X(t, \alpha)$ de v como la posición a tiempo t de la partícula que inicialmente está en α. Las trayectorias satisfacen la ecuación*

$$\frac{dX}{dt}(t, \alpha) = v(X(t, \alpha), t), \quad X(0, \alpha) = \alpha.$$

Proposición 1.2. *Si v es un campo vectorial regular incompresible, entonces el jacobiano de la transformación dada por las trayectorias satisface*

$$\det(\nabla_\alpha X(t, \alpha)) = 1.$$

Demostración: Definimos $J(t) = \det(\nabla_\alpha X(t,\alpha))$. Vamos a ver que $J(0) = 1$, y que $J'(t) = 0$. Como $X(0,\alpha) = \alpha$, trivialmente

$$\nabla_\alpha X(0,\alpha) = Id \Rightarrow J(0) = 1.$$

Vamos a denotar $X = (X_1, X_2)$. Para calcular J', desarrollamos el determinante e intercambiamos el orden de derivación, obteniendo

$$J'(t) = \partial_{\alpha_1} v_1 \partial_{\alpha_2} X_2 + \partial_{\alpha_1} X_1 \partial_{\alpha_2} v_2 - \partial_{\alpha_2} v_1 \partial_{\alpha_1} X_2 - \partial_{\alpha_2} X_1 \partial_{\alpha_1} v_2. \tag{1.6}$$

Por la regla de la cadena, tenemos la identidad

$$\partial_{a_j} v_i(X(t,\alpha),t) = \partial_{X_1} v_i \partial_{\alpha_j} X_1 + \partial_{X_2} v_i \partial_{\alpha_j} X_2,$$

que sustituida en (1.6) nos lleva a

$$J'(t) = \partial_{\alpha_1} X_1 \partial_{\alpha_2} X_2 (\partial_{X_1} v_1 + \partial_{X_2} v_2) - \partial_{\alpha_1} X_2 \partial_{\alpha_2} X_1 (\partial_{X_1} v_1 + \partial_{X_2} v_2) = 0,$$

ya que v es incompresible. □

Proposición 1.3. *Sea u un campo vectorial suave solución de las ecuaciones de Euler, y X sus trayectorias asociadas. Entonces*

$$\omega(X(t,\alpha),t) = \omega_0(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

La proposición anterior es una forma de reescribir la ecuación de la vorticidad que pone de manifiesto propiedades de conservación. La prueba es una mera comprobación utilizando la regla de la cadena.

Antes de definir el concepto de solución débil, es importante notar que al integrar por partes el término $(u \cdot \nabla)u \cdot \varphi$, debido a que $\nabla \cdot u = 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^2} (u \cdot \nabla)u \cdot \varphi &= \int_{\mathbb{R}^2} u_1 u_1 \partial_{x_1}\varphi_1 + u_1 u_2 \partial_{x_1}\varphi_2 + u_1 u_2 \partial_{x_2}\varphi_1 + u_2 u_2 \partial_{x_2}\varphi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\varphi : u \otimes u, \end{aligned}$$

donde hemos denotado $u \otimes u$ como la matriz de entradas $u_i u_j$, y el producto $A : B = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Si integramos también por partes la derivada temporal, queda motivada la siguiente definición

Definición 1.3. *Dado $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, diremos que el campo de velocidades $u(t,x) \in L^\infty([0,T], L^2_{loc}(\mathbb{R}^2))$ es solución débil de las ecuaciones de Euler* (1.1) *si para cualquier $\varphi \in C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ con $\nabla\cdot\varphi = 0$, y cualquier $\phi \in C([0,T], C_c^\infty(\mathbb{R}^2))$ se tiene que*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t\varphi \cdot u + \nabla\varphi : u \otimes u)dxdt = 0 \\ \displaystyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\phi \cdot u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.7}$$

donde la última igualdad es en el sentido de algún espacio de Sobolev H^{-L}.

Nota 1.2. *Para comprobar que un campo vectorial u es solución es suficiente operarlo con funciones test de la forma $\psi(t)\varphi(x)$, para $\psi \in C_c^\infty([0,T]), \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, ya que estas funciones son densas en $C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$.*

Nota 1.3. *La definición anterior corresponde a la idea de multiplicar por una función test, e integrar por partes. El término de la presión no aparece porque la función test tiene divergencia nula. Cuando $\int f\cdot\varphi = 0 \quad \forall\varphi$ con $\nabla\cdot\varphi = 0$, se tiene que $f = \nabla p$ para una distribución p, por lo que podemos recuperar la presión de una solución débil [30] [24].*

Nota 1.4. *Utilizando la divergencia nula de la función test φ, podemos reescribir*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \nabla\varphi : u\otimes u &= \int_{\mathbb{R}^2} u_1u_1\partial_{x_1}\varphi_1 + u_1u_2\partial_{x_1}\varphi_2 + u_1u_2\partial_{x_2}\varphi_1 + u_2u_2\partial_{x_2}\varphi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}\varphi_1(u_1^2-u_2^2) + (\partial_{x_1}\varphi_2+\partial_{x_2}\varphi_1)u_1u_2,\end{aligned}$$

donde vemos explícitamente los términos no lineales de la ecuación.

Para demostrar la existencia de solución, es habitual resolver el sistema (1.7) con el dato inicial suavizado, y tratar de pasar al límite. Pasamos ahora al resultado de existencia global para dato inicial suave. Dado $\varepsilon > 0$, denotaremos por $\rho^\varepsilon \geq 0$ una aproximación de la identidad con $supp(\rho^\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$.

Teorema 1.4 (Existencia de soluciones suaves)**.** *Sea $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ con $\omega_0 = \nabla^\perp\cdot u_0$ de soporte compacto tal que $\int_{\mathbb{R}^2}|\omega_0(x)|dx < \infty$. Entonces, para todo $T > 0$, $\varepsilon \in (0,1]$, existe una solución $u^\varepsilon(t,x) \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ de (1.7) con $u^\varepsilon(0,x) = u_0 * \rho^\varepsilon$, y admitiendo una descomposición Energía-Radial $u^\varepsilon(t,x) = \overline{u}(x) + \widetilde{u}^\varepsilon(t,x)$ tal que*

1. $||\widetilde{u}^\varepsilon||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(T) \quad \forall\varepsilon\in(0,1], t\in[0,T]$.
2. $\omega^\varepsilon = \nabla^\perp\cdot u^\varepsilon \in L^1_c$ *y* $\int_{\mathbb{R}^2}|\omega^\varepsilon(t,x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^2}|\omega_0(x)|dx \quad \forall t\in[0,T]$.
3. $\{u^\varepsilon(t,x)\}$ *está uniformemente acotado en* $Lip([0,T], H^{-L}_{loc}(\mathbb{R}^2))$.

Nota 1.5. *La demostración puede encontrarse en el artículo de Diperna y Majda [9]. La condición sobre ω_0 es válida para medidas finitas, que es el caso que nos interesa. Recordamos que el espacio de medidas de Radon RM es el espacio de medidas finitas sobre compactos y coincide con el dual del espacio de funciones continuas que tienden a 0 en el infinito. Por ser el dual de un espacio de Banach, los conjuntos acotados en RM son $*$-débilmente compactos.*

Gracias al teorema anterior, y por compacidad débil, podemos formar una sucesión $\{u^n(t,x)\}$ de soluciones convergente débilmente en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ a un candidato a solución u. La condición 3 del teorema y la convergencia de la regularización del dato inicial nos

aseguran que u satisface la condición inicial de (1.7). Por definición de convergencia débil, tendremos convergencia de $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \varphi \cdot u^n$, y de $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \phi \cdot u^n$.

Para probar el paso al límite, será suficiente probar la convergencia en distribución de los términos $(u_1^2 - u_2^2) = (u_1 + u_2)(u_1 - u_2)$, y $u_1 u_2$. Se puede demostrar que si $\omega_0 \in L^p$ para algún $p > 1$, entonces se tiene convergencia fuerte en L^2_{loc} para u^n, y por tanto u es solución de (1.7). Una construcción más detallada de estos resultados con sus demostraciones puede verse en el libro de Majda y Bertozzi [23].

En los siguientes capítulos analizaremos el caso $\omega \in H^{-1} \cap RM$, y como valor añadido obtendremos el resultado para $\omega \in L^1$. La dificultad de este nuevo caso radica en que en general no se tiene convergencia fuerte en L^2_{loc}, por lo que no se puede realizar el paso al límite en los términos no lineales. En el siguiente apartado veremos un ejemplo en el que, sin tener convergencia fuerte en L^2_{loc}, el límite de soluciones sigue siendo solución gracias a la estructura particular de los términos no lineales. En los capítulos siguientes realizaremos un análisis detallado sobre los términos no lineales y veremos condiciones suficientes para garantizar el paso al límite. Estas condiciones son algo restrictivas y sigue siendo una cuestión abierta si, para cualquier vorticidad en $H^{-1} \cap RM$, la sucesión de soluciones regularizadas converge a una solución.

1.1. Propiedades y ejemplos de soluciones

En este apartado vamos a mostrar un ejemplo de solución a las ecuaciones de Euler que servirá para ilustrar el fenómeno de *concentration-cancellation*, que puede darse al pasar al límite de soluciones suaves. Veremos también algunos resultados recientes relacionados con el trabajo.

Proposición 1.5 (Soluciones con vorticidad radial)**.** *Si $\omega(x,t) = \omega(|x|) = \omega(r)$ es una función $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces es solución estacionaria a la ecuación* (1.5)*.*

Demostración: Sean u, ψ tales que $\Delta\psi = \omega, \nabla^\perp \cdot u = \omega$. Por ser el laplaciano invariante bajo rotaciones, se tiene que $\psi(x) = \Delta^{-1}\omega$ también tiene simetría radial. Utilizando que $\nabla^\perp \psi = u$, la expresión $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega$ se reduce a

$$\begin{aligned}\partial_t \omega(r) + u(x) \cdot \nabla \omega(r) &= -\partial_{x_2}\psi(r)\partial_{x_1}\Delta\psi(r) + \partial_{x_1}\psi(r)\partial_{x_2}\Delta\psi(r) \\ &= -(\partial_{x_2} r)\psi'(r)(\partial_{x_1} r)(\Delta\psi'(r)) + (\partial_{x_1} r)\psi'(r)(\partial_{x_2} r)(\Delta\psi'(r)) = 0,\end{aligned}$$

por lo que ω satisface la ecuación de Euler (1.5). □

La proposición anterior nos da una familia de soluciones estacionarias a las ecuaciones de Euler. Ahora vamos a calcular las velocidades asociadas.

Proposición 1.6. *Sea $\omega(x,t) = \omega(|x|) = \omega(r)$ una función $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Entonces*

$$u(x,t) = \frac{x^\perp}{r^2} \int_0^r s\omega(s)ds$$

es solución estacionaria a las ecuaciones de Euler.

Demostración: Como ω tiene simetría radial, también la tiene ψ. Escribiendo el laplaciano en coordenadas polares, obtenemos de $\Delta\psi = \omega$ que

$$\psi'' + \frac{1}{r}\psi' = \omega,$$

de donde obtenemos que

$$\psi'(r) = \frac{1}{r}\int_0^r s\omega(s)ds,$$

y de la relación $u = \nabla^\perp\psi$ que

$$u(x,t) = u(x) = \frac{x^\perp}{r^2}\int_0^r s\omega(s)ds. \quad \square \tag{1.8}$$

Cuando $\int_0^\infty s\omega(s)ds = 0$ y el soporte de ω es compacto, las soluciones se denominan *Phantom-Vortices* porque la velocidad se hace nula fuera del soporte de ω. Tras estudiar el reescalado de soluciones, podremos encontrar una sucesión de soluciones regulares con un límite singular, que queremos estudiar si es solución.

Proposición 1.7 (Reescalado de soluciones)**.** *Si $u(x,t), p(x,t)$ son solución de* (1.1)*, entonces para cualquier $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$u_{\lambda,\tau}(x,t) = \frac{\lambda}{\tau}u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\tau}\right), \quad p_{\lambda,\tau}(x,t) = \frac{\lambda^2}{\tau^2}p\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\tau}\right),$$

son solución de (1.1)*.*

Demostración: Al aplicar la regla de la cadena, aparecen los mismos factores en cada sumando. $\square$

Corolario 1.8. *Dado $u(x,t)$ solución a las ecuaciones de Euler, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $u^\varepsilon(x,t) := \frac{1}{\varepsilon}u\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right)$ es también solución, con su correspondiente presión.*

Ejemplo 1.1 (Concentración de Phantom-Vortices)**.** *Sea $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $supp(\omega) \in [-1,1]$, y $\int_0^1 s\omega(s) = 0$.*

La velocidad asociada viene dada por la ecuación (1.8). Podemos calcular la energía cinética como

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx = 2\pi\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\left(\int_0^r s\omega(s)ds\right)dr.$$

Para ver si es finita solo hay que analizar el comportamiento cerca de $r = 0$, ya que el integrando se anula para $r > 1$. Al tener $\int_0^r s\omega(s)ds \leq r^2||\omega||_{L^\infty} = Cr^2$, se tiene que $\frac{1}{r^2}\int_0^r s\omega(s)ds$ está acotado, luego la energía cinética es finita.

Por el corolario 1.8, y por ser una solución estacionaria, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}u(x/\varepsilon)$ es solución. La energía cinética se conserva con este reescalado, ya que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \left| u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |u(x')|^2 dx' = C.$$

Queremos ver qué sucede cuando $\varepsilon \to 0$. Utilizando la compacidad de la topología débil en L^2, podemos encontrar una sucesión de $\varepsilon_n \to 0$ tal que $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \in L^2$, y como $supp(u^\varepsilon) \in B(0,\varepsilon)$, necesariamente $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup 0$ en L^2. Como cada u^ε satisface las ecuaciones de Euler, se tiene que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t \varphi \cdot u^\varepsilon + \nabla\varphi : u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) dx dt = 0,$$

y como $u_n^\varepsilon \rightharpoonup 0 \in L^2$, queremos ver si $\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\varphi : u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon dx dt = 0$. Vamos a analizar cada sumando de la expresión no lineal. Para cualquier $\xi \in C_0(\mathbb{R}^2)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \xi(x) u_i^{\varepsilon_n}(x) u_j^{\varepsilon_n}(x) dx &= \lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \xi(x) u_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \xi(x'\varepsilon) u_i(x') u_j(x') dx' \\
&= \xi(0) \int_{\mathbb{R}^2} u_i(x) u_j(x) dx := \xi(0) W_{ij}.
\end{aligned}$$

Gracias a la expresión explícita de la velocidad (1.8), podemos calcular propiedades de W_{ij} fácilmente. Por ser $u \in L^2$, y por la simetría del integrando, $W_{11} = W_{22} = C_W > 0$, y $W_{12} = W_{21} = 0$. Por tanto,

$$u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} C_W \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix} \in RM.$$

Esto muestra que no hay convergencia fuerte en L^2, ya que hay una cantidad de energía cinética que se concentra en el origen. Sin embargo, el límite sigue satisfaciendo las ecuaciones de Euler, ya que gracias a la condición $\nabla \cdot \varphi = \partial_{x_1}\varphi_1 + \partial_{x_2}\varphi_2 = 0$, se tiene que

$$\nabla\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \partial_{x_1}\varphi_1 C_W + \partial_{x_2}\varphi_2 C_W = 0.$$

La forma particular de la concentración de energía cinética junto a la incompresibilidad de la función test se cancelan. Esto es un ejemplo de *concentration-cancellation*.

Nótese que esta sucesión de soluciones no coincide con la establecida en el teorema (1.4), pero este ejemplo es suficiente para conocer qué puede ocurrir en el paso al límite. Otros ejemplos pueden verse en [23] [16].

1.1.1. Vortex Sheet como dato inicial

Definición 1.4. *La vorticidad $\omega_0(x)$ representa un vortex sheet si $\omega \in H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap RM(\mathbb{R}^2)$ con soporte en una curva y con $v_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$.*

El estudio de *vortex sheets* es un problema clásico porque es aplicable a problemas físicos. Que la vorticidad se concentre en una curva modeliza, por ejemplo, dos fluidos con diferentes características que evolucionan con la curva como frontera de separación. La vorticidad aparece de manera natural en la frontera entre los fluidos, ya que la velocidad tangencial a la frontera es discontinua en la misma. Un enfoque natural es intentar predecir la evolución de la frontera, es decir, la evolución de la curva donde se concentra la vorticidad.

Si parametrizamos la curva que define el dato inicial y planteamos la ecuación de evolución para la misma, obtenemos que está mal planteada en el caso general [33] [19]. Si la curva es inicialmente analítica, entonces se tiene existencia local de solución, formándose singularidades en tiempo finito [3] [6]. Con la teoría de soluciones débiles se pretende dar respuesta a este problema, encontrando soluciones globales en tiempo describiendo el fenómeno físico. En los siguientes capítulos vamos a estudiar la existencia de $\omega \in H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap RM(\mathbb{R}^2)$, generalizando el vortex sheet entendido como curva.

En lo relativo a la unicidad, en [25] se probó que existen soluciones a las ecuaciones de Euler con soporte compacto en espacio y tiempo, es decir, que del dato inicial 0 aparecen soluciones no nulas. Estas soluciones tienen energía cinética finita, pero $\omega \notin RM$. Las soluciones que construiremos en este trabajo sí cumplirán $\omega \in L^\infty([0,T], RM)$. En [34] se probó que hay unicidad cuando $\omega \in L^\infty$. La unicidad de nuestro tipo de soluciones sigue siendo una cuestión abierta. También se consideran otras propiedades de las soluciones, como la existencia de trayectorias o la conservación de energía [4].

Capítulo 2

Vorticidad inicial positiva

El primer resultado sobre existencia de soluciones según la definición 1.3 para $\omega \in H^{-1} \cap RM$ fue obtenido por Delort en [8] para vorticidades con signo constante y soporte compacto. Es más, en su trabajo probó el resultado de existencia para $\omega = \omega' + \omega''$, con $\omega' \in H^{-1} \cap RM$ con signo constante y soporte compacto, y $\omega'' \in L^p$, $p > 1$ con signo arbitrario y soporte compacto. Este resultado ha sido extendido a $\omega'' \in L^1 \cap H^{-1}$ en [31]. En [23] [26] se simplifica la demostración de estos resultados.

Siguiendo las ideas de estos trabajos, vamos a utilizar una aproximación de la identidad para regularizar el dato inicial, de forma que estaremos en las condiciones del teorema 1.4. Por convergencia débil, nuestro objetivo será probar la convergencia en distribución de los términos no lineales, es decir, $(u_1 + u_2)(u_1 - u_2)$ y $u_1 u_2$.

2.1. Términos no lineales

Vamos a comenzar por reducir el estudio de los términos no lineales a uno solo. En primer lugar, notamos que la ecuación de Euler es invariante por rotaciones. Por tanto, si una vorticidad ω da lugar a una velocidad u, entonces la vorticidad rotada $R(\omega)$ da lugar a la misma rotación de la velocidad $R(u)$. Con un ángulo de 45^o, el vector (u_1, u_2) se transforma en $\frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2, u_1 - u_2)$. Dado ω, si demostramos que $u_1 u_2$ converge en distribución, repitiendo el mismo proceso para $R(\omega)$ con una rotación de -45^o, tendremos también que $(u_1 + u_2)(u_1 - u_2)$ converge en distribución. En esta sección no vamos a suponer que ω tenga una orientación o simetría determinada, por lo que será suficiente probar que $u_1 u_2$ converge en distribución. Veamos ahora cómo reescribir este término al operarlo con una función test.

Proposición 2.1. *Dado $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C_c^\infty([0,T])$, y una solución regular de las ecuaciones de Euler $u = (u_1, u_2)$ con $\nabla^\perp \cdot u = \omega$, se tiene que*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_1(t,z)u_2(t,z)\varphi(z)\psi(t)dzdt \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega(t,x)\omega(t,y)\psi(t)H_\varphi(x,y)dxdydt,$$

donde

$$H_\varphi := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-1}{4\pi^2}\frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\varphi(z)dz,$$

H_φ *tiende a* 0 *en el infinito,* $H_\varphi = H_1(x,y) + H_2(x,y)$*, con* H_1 *continua y acotada, y*

$$H_2(x,y) = \frac{1}{8\pi}(\varphi(x)+\varphi(y))\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^2}.$$

Demostración: Esta prueba es larga, y para facilitar la comprensión vamos a dividir la prueba en cinco partes, además de un lema intermedio. Las partes serán reescribir el término no lineal, ver que la descomposición está bien definida, calcular H_2, probar que H_1 es acotada y probar que H_1 es continua.

Reescribir el término no lineal.
Utilizando la ley de Biot y Savart (1.2), obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} & u_1(t,z)u_2(t,z)\varphi(z)\psi(t)dzdt \\ =&\frac{-1}{4\pi^2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(\partial_{z_2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|z-y|\omega(y,t)dy\right) \\ &\qquad \left(\partial_{z_1}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|z-x|\omega(x,t)dx\right)\varphi(z)\psi(t)dzdt \\ =&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\omega(y,t)\omega(x,t)\int_{\mathbb{R}^2}\frac{-1}{4\pi^2}\frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\varphi(z)dzdxdydt,\end{aligned}$$

por lo que la última integral es igual a H_φ. Como φ tiene soporte compacto, la integral no necesita valor principal para $|z| \to \infty$, y se tiene que H_φ decae a 0 en el infinito. Como $1/|x|$ es localmente integrable en dos dimensiones, el único problema puede surgir si $x = y$, pero entonces

$$\int_{B(x,r)} \frac{(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-z|^4}\varphi(z)dz = \int_{B(x,r)} \frac{(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-z|^3}\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{|x-z|}dz,$$

gracias a que por simetría la integral que hemos añadido vale 0. Como φ es derivable, obtenemos de nuevo una integral del tipo $1/|x|$, que es finita.

Para calcular H_φ de forma explícita, conviene dividir su expresión en dos sumandos como

$$\begin{aligned} H_\varphi(x,y) =& -\frac{1}{4\pi^2} p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(z)-\frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(y))\right)dz \\ & -\frac{1}{8\pi^2} p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}(\varphi(x)+\varphi(y))dz \\ =& H_1(x,y)+H_2(x,y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ver que la descomposición está bien definida.
Colas del tipo $1/|x|^2$ no son integrables en dos dimensiones, así que necesitamos ver que las integrales están bien definidas como valor principal cuando $|z| = R \to \infty$ y también en las singularidades del denominador.

Ya hemos visto que las singularidades de los ceros son integrables si $x \neq y$. Si $x = y$, para H_1 podemos usar de nuevo que $\varphi(z)$ es derivable, mientras que para H_2 necesitamos un valor principal, pero la simetría implica que está bien definido. Después calcularemos explícitamente H_2.

Para $|z| \to \infty$, observamos que basta probar que una de las dos está bien definida, y lo haremos con la segunda. Para ello vamos a desarrollar en serie y ver que se cancela el término no integrable. Ignorando los términos que no dependen de z, y fijado (x,y), tenemos que

$$\begin{aligned} p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz &= p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{(|x|^2+|z|^2-2x\cdot z)}\frac{y_2-z_2}{(|y|^2+|z|^2-2y\cdot z)}dz \\ &= p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|z|^4}\frac{x_1-z_1}{(1+|x|^2/|z|^2-2x/|z|\cdot z/|z|)}\frac{y_2-z_2}{(1+|y|^2/|z|^2-2y/|z|\cdot z/|z|)}dz \\ &= p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|z|^4}(x_1-z_1)(y_2-z_2) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|z|^4}(x_1-z_1)(y_2-z_2)\mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right) \\ &= p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{z_1 z_2}{|z|^4} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^3}\right) = 0 + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^3}\right) < \infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

por lo que las integrales que definen H_1, H_2 están bien definidas utilizando valor principal.

Cálcular H_2 explícitamente.
Para calcular la función H_2, notamos que con el cambio de variables $\beta \rightleftarrows z+y$, $\gamma \rightleftarrows x-y$, se tiene que

$$p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz = p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\gamma_1-\beta_1}{|\gamma-\beta|^2}\frac{\beta_2}{|\beta_2|^2}d\beta,$$

lo cual podemos ver como una convolución de la forma

$$p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\gamma_1-\beta_1}{|\gamma-\beta|^2}\frac{\beta_2}{|\beta_2|^2}d\beta = (\partial_{\gamma_1}\log(|\gamma|)) * (\partial_{\gamma_2}\log(|\gamma|)).$$

Utilizando que la transformada de Fourier de $\log(|x|)$ en $\mathbb{R}^2$ es $-1/(2\pi|\xi|^2)$ (ver [13]), tenemos que

$$\mathcal{F}\big((\partial_{\gamma_1}\log(|\gamma|)) * (\partial_{\gamma_2}\log(|\gamma|))\big) = \frac{2\pi i\xi_1 \cdot 2\pi i\xi_2}{(2\pi)^2|\xi|^2} = -\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^4} = \frac{1}{2}\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}(\log(|\xi|),$$

cuya transformada inversa es

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\frac{1}{2}\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}(\log(|\xi|)\big) = -\pi\frac{\gamma_1\gamma_2}{|\gamma|^2},$$

por lo que recordando $\gamma = x - y$ tenemos que

$$H_2(x,y) = \frac{1}{8\pi}(\varphi(x)+\varphi(y))\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^2}. \tag{2.3}$$

Probar que H_1 es acotada. Para este apartado vamos a ayudarnos del siguiente lema.

Lema 2.2. *Dado $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, existe una constante M tal que*

$$|F(x,z)| := \left|[\varphi(x)-\varphi(z)]\frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\right| \le \frac{M}{1+|x-z|} \le M.$$

Demostración: Como $\varphi \in C_c^\infty$, se tiene que

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{|x-z|}\right| \le ||\varphi||_{Lip} \le M_1.$$

Sea $\delta > 0$. Si $|x-z| < \delta$, entonces

$$F(x,z) \le M_1 \le M_1\frac{1+\delta}{1+|x-z|} = \frac{M_2}{1+|x-z|}.$$

Si $|x-z| > \delta$, entonces

$$F(x,z) \le \frac{2||\varphi||_{L^\infty}}{|x-z|} \le \frac{1+|x-z|}{|x-z|}\frac{2||\varphi||_{L^\infty}}{1+|x-z|} \le \frac{1+\delta}{\delta}\frac{2||\varphi||_{L^\infty}}{1+|x-z|} = \frac{M_3}{1+|x-z|}.$$

□

Vamos a considerar $R > 0$ tal que el soporte de φ esté contenido en $B(0,R)$. Buscaremos una cota que dependa de R, pero no de x, y. Consideramos dos casos.

Supongamos $|x| > R$ o $|y| > R$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $|x| > R$. Por la ecuación (2.1), es suficiente probar que H_φ, H_2, son acotadas. Por (2.3) tenemos que

$$|H_2(x,y)| \le \frac{1}{4\pi}||\varphi||_{L^\infty} < \infty.$$

Por tener φ soporte contenido en $B(0,R)$, podemos acotar

$$|H_\varphi(x,y)| \leq \frac{1}{4\pi^2 R}||\varphi||_{L^\infty}\int_K \frac{1}{|y-z|} \leq \frac{1}{4\pi^2 R}||\varphi||_{L^\infty}\int_{B(0,R)} \frac{1}{|z|} < \infty.$$

Queda el caso $|x|,|y| \leq R$. Separamos H_1 en los sumandos

$$\begin{aligned} 8\pi H_1(x,y) =& p.v.\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x)-\varphi(z)\right)dz \\ &+ p.v.\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(y)-\varphi(z)\right)dz. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por analogía, será suficiente probar que el primer sumando es acotado. Utilizando el lema 2.2, podemos acotar

$$\begin{aligned} &\left|p.v.\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x)-\varphi(z)\right)dz\right| \\ &\leq \left|p.v.\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x)-\varphi(z)\right)dz\right| + \int_{B(0,2R)}\frac{M}{|y-z|}dz \\ &\leq \left|p.v.\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x)\right)dz\right| + \int_{B(0,2R)}\frac{M}{|z|}dz. \end{aligned}$$

El segundo sumando está acotado independientemente de x,y. En el primero necesitamos un valor principal en el infinito, que podemos acotar al igual que en (2.2), ya que $\varphi(x)$ es constante en la integral. En este caso las cotas solo dependen de $|x| \leq R, |y| \leq R$ y $|z|^{-1} \leq R^{-1}$, lo que prueba que H_1 es acotada.

Probar que H_1 es continua.

Consideramos de nuevo la descomposición (2.4). Por analogía, será suficiente probar que el primer sumando es continuo. Primero veremos continuidad en x, y después en y. Dado $h \in \mathbb{R}^2$, tenemos que ver que

$$\begin{aligned} &p.v.\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x)-\varphi(z)\right)dz \\ &- p.v.\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1+h_1-z_1}{|x+h-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x+h)-\varphi(z)\right)dz \\ &= I_1+I_2+I_3+I_4, \end{aligned} \tag{2.5}$$

tiende a 0 con $|h|$, donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\{|x-z|<2|h|\}} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x)-\varphi(z)\right)dz, \\ I_2 &= -\int_{\{|x-z|<2|h|\}} \frac{x_1+h_1-z_1}{|x+h-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}\left(\varphi(x+h)-\varphi(z)\right)dz, \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|<2|h|\}} \left\{ \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1-z_1)}{|x-z|^2} - \frac{(\varphi(x+h)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2} \right\} \frac{y_2-z_2}{|y-z|^2} dz,$$

$$I_4 = p.v. \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \left\{ \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1-z_1)}{|x-z|^2} - \frac{(\varphi(x+h)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2} \right\} \frac{y_2-z_2}{|y-z|^2} dz.$$

Usando el lema 2.2, podemos acotar directamente

$$|I_1| \leq M \int_{\{|x-z|<2|h|\}} \frac{|y_2-z_2|}{|y-z|^2} \leq M \int_{\{|y-z|<2|h|\}} \frac{1}{|y-z|} dz = M \int_0^{2h} 2\pi dr = 4\pi M|h|.$$

$$|I_2| \leq M \int_{\{|x-z|<2|h|\}} \frac{|y_2-z_2|}{|y-z|^2} \leq 4\pi M|h|.$$

Por el teorema del valor medio, y por ser φ es lipschitz, para $|x-z| > 2|h|$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1-z_1)}{|x-z|^2} - \frac{(\varphi(x+h)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2} \right| \\ &\leq |h| \left| \partial_h \varphi(c) \frac{(x_1-z_1)}{|x-z|^2} + \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))}{|x-z|^2} \frac{h_1}{|h|} - 2\frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1-z_1)}{|x+c-z|^3} \right| \\ &\leq \frac{C|h|}{|x-z|} \leq \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos usado que $|x-z| > 2|h|, |c| < |h| \Rightarrow |x+c-z|^{-1} \leq 2|x-z|^{-1}$. Con esto podemos acotar

$$|I_3| \leq \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|<2|h|\}} C\frac{|y_2-z_2|}{|y-z|^2} dz \leq C \int_{\{|y-z|<2|h|\}} \frac{1}{|y-z|} dz \leq 2\pi C|h|.$$

Hasta ahora hemos seguido, ampliando detalles, la demostración dada en [23]. En esta referencia la cota de I_4 tiene un fallo, por lo que usaremos una propia. Descomponemos el factor entre corchetes de I_4 como

$$\frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1-z_1)}{|x-z|^2} - \frac{(\varphi(x+h)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3,$$

donde

$$\overline{I}_1 = \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1-z_1)}{|x-z|^2} - \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x-z|^2} = \frac{(\varphi(z)-\varphi(x))(h_1)}{|x-z|^2},$$

$$\begin{aligned}\overline{I}_2 =&\frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x-z|^2} - \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2}\\ =&(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)\left[\frac{1}{|x-z|^2}-\frac{1}{|x+h-z|^2}\right],\\ \overline{I}_3 =& \frac{(\varphi(x)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2} - \frac{(\varphi(x+h)-\varphi(z))(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2}\\ =&\left[\varphi(x)-\varphi(x+h)\right]\frac{(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2}.\end{aligned}$$

Como $\varphi \in C_c^\infty$, en particular es Hölder $C^{1/2}$, por lo que

$$|\overline{I}_1| \leq \frac{||\varphi||_{C^{1/2}}|h|}{|x-z|^{3/2}}.$$

Por el teorema del valor medio, en la región de I_4 tenemos

$$\left|\frac{1}{|x-z|^2}-\frac{1}{|x+h-z|^2}\right| \leq \frac{C|h|}{|x-z|^3}.$$

Usando también $|x+h-z| \leq 2|x-z|$, podemos acotar

$$|\overline{I}_2| \leq |\varphi(x)-\varphi(z)||x+h-z|\frac{C|h|}{|x-z|^3} \leq \frac{||\varphi||_{C^{1/2}}C|h|}{|x-z|^{3/2}}.$$

Dejaremos el término $\overline{I}_3$ para después, pues necesita un valor principal y no funciona una cota directa. Gracias a las cotas anteriores,

$$\int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}}(|\overline{I}_1|+|\overline{I}_2|)\frac{|y_2-z_2|}{|y-z|^2}dz \leq \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}}\frac{C|h|}{|x-z|^{3/2}|y-z|}dz.$$

Aplicando Hölder con exponentes $5/2$ y $5/3$, y ampliando los conjuntos de integración,

$$\begin{aligned}&\int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}}\frac{1}{|x-z|^{3/2}|y-z|}dz\\ &\qquad\leq \left(\int_{\{|x-z|>2|h|\}}\frac{1}{|x-z|^{5/2}}dz\right)^{3/5}\left(\int_{\{|y-z|>2|h|\}}\frac{1}{|y-z|^{5/2}}dz\right)^{2/5}.\end{aligned}$$

Cambiando a polares es fácil obtener $\int_{\{|x-z|>2|h|\}}\frac{1}{|x-z|^{5/2}}dz = C|h|^{-1/2}$, por lo que los términos correspondientes a $|\overline{I}_1|, |\overline{I}_2|$ se acotan por $C|h|^{1/2}$. Queda acotar el término correspondiente a $\overline{I}_3$, que es

$$p.v.\int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}}\left[\varphi(x)-\varphi(x+h)\right]\frac{(x_1+h_1-z_1)}{|x+h-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz.$$

Vamos a probar que

$$\left| p.v. \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \frac{x_1+h_1-z_1}{|x+h-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz \right| \leq C,$$

para alguna constante C independiente de h, si h es suficientemente pequeño. Al ser el término restante esta integral multiplicada por $\varphi(x)-\varphi(x+h)$, que se puede acotar por $||\varphi||_{Lip}|h|$, habríamos terminado. Descomponemos en dos sumandos

$$\begin{aligned} &p.v. \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \frac{x_1+h_1-z_1}{|x+h-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz \\ &= p.v. \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz \\ &\quad + \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \left(\frac{x_1+h_1-z_1}{|x+h-z|^2}-\frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\right)\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para el segundo sumando, como en esta región no hay singularidades en el denominador podemos aplicar el teorema del valor medio, obteniendo

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \left(\frac{x_1+h_1-z_1}{|x+h-z|^2}-\frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\right)\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz \right| \\ &\quad \leq \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \frac{|h|}{|x-z|^2}\frac{1}{|y-z|}dz. \end{aligned}$$

Utilizando Hölder con exponentes $2/3, 1/3$, y ampliando la región de integración, obtenemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \left(\frac{x_1+h_1-z_1}{|x+h-z|^2}-\frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\right)\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz \right| \\ &\quad \leq |h| \left(\int_{\{|x-z|>2|h|\}} \frac{1}{|x-z|^3}dz \right)^{2/3} \left(\int_{\{|y-z|>2|h|\}} \frac{1}{|y-z|^3}dz \right)^{1/3} = 2\pi|h|\frac{1}{2|h|} = C. \end{aligned}$$

Queda acotar el primer sumando de (2.6). La integral definida en $\mathbb{R}^2$ está bien definida como valor principal, como hemos visto anteriormente. Podemos reescribir el sumando como

$$\begin{aligned} &p.v. \int_{\{|x-z|>2|h|,|y-z|>2|h|\}} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz \\ &= p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz - p.v. \int_{\{|x-z|\leq 2|h|\}\cup\{|y-z|\leq 2|h|\}} \frac{x_1-z_1}{|x-z|^2}\frac{y_2-z_2}{|y-z|^2}dz. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para $x \neq y$, las singularidades del denominador son integrables, por lo que el segundo sumando de (2.7) tiende a 0 con $|h|$, y en particular lo podemos acotar independientemente de h para $|h|$ suficientemente pequeño. Para $x = y$, el segundo sumando es nulo por simetría. En conclusión, tenemos acotado (2.6) independientemente de h (suficientemente pequeño). Nótese que esta cota es para x, y fijos, pero arbitrarios, lo cual es suficiente para probar la continuidad en x (no uniforme).

Ahora queda probar la continuidad en y, pero veremos que se reduce al caso anterior. Ahora tenemos que acotar

$$\begin{aligned} & p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(x) - \varphi(z))\, dz \\ & \quad - p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 + h_2 - z_2}{|y + h - z|^2} (\varphi(x) - \varphi(z))\, dz \\ & = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4, \end{aligned}$$

donde

$$\underline{I}_1 = \int_{\{|y-z|<2|h|\}} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(x) - \varphi(z))\, dz,$$

$$\underline{I}_2 = - \int_{\{|y-z|<2|h|\}} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 + h_2 - z_2}{|y + h - z|^2} (\varphi(x) - \varphi(z))\, dz,$$

$$\underline{I}_3 = \int_{\{|x-z|<2|h|, |y-z|>2|h|\}} (\varphi(x) - \varphi(z)) \frac{(x_1 - z_1)}{|x - z|^2} \left\{ \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} - \frac{y_2 + h_2 - z_2}{|y + h - z|^2} \right\} dz,$$

$$\underline{I}_4 = p.v. \int_{\{|x-z|>2|h|, |y-z|>2|h|\}} (\varphi(x) - \varphi(z)) \frac{(x_1 - z_1)}{|x - z|^2} \left\{ \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} - \frac{y_2 + h_2 - z_2}{|y + h - z|^2} \right\} dz.$$

Cada $\underline{I}_i$ es análoga a la I_i de la ecuación (2.5), y en algunos casos más sencilla, ya que ahora φ no cambia con h. Esto permite concluir que H_1 es continua, y con ello la prueba de la proposición. □

En general, al operar núcleos como K_2 (1.2) se obtienen funciones con singularidades a lo largo de la diagonal. Sin embargo, la estructura particular del término no lineal da lugar a una función $H_\varphi(x, y)$ discontinua en la diagonal, pero acotada. Delort [8] fue el primero en observar esto, lo cual resultará fundamental para el tratamiento de la discontinuidad.

2.2. Teorema de Delort

Vamos a presentar el teorema de existencia, y a lo largo de la sección daremos la demostración. La idea será probar la convergencia de la no linealidad en la formulación de la vorticidad, para probar posteriormente que implica la convergencia en la formulación de la velocidad (1.7). Sobre el espacio de Sobolev H^{-1} únicamente vamos a usar que es el dual del espacio H^1_0. Al tener $H^1_0 \hookrightarrow L^p$ para cualquier $p > 1$, por dualidad tenemos que $L^p \hookrightarrow H^{-1}$ para cualquier $p > 1$.

Teorema 2.3 (Delort, 1991. [8]). *Sea $T > 0$, y sea $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ con $\nabla^\perp \cdot u_0 = \omega_0 = \omega_0' + \omega_0''$, donde $\omega_0' \in RM(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto y positiva, y $\omega_0'' \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto, donde $p > 1$. Entonces existe una solución a las ecuaciones de Euler* (1.7) *con dato inicial u_0, con $\omega(t,x) = \omega'(t,x) + \omega''(t,x)$, donde*

$$\omega' \in L^\infty([0,T], RM), \quad \omega'' \in L^\infty([0,T], L^q) \quad \forall q \in [1,p].$$

Teorema 2.4 (Vecchi y Wu, 1993. [31]). *Sea $T > 0$, y sea $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ con $\nabla^\perp \cdot u_0 = \omega_0 = \omega_0' + \omega_0''$, donde $\omega_0' \in RM(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto y positiva, y $\omega_0'' \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto. Entonces existe una solución a las ecuaciones de Euler* (1.7) *con dato inicial u_0, con $\omega(t,x) = \omega'(t,x) + \omega''(t,x)$, donde*

$$\omega' \in L^\infty([0,T], RM), \quad \omega'' \in L^\infty([0,T], L^1).$$

Nota 2.1. *Haremos las dos demostraciones juntas por ser iguales en gran parte. El segundo teorema solo añade el uso del teorema de Dunford-Pettis, que enunciaremos después.*

Demostración: Fijamos $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ con $\nabla^\perp \cdot u_0 = \omega_0 = \omega_0' + \omega_0''$, donde $\omega_0' \in RM(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto y positiva, y $\omega_0'' \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto, si $p > 1$, y $\omega_0'' \in L^1 \cap H^{-1}$ con soporte compacto, si $p = 1$.

Por tener soporte compacto, tenemos la inclusión continua $L^p \hookrightarrow L^1$, por lo que

$$\int_{\mathbb{R}^2} d|\omega_0(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^2} d|\omega_0'(x)| + \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0''(x)|dx < \infty,$$

por lo que estaremos en las condiciones del teorema 1.4 al regularizar. Este implica que existen soluciones $u^\varepsilon(t,x) \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ a (1.7) con dato inicial $u_0^\varepsilon = u_0 * \rho^\varepsilon$ y con la descomposición $u^\varepsilon(t,x) = \overline{u}^\varepsilon(x) + \widetilde{u}^\varepsilon(t,x)$, con $||\widetilde{u}^\varepsilon(t,\cdot)||_{L^2} \leq C(T)$, además de que ω^ε está uniformemente acotada en L^1.

Al tener para $p > 1$ la inclusión $L^p \hookrightarrow H^{-1}$, $||\omega_0^\varepsilon||_{H^{-1}} \leq C$. Veamos que $\omega^\varepsilon \in H^{-1}$ al variar t. Como $\widetilde{u}^\varepsilon(t,\cdot)$ está uniformemente acotada en L^2, $||\nabla^\perp \cdot \widetilde{u}^\varepsilon||_{H^{-1}} \leq C(T)$. De la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} ||\omega^\varepsilon(t)||_{H^{-1}} &\leq ||\nabla^\perp \cdot \overline{u}^\varepsilon||_{H^{-1}} + ||\nabla^\perp \cdot \widetilde{u}^\varepsilon(t)||_{H^{-1}} \\ &\leq ||\omega_0^\varepsilon||_{H^{-1}} + ||\nabla^\perp \cdot \widetilde{u}^\varepsilon(0)||_{H^{-1}} + ||\nabla^\perp \cdot \widetilde{u}^\varepsilon(t)||_{H^{-1}} \leq C(T), \end{aligned}$$

por lo que la sucesión ω^ε está uniformemente acotada en $L^\infty([0,T], H^{-1})$. Por compacidad *-débil, una subsucesión converge a

$$\omega \in L^\infty([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap RM(\mathbb{R}^2)),$$

que es nuestro candidato a solución de (1.7).

La descomposición de ω es consecuencia de las trayectorias (proposición 1.3). Al ser ω^ε regular, existen las trayectorias X^ε y satisfacen

$$\omega^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t,\alpha)) = \omega_0^\varepsilon(\alpha) = \omega_0'^\varepsilon(\alpha) + \omega_0''^\varepsilon(\alpha).$$

Esto permite considerar

$$\omega'^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t,\alpha)) = \omega_0'^\varepsilon(\alpha), \quad \omega''^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t,\alpha)) = \omega_0''^\varepsilon(\alpha),$$

lo que nos permite deducir usando que ω' es positiva

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega'^\varepsilon(t,x)|dx = \int_{\mathbb{R}^2} \omega'^\varepsilon(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0'^\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} d\omega_0'(x).$$

De nuevo debido a las trayectorias y usando propiedades de aproximaciones de la identidad,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega''^\varepsilon(t,x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0''^\varepsilon(x)|^q dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0''(x)|^q dx = ||\omega_0''||_{L^q}^q \leq C_q ||\omega_0''||_{L^p}^q. \tag{2.8}$$

Tomando límite *-débil en subsucesiones con $\varepsilon \to 0$, tenemos la descomposición del teorema 2.3. Queda ver que el límite ω satisface las ecuaciones de Euler. Por propiedades del límite débil, solo necesitamos demostrar que el término no lineal converge. Con la función H_φ de la proposición 2.1, tenemos que ver

$$\begin{aligned} p.v. \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega^\varepsilon(t,x)\omega^\varepsilon(t,y)\psi(t)H_\varphi(x,y)dxdydt \\ \to_{\varepsilon\to 0}\, p.v. \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)H_\varphi(x,y)(d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y))dt, \end{aligned} \tag{2.9}$$

y probar que esto implica que el término no lineal de (1.7) converge. Hemos denotado por $\mu_1 \otimes \mu_2$ la medida producto de μ_1 y μ_2.

Sea $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\chi \equiv 1$ en un entorno de 0. Vamos a usar la descomposición $H_\varphi = H_1 + H_2$ de la proposición 2.1. Como H_2 solo es discontinua en la diagonal y se anula para $|x|, |y|$ suficientemente grandes (ver proposición 2.1), la función $H_1(x,y) + (1-\chi(x-y))H_2(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ y tiende a 0 en el infinito, por lo que al ser $L^\infty([0,T], RM \times RM)$ el dual de $L^1([0,T], C_0 \times C_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega^\varepsilon(t,x)\omega^\varepsilon(t,y)\psi(t)\left[H_1(x,y) + (1-\chi(x-y))H_2(x,y)\right]dxdydt \\ \to_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\left[H_1(x,y)+(1-\chi(x-y))H_2(x,y)\right]d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y)dt, \end{aligned}$$

entendiendo el límite tomado posiblemente en una sucesión de ε. Nos proponemos demostrar que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega^\varepsilon(t,x)\omega^\varepsilon(t,y)\psi(t)\chi(x-y)H_2(x,y)dxdydt \\ \to_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\chi(x-y)H_2(x,y)d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y)dt.$$

Por la proposición 2.1 tenemos que $H_2(x,y) = (\varphi(x)+\varphi(y))h(x,y)$, con h acotada en el plano y discontinua en la diagonal. Por linealidad de la integral y analogía entre x, y, será suficiente probar que para ε suficientemente pequeño

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega^\varepsilon(t,x)\omega^\varepsilon(t,y)\psi(t)\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)dxdydt \right. \\ \left. - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y)dt \right| < \eta, \tag{2.10}$$

para $\eta > 0$ arbitrario. Antes de obtener esta cota, demostraremos algunos resultados auxiliares.

Lema 2.5. *Una medida $\mu \in H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap RM(\mathbb{R}^2)$ es difusa. Es decir, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2$ $\mu(\{x_o\}) = 0$.*

Demostración: Toda medida finita se descompone de forma única en $\mu = \mu_d + \mu_a$, donde μ_d es medida difusa y μ_a es medida discreta, es decir, $\mu_a = \sum \lambda_j \delta_{x_j}$. Es habitual usar el subíndice a para medidas discretas en referencia al término *atomic*. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, elegimos $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $g \equiv 1$ cerca de 0. Definiendo

$$g_\sigma(x) = g\left(\frac{(x-x_0)}{\sigma}\right),$$

es directo ver que la sucesión g_σ está acotada en $H^1(\mathbb{R}^2)$ cuando $\sigma \to 0$, y tiende débilmente a $0 \in H^1$. Esto implica

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \langle \mu, g_\sigma \rangle = 0.$$

Por convergencia dominada, y como $g_\sigma \to 0$ salvo en un conjunto de medida nula para μ_d, $\langle \mu_d, g_\sigma\rangle \to 0$. En cambio, si existe algún j tal que $x_0 = x_j$, $\langle \mu_a, g_\sigma\rangle \to \lambda_j \neq 0$, lo cual es contradictorio, luego $\mu = \mu_d$.

□

Proposición 2.6. *Si $t_k \to t_\infty$ y $\varepsilon_k \to 0$ (de forma que $\omega^{\varepsilon_k}(t_\infty)$ converge débilmente), entonces para cualquier $g \in C_c^\infty$ se tiene*

$$\int \omega^{\varepsilon_k}(t_k,x)g(x)dx \to \int g(x)d\omega(t_\infty,x).$$

Demostración: Sumando y restando $\int \omega^{\varepsilon_k}(t_\infty, x)g(x)dx$, tenemos

$$\int \omega^{\varepsilon_k}(t_k, x)g(x)dx - \int \omega^{\varepsilon_k}(t_\infty, x)g(x)dx \to 0,$$

pues ω^ε está acotada en $Lip([0,T], H^{-L-1}_{loc}(\mathbb{R}^2)) \subset Lip([0,T], \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2))$ uniformemente (ver teorema (1.4)), siendo $\mathcal{D}'$ el espacio de distribuciones. Por otro lado,

$$\int \omega^{\varepsilon_k}(t_\infty, x)g(x)dx \to \int g(x)d\omega(t_\infty, x),$$

ya que tenemos convergencia débil.

□

Sea $R > 0$ tal que el soporte de $\varphi(x)\chi(x-y) \subset B(0,R) \times B(0,R)$.

Proposición 2.7. *Existe una familia de conjuntos abiertos $\{V_j\}$ entornos de la diagonal de $\overline{B(0,R)} \times \overline{B(0,R)}$ y una sucesión $\{\varepsilon_j\}$ tal que*

$$\int_0^T \int_{V_j} |\omega^\varepsilon(t,x)||\omega^\varepsilon(t,y)|dxdydt \leq \frac{1}{j} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_j). \tag{2.11}$$

Demostración: Mostraremos que el resultado se cumple para

$$V_j = \{(x,y) \in \overline{B(0,R)} \times \overline{B(0,R)}; |x-y| \leq r_j\},$$

donde $\{r_j\}$ es una sucesión que tiende a 0. El miembro de la izquierda de (2.11) se acota trivialmente por

$$\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \sup_{x \in \overline{B(0,R)}} \int_{|z|\leq r_j} |\omega^\varepsilon(t, x+z)|dz \right) \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\omega^\varepsilon(t,x)|dxdt \right), \tag{2.12}$$

y a su vez el segundo factor de esta expresión está acotado (ver teorema 1.4), por lo que es suficiente demostrar que podemos elegir r_j de forma que el primer factor se acote por $1/j$. Procederemos por reducción al absurdo.

Si no es posible elegir tales r_j, entonces existe un $\delta > 0$, y para cada N suficientemente grande valores $\varepsilon_N \in (0, 1/N)$, $x_N \in \overline{B(0,R)}$ cumpliendo

$$\delta \leq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \int_{|z|\leq 1/N} |\omega^{\varepsilon_N}(t, x_N + z)|dz. \tag{2.13}$$

Esto implica que existe para cada N un t_N tal que

$$||\omega''^{\varepsilon_N}(t_N, \cdot)||_{L^p} \leq ||\omega''^{\varepsilon_N}||_{L^\infty([0,T],L^p)},$$

$$\delta \leq \int_{|z|\leq 1/N} |\omega^{\varepsilon_N}(t_N, x_N + z)|dz.$$

Al pertenecer t y x a conjuntos compactos, a través de subsucesiones tenemos convergencias $x_N \to x_0 \in \overline{B(0,R)}$, $t_N \to t_0 \in [0,T]$. Gracias a que ω'^{ε} es positiva tenemos que

$$\int |\omega^{\varepsilon}| - 2\int |\omega''^{\varepsilon}| \leq \int |\omega'^{\varepsilon}| + \int |\omega''^{\varepsilon}| - 2\int |\omega''^{\varepsilon}| \leq \int \omega'^{\varepsilon} - \int |\omega''^{\varepsilon}| \leq \int \omega^{\varepsilon}. \tag{2.14}$$

Considerando $g \in C_c^{\infty}$ positiva con $g \equiv 1$ cerca de x_0,

$$\int \omega^{\varepsilon_N}(t_N,x)g(x)dx \geq \int |\omega^{\varepsilon_N}(t_N,x)|g(x)dx - 2\int |\omega''^{\varepsilon_N}(t_N,x)|g(x)dx.$$

Utilizando (2.13) y (2.8), y utilizando Hölder (si $p > 1$) podemos acotar para N suficientemente grande

$$\int \omega^{\varepsilon_N}(t_N,x)g(x)dx \geq \delta - C_p||\omega_0''||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

Por la proposición 2.6, tomando límite en N tenemos

$$\int g(x)d\omega(t_0,x) \geq \delta - C_p||\omega_0''||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

Como $q < \infty$, haciendo el soporte de g tender a x_0 el miembro de la derecha tiende a $\delta > 0$, y el de la izquierda a 0 por el lema 2.5, lo cual es contradictorio.

Para el caso $p = 1$, usaremos el teorema de Dunford-Pettis, que puede verse en [2].

Definición 2.1. *Un conjunto $\mathcal{F} \subset L^1$ es uniformemente integrable si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\int_E |f| \leq \varepsilon,$$

para cualquier $|E| < \delta$, $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.8 (Dunford-Pettis)**.** *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^1(\mu)$. Entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente integrable si y solo si es un conjunto relativamente compacto de $L^1(\mu)$ con la topología débil.*

Como $\omega_0''^{\varepsilon} \to \omega_0''$ en L^1, la sucesión $\omega_0''^{\varepsilon}$ es uniformemente integrable. Al transportarse ω_0^{ε} con las trayectorias, y las trayectorias preservar la medida de los conjuntos, $\omega''^{\varepsilon}(t)$ es uniformemente integrable, por lo que existe un N_0 tal que $\forall N > N_0$,

$$\int_{|z|\leq 1/N} |\omega''^{\varepsilon_N}(t, x_N + z)|dz \leq \delta/4.$$

Uniendo esto a (2.14) y (2.13), deducimos que para N suficientemente grande

$$\int_{|z|\leq 1/N} \omega^{\varepsilon_N}(t, x_N + z)dz \geq \delta/2,$$

contradiciendo de nuevo la difusividad, y probando finalmente la proposición. □

Nota 2.2. *Este resultado es el único que no es fácilmente modificable cuando ω' no tiene un signo definido. En el siguiente capítulo veremos una adaptación para un caso con simetría.*

Consideremos un último lema antes de probar la cota (2.10).

Lema 2.9. *La diagonal $x = y$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ es de medida $d|\omega(t,x)| \otimes d|\omega(t,y)|$- nula.*

Demostración: Como $\omega \in H^{-1}$, ω es una medida difusa, y por tanto $\mu := |\omega|$ también. Esto implica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} 1_{\{x=y\}} d\mu(t,x)\otimes d\mu(t,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mu(t,y)\left(\int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{x=y\}} d\mu(t,x)\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mu(t,y)\left(\int_{\{y\}} d\mu(t,x)\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu\{y\}(t) d\mu(t,y) = 0,\end{aligned}$$

ya que el integrando es nulo en todo y.

□

Para probar (2.10), consideramos para cada j una función $\theta_j \in C_c^\infty$ tal que $\theta_j \equiv 1$ cerca de 0, con valores en $[0,1]$ y con $supp(\theta_j(x-y)) \cap (\overline{B(0,R)} \times \overline{B(0,R)}) \subset V_j$. Usando la desigualdad triangular, separamos en los sumandos

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega^\varepsilon(t,x)\omega^\varepsilon(t,y)\psi(t)\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)dxdydt\right.\\ &\left.- \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y)dt\right| \le |I_1| + |I_2| + |I_3|,\end{aligned}$$

donde

$$|I_1| = \left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega^\varepsilon(t,x)\omega^\varepsilon(t,y)\psi(t)\theta_j(x-y)\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)dxdydt\right|,$$

$$\begin{aligned}|I_2| = \Bigg|&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega^\varepsilon(t,x)\omega^\varepsilon(t,y)\psi(t)(1-\theta_j(x,y))\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)dxdydt\\ &- \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)(1-\theta_j(x,y))\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y)dt\Bigg|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|I_3| = \Bigg|&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)(1-\theta_j(x,y))\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y)dt\\ &- \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\chi(x-y)\varphi(y)h(x,y)d\omega(t,x)\otimes d\omega(t,y)dt\Bigg|.\end{aligned}$$

Como la diagonal es de medida $d\omega \otimes d\omega$- nula para cualquier t, tenemos que $\chi h\varphi(1-\theta_j) \to \chi h\varphi$ ($d\omega\otimes d\omega$-en casi todo) al tender $j \to \infty$. Por convergencia dominada, $|I_3| \to 0$. Para $|I_1|$ podemos acotar

$$|I_1| \le ||\chi||_{L^\infty}||h||_{L^\infty}||\varphi||_{L^\infty}||\psi||_{L^\infty}\int_0^T\int_{V_j} |\omega^\varepsilon(t,x)||\omega^\varepsilon(t,y)|dxdydt,$$

que tiende a 0 con j, ε por la proposición 2.7. Como para cada j la función del integrando en I_2 es continua, tomando $\varepsilon \to 0$, por convergencia débil y dualidad entre $L^\infty([0,T], RM \times RM)$ y $L^1([0,T], C_0 \times C_0)$, $|I_2| \to 0$. En conjunto, esto muestra que para j suficientemente grande, ε suficientemente pequeño, tenemos (2.10). Hemos probado la convergencia del término no lineal de la vorticidad, y queremos ver que se tiene para las velocidades.

Para completar la prueba del teorema solo queda probar

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_1^\varepsilon(t,z) u_2^\varepsilon(t,z) \varphi(z) \psi(t) dz dt \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_1(t,z) u_2(t,z) \varphi(z) \psi(t) dz dt,$$

y hasta ahora hemos probado

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_1^\varepsilon(t,z) u_2^\varepsilon(t,z) \varphi(z) \psi(t) dz dt \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} H_\varphi(x,y) \psi(t) d\omega(t,x) \otimes d\omega(t,y) dt,$$

por lo que queda ver que los miembros de la derecha coinciden. Al no ser u regular no podemos aplicar las mismas operaciones que antes. Hasta ahora hemos usado $\omega^\varepsilon(t,x)$ como la solución correspondiente al dato inicial regularizado. La idea ahora es regularizar directamente la solución $\omega(t,x) \in L^\infty([0,T], H^{-1})$. Definimos $\underline{\omega}^\varepsilon$ como

$$\underline{\omega}^\varepsilon(t,x) = \rho^\varepsilon * \omega(t),$$

donde ρ^ε es una aproximación a la identidad con $supp(\rho^\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$. Tenemos entonces que

$$\underline{\omega}^\varepsilon \to \omega \in H^{-1}$$

al fijar t, en casi todo t, por propiedades de aproximaciones de la identidad. Como ω^ε está uniformemente acotada en $Lip([0,T], H^{-L})$ para algún L, también lo está ω, ya que

$$\begin{aligned} &||\omega(t_1) - \omega(t_2)||_{H^{-L}} \\ &\qquad \leq ||\omega(t_1) - \omega^\varepsilon(t_1)||_{H^{-L}} + ||\omega(t_2) - \omega^\varepsilon(t_2)||_{H^{-L}} + ||\omega^\varepsilon(t_1) - \omega^\varepsilon(t_2)||_{H^{-L}}, \end{aligned}$$

y podemos aplicar la cota Lipschitz en el tercer término, mientras que los dos primeros son arbitrariamente pequeños.

La desigualdad de Young para convoluciones establece que dados α, β, γ tales que $1/\alpha + 1/\beta = 1 + 1/\gamma$, se tiene que $||f * g||_{L^\gamma} \leq ||f||_{L^\alpha} ||g||_{L^\beta}$. Como $||\rho^\varepsilon||_{L^1} = 1$ para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos la descomposición $\underline{\omega}^\varepsilon = \underline{\omega}'^\varepsilon + \underline{\omega}''^\varepsilon$ con las propiedades $\underline{\omega}'^\varepsilon \in L^\infty([0,T], RM)$, positiva, y $\underline{\omega}''^\varepsilon \in L^\infty([0,T], L^p)$. Esta regularización también hace que $\underline{\omega}^\varepsilon$ esté uniformemente acotada en $Lip([0,T], H^{-L})$, ya que

$$||\underline{\omega}^\varepsilon(t_1) - \underline{\omega}^\varepsilon(t_2)||_{H^{-L}} = \sup_{h \in H_0^L, ||h||=1} \langle \underline{\omega}^\varepsilon(t_1) - \underline{\omega}^\varepsilon(t_2), h \rangle,$$

y podemos reescribir, imponiendo que ρ^ε tenga simetría par,

$$\begin{aligned}\langle \underline{\omega}^\varepsilon(t_1) - \underline{\omega}^\varepsilon(t_2), h\rangle &= \langle \rho^\varepsilon * (\omega(t_1) - \omega(t_2)), h\rangle = \langle (\omega(t_1) - \omega(t_2)), \rho^\varepsilon * h\rangle \\ &\leq ||(\omega(t_1) - \omega(t_2))||_{H^{-L}} ||\rho^\varepsilon * h||_{H^L} \\ &\leq ||(\omega(t_1) - \omega(t_2))||_{H^{-L}} ||h||_{H^L},\end{aligned}$$

lo que concluye

$$||\underline{\omega}^\varepsilon(t_1) - \underline{\omega}^\varepsilon(t_2)||_{H^{-L}} \leq ||(\omega(t_1) - \omega(t_2))||_{H^{-L}} \leq C|t_1 - t_2|.$$

Las derivadas las podemos pasar al mollifier, que es regular, con lo que de $\underline{\omega}^\varepsilon = \nabla^\perp \underline{u}^\varepsilon$ se deduce $\underline{\omega}^\varepsilon(t,x) = \rho^\varepsilon * \omega(t) \iff \underline{u}^\varepsilon(t,x) = \rho^\varepsilon * u(t)$. Por tanto,

$$\underline{u}^\varepsilon \to u \in L^2_{loc}, \tag{2.15}$$

para cada t fijo. Para cada $\varphi \in C_c^\infty \hookrightarrow L^\infty$ se deduce de (2.15) que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \underline{u}_1^\varepsilon \underline{u}_2^\varepsilon \varphi(z) dz \to \int_{\mathbb{R}^2} u_1 u_2 \varphi(z),$$

por ser un operador continuo sobre L^2_{loc}. Por estar además $\underline{u}^\varepsilon$ uniformemente acotada en $L^\infty([0,T], L^2_{loc})$, y por tanto $\underline{u}_1^\varepsilon \underline{u}_2^\varepsilon$ uniformemente acotada en $L^\infty([0,T], L^1_{loc})$, para $\psi(t) \in C_c^\infty \hookrightarrow L^1$ podemos aplicar convergencia *-débil y deducir

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \underline{u}_1^\varepsilon(t,z) \underline{u}_2^\varepsilon(t,z) \varphi(z) \psi(t) dz dt \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_1(t,z) u_2(t,z) \varphi(z) \psi(t) dz dt.$$

Para las soluciones regulares sabemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \underline{u}_1^\varepsilon(t,z) \underline{u}_2^\varepsilon(t,z) \varphi(z) \psi(t) dz dt \\ &\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} H_\varphi(x,y) \underline{\omega}^\varepsilon(t,x) \underline{\omega}^\varepsilon(t,y) \psi(t) dx dy dt,\end{aligned}$$

y al satisfacer $\underline{\omega}^\varepsilon$ las mismas propiedades que usamos de ω^ε para probar la convergencia de (2.9), concluimos la prueba.

□

Observaciones

Aunque el dato considerado en este capítulo no es suficiente para garantizar convergencia en L^2_{loc} para la velocidad, sí garantiza que no hay concentración de la vorticidad en puntos, como hemos visto a lo largo de la prueba. Otros resultados garantizan la existencia de solución si u^ε satisfacen alguna condición adicional a las ecuaciones de

Euler. Por ejemplo, en el artículo [26] se prueba que es suficiente que ω se concentre en una curva $\gamma(t) \in C^{1/2}$. En el capítulo 4 veremos una condición alternativa relacionada con espacios de Hardy.

Como hemos comentado, la hipótesis de signo positivo solo es importante para demostrar que (2.12) tiende a 0, o en otras palabras, que la integral de la vorticidad en bolas de radio pequeño, es pequeña. En el ejemplo 1.1 hemos visto que esta condición no se cumple para cualquier aproximación de soluciones suaves. Cuando la vorticidad tiene signo y la velocidad está localmente en L^2, podemos probar la condición, y obtener el ratio de convergencia óptimo.

Proposición 2.10. *Sea $u(t)$ regular, acotada uniformemente (en tiempo) en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, con $\omega = \nabla^\perp \cdot u \geq 0$ en un entorno de x. Entonces, para $|x|$ acotado se tiene*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \int_{\{|z|\leq\delta\}} |\omega(t, x+z)|dz \leq C|\log(\delta)|^{-1/2}.$$

Demostración: Consideramos la función

$$\eta_\delta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq \delta \\ \dfrac{\log(\sqrt{\delta}/|x|)}{\log(1/\sqrt{\delta})} & si \quad \delta < |x| < \sqrt{\delta} \\ 0 & si \quad |x| \geq \delta \end{cases} \tag{2.16}$$

para $\delta < 1$. Esta función es continua y se anula lejos de 0. Gracias a que la vorticidad es positiva cerca de x, podemos acotar para δ pequeño

$$\begin{aligned} \int_{|z|\leq\delta} |\omega(t, x+z)|dz &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t, z)\eta_\delta(x-z)dz = \int_{B(x,\sqrt{\delta})} \omega(t, z)\eta_\delta(x-z)dz \\ &= -\int_{B(x,\sqrt{\delta})} u(t, z)\nabla^\perp\eta_\delta(x-z)dz \leq ||u||_{L^2(B(x,\sqrt{\delta}))}||\nabla\eta_\delta||_{L^2}, \end{aligned}$$

ya que el intervalo de integración es un conjunto acotado. Por hipótesis el primer factor se acota por una constante, por lo que es suficiente probar una cota logarítmica en el segundo. Derivando en la expresión (2.16), se concluye la prueba.

□

Este resultado se debe a [26]. En [23] hay un ejemplo que muestra que esta cota es óptima. Esto nos da una prueba alternativa a la proposición 2.7. La ventaja de esta prueba es que solo necesita que la vorticidad sea positiva localmente.

Además de considerar soluciones exactas para el dato inicial regularizado, hay otras técnicas muy estudiadas que conducen a pruebas alternativas al resultado de Delort. En [23] se prueba que el límite de soluciones a la ecuación de Navier Stokes converge a una de Euler para datos análogos a los considerados por Delort. Este método se

denomina *vanishing viscosity*. Otro tipo de técnicas son los denominados *vortex methods*, muy apropiados para el estudio numérico de la ecuación. Un resultado análogo al de Delort con estas técnicas se puede ver en [21]. En el trabajo reciente [4] se utilizan estas técnicas para obtener soluciones con propiedades físicas como la conservación de energía o la existencia de trayectorias.

A pesar de la variedad de resultados, todos necesitan la hipótesis de vorticidad positiva cuando ω es una medida finita en H^{-1}, o alguna simetría. En el siguiente capítulo veremos el primer resultado que permitió cambios de signo, aunque en condiciones especiales de simetría.

Capítulo 3

Vorticidad con simetría axial impar

En este capítulo vamos a seguir las ideas de [22] para probar un resultado análogo al del capítulo anterior, considerando ahora una vorticidad inicial con soporte compacto, que es positiva en el semiplano derecho, y simétrica impar respecto al eje vertical. Nuestro objetivo principal es probar una cota para la expresión (2.12), que es el único resultado que usa la hipótesis de signo. Comenzaremos por probar nuevas cotas para terminar con el teorema de existencia.

Definición 3.1. *Diremos que una medida μ es no negativa, simétrica impar o NMS (nonnegative mirror-symmetric) si la restricción de μ al semiplano $\{x_1 > 0\}$ es no negativa, y para cualquier $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^2)$ par respecto a $x_1 = 0$ se tiene $\langle \mu, \varphi \rangle = 0$.*

Cuando consideramos vorticidades sin signo fijo, al evolucionar con las ecuaciones de Euler se forman figuras de gran complejidad. Algunos ejemplos obtenidos con métodos numéricos pueden verse en [23]. Una propiedad clave para un dato NMS es que mantiene la propiedad de ser NMS al evolucionar con las ecuaciones de Euler, lo que nos permite controlar dónde se produce el cambio de signo. Además, una vorticidad NMS con soporte compacto da lugar a una velocidad en $L^2(\mathbb{R}^2)$, ya que por simetría la media de la vorticidad es nula. Será habitual considerar a la vez x y su simétrico respecto al eje $x_1 = 0$, por lo que usaremos la notación $x^* = (-x_1, x_2)$. Para probar que la propiedad NMS se conserva usaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ para algún $1 < p < 2$. Entonces $K_2 * f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^2)$, donde $p^* = 2p/(2-p)$.*

Demostración: La teoría utilizada en esta prueba puede verse con detalle en [28]. Consideramos el potencial de Riesz de primer orden I_1. Entonces su transformada de Fourier aplicada a una función f es

$$\widehat{I_1 f}(\xi) = |2\pi\xi|^{-1} \hat{f}(\xi).$$

Consideramos también las transformadas de Riesz R_1, R_2. Sus transformadas de Fourier satisfacen

$$\widehat{R_j f}(\xi) = i\frac{\xi_j \hat{f}(\xi)}{|\xi|},$$

donde i es la unidad imaginaria. Como sus transformadas de Fourier coinciden, tenemos la relación

$$I_1 R^{\perp} f = K_2 * f.$$

Dado $1 < q < \infty$, la transformada de Riesz es acotada de $L^q \to L^q$. Por el teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, el potencial de Riesz es una aplicación continua de $L^p \to L^{p^*}$. Se concluye que

$$||K_2 * f||_{L^{p^*}} = ||I_1 R^{\perp} f||_{L^{p^*}} \leq C||R^{\perp} f||_{L^p} \leq C||f||_{L^p}.$$

□

Proposición 3.2. *Sea $\omega(t,x)$ la solución a las ecuaciones de Euler con dato inicial $\omega_0 \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, que es NMS. Entonces $\omega(t,x)$ es NMS para cualquier $t \geq 0$.*

Demostración: Definimos la función

$$\overline{\omega}(t,x) := \omega(t,x) + \omega(t,x^*).$$

Entonces, por hipótesis $\overline{\omega}(0,x) \equiv 0$. Será suficiente probar que su norma L^2 no crece con el tiempo. Como ω satisface (1.5), se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_t \overline{\omega}(t,x) + u(t,x)\cdot\nabla\overline{\omega}(t,x) =& \partial_t\omega(t,x) + \partial_t\omega(t,x^*) + u(t,x)\cdot\nabla\overline{\omega}(t,x)\\ =& -u(t,x)\cdot\nabla\omega(t,x) - u(t,x^*)\nabla(\omega(t,x^*))\\ &+ u(t,x)\cdot\nabla(\omega(t,x)) + u(t,x)\cdot\nabla(\omega(t,x^*))\\ =& -u(t,x^*)\nabla(\omega(t,x^*)) + u(t,x)\cdot\nabla(\omega(t,x^*)).\end{aligned}$$

Utilizando la ley de Biot y Savart (1.2), se tiene que $u(t,x^*) = -(K_2 * \omega)(t,x^*)$, por lo que

$$\partial_t\overline{\omega}(t,x) + u(t,x)\cdot\nabla\overline{\omega}(t,x) = (K_2 * \overline{\omega})(t,x)\cdot\nabla(\omega(t,x^*)).$$

Multiplicando por $2\overline{\omega}$, integrando en $\mathbb{R}^2$ y utilizando la desigualdad de Hölder para cualquier $p > 2$,

$$\frac{d}{dt}||\overline{\omega}||_{L^2}^2 \leq ||\overline{\omega}||_{L^2}||K_2 * \overline{\omega}||_{L^{2p/p-2}}||\nabla\omega||_{L^p}.$$

Como $2p/(2-p) = (p')^*$ para $1 < p' = p/(p-1) < 2$, podemos aplicar la proposición 3.1 y obtener $||K_2 * \overline{\omega}||_{L^{2p/p-2}} \leq C_p||\overline{\omega}||_{L^{p'}} \leq C||\overline{\omega}||_{L^2}$, ya que el soporte de ω es compacto para $0 < t < T$ (ver teorema 1.4).

Utilizando la desigualdad de Gronwall, obtenemos que $\overline{\omega}(t,x) \equiv 0$, lo que implica que ω es impar respecto a $x_1 = 0$. Queda ver que el semiplano $x_1 > 0$ mantiene el signo constante.

Por la ley de Biot y Savart, la simetría respecto a $x_1 = 0$ implica que en los puntos $(0, x_2)$ se tiene que $u_1 = 0$. Al ser el plano $x_1 > 0$ invariante con las trayectorias, se mantiene la no negatividad, y por tanto la propiedad NMS.

□

Esta propiedad es crucial, ya que antes vimos que si la vorticidad es localmente positiva, no se concentra. Solo necesitamos probar que no se concentra cerca del eje $x_1 = 0$, que es donde hay cambio de signo.

Lema 3.3. *Sea ω_0 una función regular con soporte compacto y NMS. Sea $u = (u_1, u_2)$ y ω la solución a las ecuaciones de euler con dato inicial en vorticidad ω_0. Entonces para cualquier función φ regular con derivadas acotadas hasta segundo orden en el semiplano $x_1 > 0$, tenemos*

$$\frac{d}{dt}\int_{\{x_1>0\}} \varphi(x)\omega(t,x)dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u_2)^2(0,x_2,t)\partial_{x_2}\varphi(0,x_2)dx_2 + \int_{\{x_1>0\}}(u_1^2-u_2^2)\partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi - u_1u_2(\partial_{x_1}\partial_{x_1}\varphi-\partial_{x_2}\partial_{x_2}\varphi)dx.$$

Demostración: Derivando el miembro de la izquierda e integrando por partes,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\{x_1>0\}}\varphi(x)\omega(t,x)dx &= -\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\nabla\cdot(u\omega)dx_2dx_1 \\ &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot\nabla\varphi\omega dx_2dx_1 - \lim_{R\to\infty}\int_{\{|x|=R,x_1\geq 0\}}\varphi\omega u\cdot\hat{n}dS,\end{aligned}$$

donde el término de frontera se anula en $|x| = R$ por el soporte compacto de ω, y también en $x_1 = 0$ porque $u_1 = 0$, y la normal $\hat{n} = (-1, 0)$. Utilizando ahora que $\omega = \nabla^\perp \cdot u = -\nabla \cdot u^\perp$, e integrando por partes,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot\nabla\varphi\omega dx_2dx_1 \\ &\quad= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\nabla(u\cdot\nabla\varphi)\cdot u^\perp dx_2dx_1 - \lim_{R\to\infty}\int_{\{|x|=R,x_1\geq 0\}}(u\cdot\nabla\varphi)u^\perp\cdot\hat{n}dS \\ &\quad= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\nabla(u\cdot\nabla\varphi)\cdot u^\perp dx_2dx_1 - \int_{\{x_1=0\}}(u\cdot\nabla\varphi)u^\perp\cdot(-1,0)dS.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Utilizando de nuevo que en $x_1 = 0$ tenemos $u_1 = 0$, el segundo sumando de (3.1) es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_2)^2(0,x_2,t)\partial_{x_2}\varphi(0,x_2)dx_2.$$

Desarrollando las derivadas del primer término, y utilizando que $\partial_{x_1} u_1 = -\partial_{x_2} u_2$, el primer sumando se reescribe como

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} \right) \cdot \nabla^\perp \varphi + (u_1^2 - u_2^2) \partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi - u_1 u_2 (\partial_{x_1} \partial_{x_1} \varphi - \partial_{x_2} \partial_{x_2} \varphi) dx_2 dx_1.$$

Para probar el lema solo falta ver que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} \right) \cdot \nabla^\perp \varphi dx_2 dx_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (u_2)^2(0, x_2, t) \partial_{x_2} \varphi(0, x_2) dx_2.$$

Integrando por partes el miembro de la izquierda, ya que $-\partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi + \partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi = 0$, solo queda el término de frontera, que no es otro que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\{|x|=R, x_1 \geq 0\}} \frac{|u|^2}{2} \nabla^\perp \varphi \cdot \hat{n} dS.$$

En (1.3) vimos que al tener ω soporte compacto e integral nula, $|u|^2 = \mathcal{O}(|x|^{-4})$, por lo que la integral anterior se anula en $|x| = \infty$, quedando

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\{|x|=R, x_1 \geq 0\}} \frac{|u|^2}{2} \nabla^\perp \varphi \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (u_2)^2(0, x_2, t) \partial_{x_2} \varphi(0, x_2) dx_2.$$

□

Corolario 3.4. *En las condiciones del lema anterior, existe una constante C dependiente de ω_0, u_0, T, L tal que*

$$\int_0^T \int_{-L}^L |u_2(0, x_2, t)|^2 dx_2 dt \leq C.$$

Demostración: Vamos a aplicar el lema anterior con $\varphi = \arctan(x_2)$. Integrando en tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\{x_1>0\}} \arctan(x_2)(\omega(T, x) - \omega(0, x)) dx \\ = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{-\infty}^\infty \frac{(u_2)^2(0, x_2, t)}{1 + (x_2)^2} dx_2 dt - \int_0^T \int_{\{x_1>0\}} \frac{2 x_2 u_1 u_2}{(1 + (x_2)^2)^4} dx dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Podemos acotar la expresión del corolario por

$$\int_0^T \int_{-L}^L |u_2(0, x_2, t)|^2 dx_2 dt \leq (1 + L^2) \int_0^T \int_{-L}^L \frac{(u_2)^2(0, x_2, t)}{1 + (x_2)^2} dx_2 dt.$$

Al ser el integrando positivo, podemos extender la integral, resultando

$$\int_0^T \int_{-L}^{L} |u_2(0,x_2,t)|^2 dx_2 dt \leq C \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u_2)^2(0,x_2,t)}{1+(x_2)^2} dx_2 dt.$$

Usando ahora (3.2), y que $|\arctan(x_2)| \leq \pi/2$, y $|x_2|/(1+x^2)^4 \leq 1$, tenemos

$$\int_0^T \int_{-L}^{L} |u_2(0,x_2,t)|^2 dx_2 dt \leq C\left[\int_{\{x_1>0\}} |\omega(T,x)| + |\omega(0,x)| + \int_0^T \int_{\{x_1>0\}} |u_1 u_2| dx dt\right],$$

que está acotado por ser $\omega \in L^\infty([0,T],L^1)$ y $u \in L^\infty([0,T],L^2)$ (ver teorema 1.4). □

Finalmente, usando esta cota podemos controlar la integral de ω en bolas de radio pequeño, en un punto de la frontera $x_1 = 0$.

Proposición 3.5. *Sean u, ω las soluciones correspondientes a la ecuación de Euler con dato inicial ω_0 regular, NMS de soporte compacto. Dado $x_0 = (0,a) \in \mathbb{R}^2$, y L, δ tales que $(a-\delta, a+\delta) \subset (-L, L)$, se tiene que*

$$\int_{B(x_0,\delta)} |\omega(y,t)| dy \leq C\sqrt{\delta} \left(\int_{-L}^{L} |u_2(0,x_2,t)|^2 dx_2\right)^{1/2},$$

donde C es una constante universal.

Demostración: Por la ley de Biot y Savart (1.2)

$$u_2(0,x_2,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y_1}{2\pi(y_1^2+(x_2-y_2)^2)} \omega(y,t) dy_2 dy_1,$$

y usando la simetría del integrando respecto a y_1,

$$u_2(0,x_2,t) = -\int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1}{\pi(y_1^2+(x_2-y_2)^2)} \omega(y,t) dy_2 dy_1,$$

donde el integrando es positivo en el dominio de integración. Integrando respecto a x_2,

$$\begin{aligned}\int_{a-\delta}^{a+\delta} |u_2(0,x_2,t)| dx_2 &= \int_{a-\delta}^{a+\delta} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1}{\pi(y_1^2+(x_2-y_2)^2)} \omega(y,t) dy_2 dy_1 dx_2 \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(y,t)}{\pi} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{y_1}{(y_1^2+(x_2-y_2)^2)} dx_2 dy_2 dy_1.\end{aligned}$$

El último integrando tiene como primitiva $\arctan \frac{x_2-y_2}{y_1}$. Por ser la función $\arctan$ monótona, podemos estimar

$$g(y_1,y_2) := \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{y_1 dx_2}{y_1^2+(x_2-y_2)^2} = \arctan\left(\frac{a+\delta-y_2}{y_1}\right) - \arctan\left(\frac{a-\delta-y_2}{y_1}\right) \geq 0,$$

con lo que acotamos, utilizando que ω también es positivo en $y_1 > 0$,

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} |u_2(0,x_2,t)|dx_2 \geq \int_{\{y_1>0, |y-x_0|<\delta\}} \omega(y,t)\frac{g(y)}{\pi} dy. \tag{3.3}$$

Para poder acotar la integral de ω necesitamos una cota inferior para g. Esto es posible gracias a la restricción del intervalo de integración. g se puede escribir como $g(y) = \arctan(z+h) - \arctan(z-h)$ para $z = (a-y_2)/y_1$, $h = \delta/y_1$. En el entorno $|y-x_0| < \delta$ se cumple trivialmente $h > 1, |z| < h$. Por otro lado,

$$\int_{z-h}^{z+h} (1+x^2)^{-1} dx \geq \int_0^{2h} (1+x^2)^{-1} dx,$$

ya que la amplitud del intervalo de integración es la misma, y el integrando es mayor cuanto más cerca está de 0. Esto implica que $g(y) = \arctan(z+h) - \arctan(z-h) \geq \arctan(2h) \geq \arctan(2)$, ya que $h > 1$. Introduciendo esto en (3.3),

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} |u_2(0,x_2,t)|dx_2 \geq \frac{\arctan(2)}{\pi} \int_{\{y_1>0, |y-x_0|<\delta\}} \omega(y,t)dy = C \int_{B(x_0,\delta)} |\omega(y,t)|dy. \tag{3.4}$$

Utilizando Cauchy-Schwartz, y $(a-\delta, a+\delta) \subset (-L, L)$, el miembro izquierdo se acota por

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} |u_2(0,x_2,t)|dx_2 \leq (2\delta)^{1/2} \left(\int_{-L}^{L} |u_2(0,x_2,t)|^2 dx_2 \right)^{1/2}.$$

□

Este resultado, junto al corolario 3.4, nos dice que la integral de ω en bolas centradas en el eje de separación decrece, al menos, como $\sqrt{R}$. Combinando este resultado con el decaimiento de la proposición 2.10, probaremos el teorema de existencia para datos NMS.

Teorema 3.6 (Lopes Filho, Nussenzveig Lopes & Zhouping Xin, 2001. [22])**.** *Sea $T > 0$, y sea $\omega_0 \in RM(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto, NMS. Entonces existe una solución a las ecuaciones de Euler* (1.7) *con dato inicial $u = \nabla^\perp \omega_0$.*

Demostración: La idea es, al igual que en la demostración de Delort, solucionar la ecuación para el dato regularizado y pasar al límite. Para conservar la propiedad NMS del dato inicial, elegimos un mollifier $\widetilde{\rho}(r) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ que tenga simetría par, y sea

monótono decreciente a partir del 0. Definimos $\rho^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\widetilde{\rho}(\varepsilon|x|)$. La simetría radial implica que $\omega_0^\varepsilon = \rho^\varepsilon * \omega_0$ es simétrico respecto al eje $x_1 = 0$. La monotonía implica que ω_0^ε es positivo en $x_1 > 0$. Por tanto, ω_0^ε es NMS con soporte compacto para cada $\varepsilon > 0$. Estamos en las hipótesis del teorema 1.4, al que añadimos la propiedad NMS por la elección del mollifier, que es libre en el teorema.

Podemos seguir exactamente los mismos pasos que en la prueba del teorema 2.3, hasta la proposición 2.7. En este caso no conseguimos una cota tomando supremo en tiempo como en (2.12), pero sí podemos acotar para $x, y \in K$ un compacto de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\{|x-y|<\delta, x\in K\}} |\omega^\varepsilon(t,x)||\omega^\varepsilon(t,y)|dxdydt \\ &\leq \int_0^T \left(\sup_{x\in K}\int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(t,y)|dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\omega^\varepsilon(t,x)|dx\right)dt \\ &\leq ||\omega^\varepsilon||_{L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^2))}\int_0^T \left(\sup_{x\in K}\int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(t,y)|dy\right)dt \\ &\leq ||\omega_0||_{RM}\int_0^T \left(\sup_{x\in K}\int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(t,y)|dy\right)dt,\end{aligned}$$

ya que el integrando es positivo y hemos extendido el intervalo de integración. Tenemos que probar que el segundo factor tiende a 0 con δ. Fijamos un $0 < \delta < 1$, y distinguimos dos casos:

Si $x = (b, c)$ con $|b| > \sqrt{\delta}$, entonces $B(x, \sqrt{\delta}) \subset \{x_1 > 0\} \cup \{x_1 < 0\}$, por lo que ω^ε tiene signo constante en la bola, y podemos aplicar la proposición 2.10, obteniendo

$$\int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(y,t)|dy \leq C|\log(\delta)|^{-1/2},$$

y al ser la cota independiente de t, al integrar obtenemos un factor T que no afecta al decaimiento.

Si ahora $x = (b, c)$ con $|b| \leq \sqrt{\delta}$, entonces $B(x, \delta) \subset B((0, c), 2\sqrt{\delta})$, ya que $\delta < 1$. Como $x \in K$ compacto, podemos encontrar un $R > 0$ tal que $(c - 2\sqrt{\delta}, c + 2\sqrt{\delta}) \subset (-R, R)$. Aplicando la proposición 3.5 concluimos

$$\int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(y,t)|dy \leq \int_{B((0,c),2\sqrt{\delta})} |\omega^\varepsilon(y,t)|dy \leq C\sqrt[4]{\delta}\left(\int_{-R}^R |u_2^\varepsilon(0,x_2,t)|^2 dx_2\right)^{1/2}.$$

Utilizando la cota $\sqrt{x} \leq x + 1$ (para $x > 0$), obtenemos

$$\int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(y,t)|dy \leq C\sqrt[4]{\delta}\left(\int_{-R}^R |u_2^\varepsilon(0,x_2,t)|^2 dx_2\right) + C\sqrt[4]{\delta},$$

y al integrar en tiempo, gracias al corolario 3.4 concluimos

$$\int_0^T \int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(y,t)|dy \leq C\sqrt[4]{\delta}.$$

Como las cotas que hemos obtenido no dependen del punto x, y ambas tienden a 0 con δ, queda probado que ω no se acumula en puntos. El resto de la demostración sigue exactamente los mismos pasos que en 2.3, por lo que concluimos la prueba.

□

Nota 3.1. *Al estudiar los términos no lineales, justificamos que era suficiente estudiar uno de ellos por la simetría de rotación de las ecuaciones de Euler. Sin embargo, el dato considerado ya tiene una simetría fijada, por lo que en este caso no son equivalentes. No necesitamos repetir la prueba porque hemos probado que la vorticidad no se acumula en el eje de simetría, lo cual es independiente de la dirección del eje. El resto de resultados no necesitan la hipótesis de signo.*

Nota 3.2. *Este resultado se puede generalizar a vorticidades con simetría impar respecto a n ejes que se corten en el origen con simetría de rotación.*

Las cotas que hemos utilizado en la prueba del teorema 3.6 hacen uso continuo de la propiedad NMS, que se preserva en el tiempo. Podemos generalizar el resultado añadiendo perturbaciones que mantengan la simetría impar, aunque tengan signo arbitrario en un semiplano. Este es un resultado del mismo artículo [22].

Teorema 3.7 (Extensión al teorema 3.6)**.** *Sea $T > 0$, y sea $\omega_0' \in RM(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto, NMS, y $\omega_0'' \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto, simétrica impar respecto a x_1. Entonces existe una solución a las ecuaciones de Euler* (1.7) *con vorticidad inicial $\omega_0 = \omega_0' + \omega_0''$.*

Demostración: Es análoga al teorema 3.6, pero utilizando únicamente la simetría impar en vez de NMS. De la proposición 3.2 podemos probar igualmente que se preserva la simetría impar. La ley de Biot y Savart implica de nuevo que $u_1 = 0$ en el eje $x_1 = 0$, que es lo único que necesitamos para probar el lema 3.3. La simetría impar es un factor clave porque implica que $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$, y por tanto $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, con lo que probamos igualmente el corolario 3.4.

La proposición 3.5 deja de ser válida, por lo que para probar el teorema, siguiendo los argumentos del teorema 3.6, tenemos que demostrar

$$\int_0^T \left(\sup_{x \in K} \int_{B(x,\delta)} |\omega^\varepsilon(t,y)|dy \right) dt \to_{\delta \to 0} 0.$$

Si definimos de nuevo la regularización del dato inicial y resolvemos, gracias a las trayectorias podemos denotar

$$\omega^\varepsilon(t,x) = \omega'^\varepsilon(t,x) + \omega''^\varepsilon(t,x),$$

manteniendo la descomposición del enunciado. Descomponemos también la velocidad $u^\varepsilon = u'^\varepsilon + u''^\varepsilon$, siendo cada u^ε la convolución de su ω^ε con K_2 (ley de Biot y Savart). Sabemos que $||u_0^\varepsilon||_{L^2}, ||u_0'^\varepsilon||_{L^2}, ||u_0''^\varepsilon||_{L^2} \leq C$. También sabemos (teorema 1.4) que $||u^\varepsilon||_{L^2} \leq C(T)$, y se puede probar también para $u'^\varepsilon, u''^\varepsilon$.

Por la simetría hemos visto que $u_1 = 0$ en la frontera, por lo que los semiplanos siguen siendo invariantes. Esto implica que $\omega'^\varepsilon(t,x)$ sigue siendo positiva en el semiplano $x_1 > 0$. Distinguimos de nuevo dos casos, en función de si x está cerca del eje de simetría.

Para $x = (b,c) \in K$ con $|b| > \sqrt{\delta}$, como ω' es positiva en la bola $B(x,\sqrt{\delta})$ y $u'(t)$ está en $L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))$, podemos aplicar el argumento de la proposición 2.10 y estimar

$$\int_{B(x,\delta)} |\omega'^\varepsilon(t,y)|dy \to_{\delta\to 0} 0,$$

de forma uniforme en x. Por ser ω'' una transformación de ω_0'' con jacobiano unidad, al ser una función en L^1 uniformemente integrable se concluye

$$\int_{B(x,\delta)} |\omega''^\varepsilon(t,y)|dy \to_{\delta\to 0} 0,$$

y usando ahora $|\omega| \leq |\omega'| + |\omega''|$, al ser las cotas independientes de t, x, al integrar concluimos el resultado para este caso.

Para $x = (b,c)$ con $|b| \leq \sqrt{\delta}$, usaremos de nuevo $B(x,\delta) \subset B((0,c), 2\sqrt{\delta})$, y acotaremos la integral de la vorticidad en esta segunda bola. Por ser ω' de signo definido en cada semiplano, la estimación (3.4) sigue siendo válida, es decir,

$$\int_{B((0,c),2\sqrt{\delta})} |\omega'^\varepsilon(y,t)|dy \leq C \int_{c-2\sqrt{\delta}}^{c+2\sqrt{\delta}} |u_2'^\varepsilon(0,x_2,t)|dx_2,$$

para $x_0 = (0,c)$. Como ω'' es uniformemente integrable, para concluir la prueba es suficiente probar que (nótese que $\delta \to 0 \iff \sqrt{\delta} \to 0$)

$$\int_0^T \int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2'^\varepsilon(0,x_2,t)|dx_2 \to_{\delta\to 0} 0.$$

Podemos acotar

$$\int_0^T \int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2'^\varepsilon(0,x_2,t)|dx_2 \leq \int_0^T \int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2^\varepsilon(0,x_2,t)|dx_2 + \int_0^T \int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2''^\varepsilon(0,x_2,t)|dx_2, \tag{3.5}$$

donde el primer sumando se acota usando Cauchy-Schwartz y el corolario 3.4 por

$$\int_0^T \int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2^\varepsilon(0,x_2,t)|dx_2 \leq T\sqrt{2\delta} \int_0^T \int_{-R}^{R} |u_2^\varepsilon(0,x_2,t)|^2 dx_2 \leq C\sqrt{\delta} \to 0.$$

Solo queda probar que el segundo sumando de (3.5) tiende a 0 con δ. En la proposición 3.5 vimos la identidad

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2''^{\varepsilon}(0,x_2,t)|dx_2 = \int_{y_1\geq 0} \omega''^{\varepsilon}(y)\frac{g(y)}{\pi},$$

que sigue siendo válida por usar solo Biot y Savart y la simetría, que es mantenida por las trayectorias. Ahora no conocemos el signo de ω, pero podemos acotar

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2''^{\varepsilon}(0,x_2,t)|dx_2 \leq \int_{y_1\geq 0} |\omega''^{\varepsilon}(y)|\frac{g(y)}{\pi}.$$

Vamos a probar que el término de la derecha tiende a 0 con δ, concluyendo la prueba. Para ello, dividimos la integral en las regiones

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{y_1 \geq 1\},\\
\Omega_2 &= \{0 \leq y_1 \leq 1, |y_2| \geq M\},\\
\Omega_3 &= \{0 \leq y_1 \leq h, |y_2| \leq M\},\\
\Omega_4 &= \{h \leq y_1 \leq 1, |y_2| \leq M\},
\end{aligned}$$

con $h \leq 1, M \geq R$ (radio de la bola que contiene el compacto donde movemos x). Como $g(y) = \arctan\frac{c+\delta-y_2}{y_1} - \arctan\frac{c-\delta-y_2}{y_1}$, por el teorema del valor medio y ser $1/(1+x^2) \leq 1$, $g(y) \leq 2\delta/y_1 \leq 2\delta$ en Ω_1. Como $\omega''^{\varepsilon} \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^2))$ de forma uniforme en ε, la integral en Ω_1 se acota directamente por $C\delta$.

Para la integral en Ω_2, vemos que cuando $M \to \infty$, por ser c, δ, y_1 acotados, $g(y) \to \arctan(-\infty) - \arctan(-\infty) = 0$. Utilizando de nuevo la cota uniforme en ε, t de $||\omega''^{\varepsilon}||_{L^1}$, concluimos

$$\int_{\Omega_3} |\omega''^{\varepsilon}(y)|g(y)/\pi \leq C \sup_{y\in\Omega_3} g(y),$$

que tenderá a 0 si $M \to \infty$.

Para cada M fijo, la medida de Ω_3 es $|\Omega_3| = hM$. Por ser ω''^{ε} uniformemente integrable, y g acotado, la integral en Ω_3 tiende a 0 si $hM \to 0$.

Queda probar que la integral en Ω_4 tiende a 0 de forma compatible con las condiciones anteriores. Todavía podemos decidir cómo tiende $\delta \to 0$ con h, M. De nuevo el teorema del valor medio implica $g(y) \leq 2\delta/y_1 \leq 2\delta/h$ en Ω_4, por lo que es suficiente elegir $\delta = h^2$. Utilizando de nuevo la cota de $||\omega''^{\varepsilon}||_{L^1}$, hemos probado que para cada δ, eligiendo h, M del orden apropiado, al tomar $\delta \to 0$ tenemos

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |u_2''^{\varepsilon}(0,x_2,t)|dx_2 \to 0,$$

por tanto también la integral entre $(0,T)$, lo que concluye la prueba.

□

Capítulo 4

Prueba alternativa. Simetría radial.

Hasta ahora hemos estudiado la existencia de solución mediante un análisis directo de los términos no lineales, probando que no existe concentración de vorticidad y utilizando esto para pasar al límite. Ahora vamos a dar un enfoque distinto para llegar a un resultado análogo al obtenido por Delort: Si la vorticidad inicial es positiva, existe solución a las ecuaciones de Euler. Para ello, vamos a ver que los términos no lineales están acotados en un espacio de Hardy, y probar que esto implica que convergen como distribución. Vamos a seguir las ideas de [10]. Otro artículo similar que utiliza más propiedades de los espacios de Hardy es [27].

Asumiremos varios resultados teóricos bien conocidos, pero avanzados, para centrarnos en ver la aplicación a las ecuaciones de Euler. Fijamos una función $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, positiva, regular, con soporte en la bola unidad e integral 1. Definimos para cada función $f \in L^1$ el operador

$$f^*(x) \equiv \sup_{0<r<\infty} \left| \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\eta\left(\frac{x-y}{r}\right) dy \right|.$$

Definimos el espacio de Hardy

$$\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^2) \equiv \{f \in L^1(\mathbb{R}^2) | f^* \in L^1(\mathbb{R}^2)\}.$$

Esta definición no depende de la elección de η [12]. Vamos a trabajar con una versión local de este espacio de Hardy. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, definimos el operador

$$f^{**}(x) \equiv \sup_{0<r\leq 1} \left| \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\eta\left(\frac{x-y}{r}\right) dy \right|,$$

y el espacio de Hardy local

$$\mathscr{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^2) \equiv \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2) | f^{**} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)\}.$$

Por último, trabajaremos también con el espacio

$$h^1(\mathbb{R}^2) \equiv \{f \in L^1(\mathbb{R}^2) | f^{**} \in L^1(\mathbb{R}^2)\},$$

con norma $||f||_{h^1(\mathbb{R}^2)} \equiv ||f^{**}||_{L^1(\mathbb{R}^2)}$.

4.1. Acotación de términos no lineales

A continuación vamos a demostrar el teorema que nos permitirá acotar fácilmente los términos no lineales. Nos ayudaremos de algunos lemas.

Lema 4.1. *Sea $f \in \mathscr{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, con $supp(\phi) \subset B(0,R)$. Entonces*

$$\phi f \in h^1(\mathbb{R}^2), \quad ||\phi f||_{h^1(\mathbb{R}^2)} \leq C||f^{**}||_{L^1(B(0,R+2))},$$

para una constante C que solo depende de ϕ y R.

Demostración: Por definición,

$$(\phi f)^{**} = \sup_{0<r\leq 1} \left| \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(y) f(y) \eta\left(\frac{x-y}{r}\right) dy \right|.$$

Para que no se anule, $|x-y| < r < 1$ tiene que ser compatible con $|y| < R$, por lo que se anula si $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, R+1)$. Para $x \in B(0,R+1)$, usando $\phi(y) = \phi(y) \pm \phi(x)$ acotamos

$$(\phi f)^{**}(x) \leq |\phi(x)| f^{**}(x) + \sup_{0<r\leq 1} \left| \frac{1}{r^2} \int_{B(x,r)} (\phi(y)-\phi(x)) f(y) \eta\left(\frac{x-y}{r}\right) dy \right|.$$

Utilizando que ϕ es C_c^∞ y en particular Lipschitz, existe una constante tal que $|\phi(y) - \phi(x)| \leq C|x-y| \leq Cr$. Utilizando que ϕ, η son acotadas, concluimos

$$(\phi f)^{**}(x) \leq C \left(f^{**}(x) + \sup_{0<r\leq 1} \frac{1}{r} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \right). \tag{4.1}$$

Definiendo $\widetilde{f}$ como f si $x \in B(0,R+2)$ y 0 fuera de la bola, y efectuando el cambio $z = y - x$, el segundo sumando se acota para $0 < r \leq 1$

$$\frac{1}{r} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq \frac{1}{r} \int_{B(0,r)} |\widetilde{f}(z+x)| dz \leq \int_{B(0,1)} |\widetilde{f}(z+x)| \frac{1}{|z|} dz \equiv g(x).$$

Como $1/|z|$ es integrable en el origen, tomando norma L^1 e intercambiando el orden de integración concluimos

$$||g||_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C||f||_{L^1(B(0,R+2))}.$$

Podemos concluir por definición de norma en h^1 y usando (4.1)

$$\begin{aligned} ||\phi f||_{h^1(\mathbb{R}^2)} = ||(\phi f)^{**}||_{L^1(B(0,R+1)} &\leq C||f^{**}||_{L^1(B(0,R+1)} + C||f||_{L^1(B(0,R+2))} \\ &\leq C||f^{**}||_{L^1(B(0,R+2))}, \end{aligned}$$

ya que $|f| \leq f^{**}$ en casi todo, por el teorema de diferenciación de Lebesgue.

□

Lema 4.2. *La función $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$B(y,z) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \frac{x_2 - z_2}{|x-z|^2} \eta(x) dx$$

se acota para $y \neq z$ por $B \leq C(1+|y|)^{-1}(1+|z|)^{-1}$, para C una constante dependiente solo de η.

Demostración: La prueba consiste en cálculos sobre integrales singulares semejantes a los realizados en la proposición 2.1. Vamos a distinguir varios casos.

Supongamos $|y| \geq 2$. Como el soporte de η está contenido en la bola unidad, podemos suponer $|x| < 1$. Usando $|x_i|/|x| \leq 1$ y que η es acotada, tenemos que

$$B \leq C \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x-z||x-y|} dx.$$

Como $|y| > 2, |x| < 1$, se tiene que $1 + |y| \leq 3|y - x|$. Si $|z| > 2$, el mismo razonamiento concluye este caso. Si no,

$$B \leq \frac{C}{(1+|y|)(1+|z|)} \int_{B(0,1)} \frac{1+|z|}{|x-z|} dx \leq \frac{C}{(1+|y|)(1+|z|)} \int_{B(0,1)} \frac{3}{|x|} dx,$$

y como $1/|x|$ es integrable en el origen, concluimos el caso. El caso $|z| \geq 2, |y| < 2$ es análogo.

Supongamos ahora que $|y|, |z| < 2$. En este caso es suficiente mostrar que B es acotado, ya que $1 \leq 1 + |y| \leq 3$. Podemos separar en dos integrales

$$\begin{aligned} B &= \eta(y) \int_{B(0,2)} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \frac{x_2 - z_2}{|x-z|^2} dx + \int_{B(0,2)} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \frac{x_2 - z_2}{|x-z|^2} (\eta(x) - \eta(y)) dx \\ &= B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Nótese que hemos extendido el intervalo de integración, pero en la extensión se anula $\eta(x)$, por lo que hemos sumado 0. Por ser $\eta \in C_c^\infty$, se tiene que $|\eta(x) - \eta(y)| \leq |x - y|C$. Esto permite acotar B_2 por

$$\begin{aligned} |B_2| \leq \int_{B(0,2)} \frac{(1+|y|)(1+|z|)}{|x-z|(1+|y|)(1+|z|)} &\leq \frac{3^2}{(1+|y|)(1+|z|)} \int_{B(0,2)} 1/|x| dx \\ &\leq \frac{C}{(1+|y|)(1+|z|)}. \end{aligned}$$

Para acotar B_1, consideramos dos subcasos. Si $|y - z| \leq (2 - |y|)/2$, separamos en tres integrables

$$\begin{aligned} B_1 =&\eta(y)\int_{B(y,2|y-z|)} \frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\frac{x_2-z_2}{|x-z|^2}dx \\ &+\eta(y)\int_{B(y,2-|y|)\setminus B(y,2|y-z|)} \frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\frac{x_2-z_2}{|x-z|^2}dx \\ &+\eta(y)\int_{B(0,2)\setminus B(y,2-|y|)} \frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\frac{x_2-z_2}{|x-z|^2}dx = D_1+D_2+D_3. \end{aligned}$$

Para D_1, por ser η acotado tenemos

$$|D_1| \leq C\int_{B(y,2|y-z|)} \frac{1}{|x-y|}\frac{1}{|x-z|}dx = C\int_{B(0,2)} \frac{1}{|x'|}\frac{1}{|x'-v|}dx',$$

donde hemos hecho el cambio de variable $x' \rightleftarrows (x-y)/|y-z|$, y $v \rightleftarrows (z-y)/|z-y|$. Gracias a que v tiene módulo uno la última integral es acotada y, por simetría, independiente de y, z.

Para D_2, hacemos el cambio de variable $x' \rightleftarrows x-y$ y denotamos $w = z-y$, quedando

$$\begin{aligned} D_2 &= \eta(y)\int_{B(0,2-|y|)\setminus B(0,2|w|)} \frac{x_1'}{|x'|^2}\frac{x_2'-w_2}{|x'-w|^2}dx \\ &= \eta(y)\int_{B(0,2-|y|)\setminus B(0,2|w|)} \frac{x_1'}{|x'|^2}\left(\frac{x_2'-w_2}{|x'-w|^2}-\frac{x_2'}{|x'|^2}\right)dx', \end{aligned}$$

ya que por simetría hemos añadido 0. Como x está lejos del origen, la función $x_2/|x|^2$ es derivable, y podemos acotar sus parciales por $C/|x|^2$. Por el teorema del valor medio, acotamos

$$\left|\frac{x_2'-w_2}{|x'-w|^2}-\frac{x_2'}{|x'|^2}\right| \leq C\frac{|w|}{|x'|^2},$$

lo que nos lleva a

$$|D_2| \leq C|w|\int_{B(0,2-|y|)\setminus B(0,2|w|)} \frac{1}{|x|^3}dx.$$

Pasando a polares, integramos y se cancelan los $|w|$, resultando $|D_2| \leq C$.

Para D_3, notamos que $\eta(y) = 0$ si $|y| > 1$, y en caso contrario $2-|y| \geq 1$, por lo que extendiendo el dominio de integración y acotando η

$$\begin{aligned} |D_3| &\leq C\int_{B(0,2)\setminus B(y,1)} \frac{1}{|x-y|}\frac{1}{|x-z|}dx \leq C\int_{B(0,2)\setminus B(y,1)} \frac{1}{|x-z|}dx \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Solo falta estudiar el subcaso $|y-z| \geq (2-|y|)/2$, que es más sencillo. De nuevo, si $|y|>1$ entonces $|B_1|=0$. En caso contrario, $|y-z|>1/2$, por lo que

$$\int_{B(0,2)} \frac{1}{|x-y|}\frac{1}{|x-z|}dx \leq C.$$

□

Lema 4.3. *Dados ω, ψ tales que $\Delta\psi = \omega$, con $\omega \geq 0$, la función*

$$g(x) \equiv \int_{B(0,R)} \frac{\omega(y)}{|y-x|}dy$$

satisface

$$||g||_{L^2(B(0,R/2))} \leq C(R)||\nabla\psi||_{L^2(B(0,2R))}.$$

Demostración: Elegimos una función $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ con $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta(y)=1$ para $|y|<R$ y $\zeta(y)=0$ para $|y|>2R$, con $|\nabla\zeta| \leq C/R$. Elegimos también $\lambda_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $0 \leq \lambda_\varepsilon \leq 1$, $\lambda_\varepsilon(y)=0$ para $|y-x|<\varepsilon$ y $\lambda_\varepsilon(y)=1$ para $|y-x|>2\varepsilon$, con $|\nabla\lambda_\varepsilon| \leq C/\varepsilon$. Por tenerse $\Delta\psi=\omega$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \zeta(y)\lambda_\varepsilon(y)\frac{\omega(y)}{|y-x|}dy &= -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla\psi\cdot\nabla\left(\frac{\zeta\lambda_\varepsilon}{|y-x|}\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \zeta\lambda_\varepsilon\nabla\psi\cdot\frac{(y-x)}{|y-x|^3}dy - \int_{\mathbb{R}^2}\nabla\psi\cdot\frac{\nabla(\zeta\lambda_\varepsilon)}{|y-x|}dy.\end{aligned}$$

Por hipótesis $\nabla\zeta$ se acota en función de R. Teniendo en cuenta el soporte de ζ, las integrales anteriores las podemos restringir a $B(0,2R)$. Tenemos pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \zeta\lambda_\varepsilon\frac{\omega(y)}{|y-x|}dy \leq &\int_{\mathbb{R}^2}\zeta\lambda_\varepsilon\nabla\psi\cdot\frac{(y-x)}{|y-x|^3}dy \\ &+ C\int_{B(0,2R)}|\nabla\psi|\frac{|\nabla\lambda_\varepsilon|}{|y-x|}dy. + C\int_{B(0,2R)}\frac{|\nabla\psi|}{|y-x|}dy.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $\nabla\lambda_\varepsilon = 0$ cuando λ_ε es constante, el dominio de la segunda integral se puede reducir a $\varepsilon < |y-x| < 2\varepsilon$. De $|\nabla\lambda_\varepsilon| \leq C/\varepsilon$, tenemos que $|\nabla\lambda_\varepsilon||x-y| \leq C$ en este dominio, y por tanto

$$\begin{aligned}\int_{B(0,2R)}|\nabla\psi|\frac{|\nabla\lambda_\varepsilon|}{|y-x|}dy &\leq C\int_{\varepsilon<|y-x|<2\varepsilon}|\nabla\psi|\frac{1}{|y-x|^2}dy \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon<|y-x|<2\varepsilon}|\nabla\psi|dy \\ &\leq \frac{C}{|B(x,2\varepsilon)|}\int_{B(x,2\varepsilon)}|\nabla\psi|dy \leq CM(|\overline{\nabla\psi}|),\end{aligned}$$

donde hemos denotado por $M(f)$ la función maximal de Hardy-Littlewood, y por $\overline{f}$ la restricción de cualquier función f a $B(0,2R)$. Haciendo $\varepsilon \to 0$ en (4.2), tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq g(x) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \zeta \frac{\omega(y)}{|y-x|} dy \leq & p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \zeta \nabla\psi \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|^3} dy \\ & + CM(|\overline{\nabla\psi}|) + C\int_{B(0,2R)} \frac{|\nabla\psi|}{|y-x|} dy \\ & = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x). \end{aligned}$$

Vamos a tomar norma L^2 y acotar. Usando que $y/|y|^3$ es un núcleo de Calderon-Zygmund [28], y que ζ es acotada, tenemos

$$||g_1||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C||\zeta\nabla\psi||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C||\nabla\psi||_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Utilizando que la función maximal de Hardy Littlewood es continua de $L^p \to L^p$, tenemos

$$||g_2||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C||\nabla\psi||_{L^2(B(0,2R))}.$$

Recordamos que la desigualdad de Young implica $\|\alpha * \beta\|_r \leq \|\alpha\|_p \|\beta\|_q$ para valores p, q, r tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Tomando $\alpha(y) = \nabla\psi(y)$ para $|y| < 2R$, y nula en otro caso, y $\beta(y) = |y|^{-1}$ para $|y| < 3R$, y nula en otro caso, obtenemos

$$||g_3||_{L^2(B(0,R/2))} \leq C||\nabla\psi||_{L^2(B(0,2R))} \int_{B(0,3R)} |y|^{-1} dy \leq C||\nabla\psi||_{L^2(B(0,2R))},$$

ya que $|y|^{-1}$ es localmente integrable. Con la desigualdad triangular, concluimos la prueba.

□

A continuación vamos a presentar el teorema que acota los términos no lineales cuando la vorticidad es positiva. Recordamos que ψ es la función corriente, y $u_1 = -\partial_{x_2}\psi$, $u_2 = \partial_{x_1}\psi$.

Teorema 4.4 (Evans & Müller, 1994. [10])**.** *Sea $\psi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ solución a*

$$\Delta\psi = \omega \quad e.c.t. \quad \mathbb{R}^2,$$

y en el sentido de las distribuciones para $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ con $\omega \geq 0$. Entonces definiendo $u = \nabla^\perp\psi$ se tiene

$$u_1u_2, (u_1^2 - u_2^2) \in \mathscr{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

con la acotación

$$||\phi u_1u_2||_{h^1(\mathbb{R}^2)} + ||\phi(u_1^2 - u_2^2)||_{h^1(\mathbb{R}^2)} \leq C||u||^2_{L^2(B(0,R))},$$

para cualquier $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ y unas constantes C, R dependientes de ϕ.

Demostración: La prueba se basa en estimar la integral de u_1u_2 en compactos, y usar el lema 4.1. Como $u_1^2 - u_2^2$ es una rotación de u_1u_2, será suficiente probar el resultado para este término. Para mayor claridad, demostraremos dos lemas en mitad de esta demostración.

Fijamos $R > 8$. Como el logaritmo es la solución fundamental al laplaciano (por una constante), definiendo

$$\sigma(x) \equiv \frac{-1}{2\pi} \int_{B(0,R)} \omega(y) \log(|x-y|)dy, \tag{4.3}$$

tenemos que

$$\theta \equiv \psi - \sigma$$

es armónica en $B(0,R)$. Vamos a acotar $(\partial_{x_1}\sigma\partial_{x_2}\sigma)^{**}$, lo mismo para θ, y concluiremos cotas para ψ. Consideramos pues

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}\sigma(x)\partial_{x_2}\sigma(x)\eta\left(\frac{x-x_0}{r}\right)dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r^2} \int_{B(0,R)} \int_{B(0,R)} \omega(y)\omega(z) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\frac{x_2-z_2}{|x-z|^2}\eta\left(\frac{x-x_0}{r}\right)dxdydz, \end{aligned}$$

donde el cambio de orden de integración está justificado porque $\int_{B(0,R)} \frac{\omega(y)}{|x-y|}dy \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, por el lema 4.3. Cambiando variables $(x-x_0)/r \rightleftarrows x$, $(y-x_0)/r \rightleftarrows y$, $(z-x_0)/r \rightleftarrows z$, tenemos

$$\begin{aligned} A = \frac{r^2}{4\pi^2} &\int_{B(-x_0/r,R/r)} \int_{B(-x_0/r,R/r)} \omega(x_0+ry)\omega(x_0+rz) \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\frac{x_2-z_2}{|x-z|^2}\eta(x)dxdydz. \end{aligned}$$

Utilizando el lema 4.2, y usando que ω es positiva, acotamos

$$\begin{aligned} |A| &\le Cr^2 \int_{B(-x_0/r,R/r)} \int_{B(-x_0/r,R/r)} \frac{\omega(x_0+ry)}{1+|y|}\frac{\omega(x_0+rz)}{1+|z|}dydz \\ &= C\left(r\int_{B(-x_0/r,R/r)} \frac{\omega(x_0+ry)}{1+|y|}dy\right)^2, \end{aligned}$$

y cambiando de variables $x_0 + ry \rightleftarrows y$

$$|A| \le C\left(\int_{B(0,R)} \frac{\omega(y)}{r+|y-x_0|}dy\right)^2.$$

Por definición,

$$(\partial_{x_1}\sigma\partial_{x_2}\sigma)^{**}(x_0) = \sup_{0<r\le 1} |A| \le C\left(\int_{B(0,R)} \frac{\omega(y)}{r+|y-x_0|}dy\right)^2.$$

Usando que ω es positiva, y que $1/(r+|x|) \leq 1/|x|$, por el lema 4.3 concluimos $||(\partial_{x_1}\sigma\partial_{x_2}\sigma)^{**}||_{L^1(B(0,R/2))} \leq C||\nabla\psi||^2_{L^2(B(0,2R))}$.

Pasamos ahora a trabajar con la función armónica θ. Por ser armónica en $B(0,R)$, es regular en esa bola, y podemos acotar para $x \in B(0,R/2)$

$$\begin{aligned}(\partial_{x_1}\theta\partial_{x_2}\theta)^{**}(x_0) &= \sup_{0<r\leq 1}\left|\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial_{x_1}\theta)(\partial_{x_2}\theta)\eta\left(\frac{x-x_0}{r}\right)dy\right| \\ &= C\sup_{0<r\leq 1}\left|\fint_{B(x_0,r)}(\partial_{x_1}\theta)(\partial_{x_2}\theta)\eta\left(\frac{x-x_0}{r}\right)dy\right| \\ &\leq C\sup_{0<r\leq 1}\fint_{B(x_0,r)}|\nabla\theta|^2dy \\ &\leq C\sup_{B(0,3R/4)}|\nabla\theta|^2.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, $\theta - \lambda$ es armónica, y por tanto

$$|\nabla\theta(x)| \leq \frac{C}{r^3}\int_{B(x,r)}|\theta(y)-\lambda|dy.$$

Tomando $r = R/4$, llegamos a

$$\begin{aligned}\sup_{B(0,3R/4)}|\nabla\theta| &\leq C(R)\fint_{B(0,R)}|\theta-\lambda|dy \\ &\leq C(R)\fint_{B(0,R)}|\psi-\lambda|+|\sigma|dy.\end{aligned}$$

Tomando $\lambda = \fint_{B(0,R)}\psi$, usando la desigualdad de Poincaré tenemos que

$$\fint_{B(0,R)}|\psi-\lambda| \leq C(R)||\nabla\psi||_{L^1(B(0,R))} \leq C(R)||\nabla\psi||_{L^2(B(0,R))}.$$

Por otra parte, al ser el logaritmo localmente integrable, de la fórmula (4.3) se deduce que

$$\fint_{B(0,R)}|\sigma| \leq C(R)||\omega||_{L^1(B(0,R))}.$$

Combinando estos resultados tenemos

$$\sup_{B(0,3R/4)}|\nabla\theta| \leq C(||\nabla\psi||_{L^2(B(0,R))}+||\omega||_{L^1(B(0,R))}).$$

Uniendo esto a la acotación (4.4), concluimos

$$||(\partial_{x_1}\theta\partial_{x_2}\theta)^{**}||_{L^1(B(0,R/2))} \leq C(||\nabla\psi||^2_{L^2(B(0,2R))}+||\omega||^2_{L^1(B(0,R))}).$$

Usando de nuevo $\sigma = \psi - \theta$, con los mismos argumentos podemos acotar para $x \in B(0, R/2)$

$$\begin{aligned}(\partial_{x_1}\theta\partial_{x_2}\sigma)^{**}(x_0) &= \sup_{0<r\leq 1}\left|\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial_{x_1}\theta)(\partial_{x_2}\sigma)\eta\left(\frac{x-x_0}{r}\right)dy\right| \\ &\leq C\sup_{0<r\leq 1}\fint_{B(x_0,r)}|\nabla\theta|^2+|\nabla\theta||\nabla\psi|dy \\ &\leq C(||\nabla\psi||^2_{L^2(B(0,2R))}+||\omega||^2_{L^1(B(0,R))}) \\ &\quad + C(||\nabla\psi||_{L^2(B(0,2R))}+||\omega||_{L^1(B(0,R))})M(|\nabla\psi|)(x_0).\end{aligned}$$

Para tratar la función maximal procedemos igual que en el lema 4.3, utilizando esta vez que la función maximal es continua de L^2 en L^2, y que $L^2 \hookrightarrow L^1$. Concluimos

$$||(\partial_{x_1}\theta\partial_{x_2}\sigma)^{**}||_{L^1(B(0,R/2))} \leq C(||\nabla\psi||^2_{L^2(B(0,2R))}+||\omega||^2_{L^1(B(0,R))}).$$

Por analogía, esto acota también $||(\partial_{x_2}\theta\partial_{x_1}\sigma)^{**}||_{L^1(B(0,R/2))}$. Usando que

$$\partial_{x_1}\psi\partial_{x_2}\psi = u_1u_2 = \partial_{x_1}\theta\partial_{x_2}\theta+\partial_{x_1}\theta\partial_{x_2}\sigma+\partial_{x_1}\sigma\partial_{x_2}\theta+\partial_{x_1}\sigma\partial_{x_2}\sigma,$$

concluimos ahora

$$||(u_1u_2)^{**}||_{L^1(B(0,R/2))} \leq C(||\nabla\psi||^2_{L^2(B(0,2R))}+||\omega||^2_{L^1(B(0,R))}).$$

Solo queda acotar la integral de ω en función de $\nabla\psi$. Para ello, tomamos una función $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ con $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta(y) = 1$ para $|y| < R$ y $\zeta(y) = 0$ para $|y| > 2R$, con $|\nabla\zeta| \leq C/R$. Por ser $\omega \geq 0$, y $\Delta\psi = \omega$, tenemos

$$\int_{B(0,R)}\omega \leq \int_{B(0,2R)}\omega\zeta = -\int_{B(0,2R)}\nabla\psi\cdot\nabla\zeta \leq \frac{C}{R}\int_{B(0,2R)}|\nabla\psi|,$$

y aplicando la desigualdad de Jensen en el término de la derecha,

$$||\omega||^2_{L^1(B(0,R))} \leq C||\nabla\psi||^2_{L^2(B(0,2R))},$$

por lo que

$$||(u_1u_2)^{**}||_{L^1(B(0,R/2))} \leq C||\nabla\psi||^2_{L^2(B(0,2R))} = C||u||^2_{L^2(B(0,2R))},$$

lo que concluye la prueba.

□

4.2. Convergencia en distribución

En este apartado vamos a probar que, una sucesión acotada en el espacio h^1 con alguna hipótesis adicional, converge en distribución. Esto nos permitirá probar la convergencia de los términos no lineales en las ecuaciones de Euler. Este resultado es cierto también para el espacio de Hardy $\mathscr{H}^1$ [17].

Recordamos que el espacio de variación media acotada o BMO tiene como norma

$$||g||_{BMO} = \sup_I \fint_I |g - (g)_I| dx,$$

donde I es cualquier cubo con los lados paralelos a los ejes de coordenadas, y

$$(g)_I = \fint_I g dx$$

es el valor medio de g en I. También utilizaremos la versión local bmo que tiene como norma

$$||g||_{bmo} = \sup_{|I|\leq 1} \fint_I |g - (g)_I| dx + \sup_{|I|\geq 1} \fint_I |g| dx.$$

En [15] se prueba que la relación de bmo con h^1 es $(h^1)^* = bmo$. Por tanto, si $f \in h^1(\mathbb{R}^n), g \in bmo(\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f g dx \right| \leq C||f||_{h^1}||g||_{bmo}.$$

Para probar el teorema de este apartado nos ayudaremos del siguiente lema.

Lema 4.5. *Si existen conjuntos medibles $A, B \subset \mathbb{R}^n$ y una constante $\lambda > 0$ tales que*

$$\text{mín}\left\{ \frac{|I \cap A|}{|I|}, \frac{|I \cap B|}{|I|} \right\} \leq 2^{-2n\lambda}$$

para cualquier cubo $I \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe una función $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ $e.c.t.$ A, $\eta = 0$ $e.c.t.$ B, y

$$||\eta||_{BMO} \leq C/\lambda,$$

donde la constante C solo depende de n.

Demostración: Una prueba completa puede verse en [14]. La idea que se usa es construir explícitamente una sucesión de funciones que satisfacen cierta cota, y tomar límite; verificando que se satisface el enunciado. Se argumenta primero para cubos diádicos y después se generaliza. □

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Si la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada en $h^1(\mathbb{R}^n)$ y existe una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$f_k \to f \quad e.c.t.,$$

entonces se tiene que

$$f_k \to f$$

en el sentido de las distribuciones.

Demostración: Sea $\zeta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que demostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_k - f)\zeta dx \to 0 \tag{4.5}$$

cuando $k \to \infty$. Para ello, consideramos un $0 < \varepsilon < 1/2$. Por tener convergencia en casi todo, y ser ζ de soporte compacto, el teorema de Egoroff [2] establece que existe un abierto G con medida $|G| < \varepsilon$ tal que

$$f_k \to f \text{ uniformemente en } (\mathbb{R}^n \setminus G) \cap supp(\zeta).$$

Vamos a aplicar el lema 4.5. Para ello, consideramos el cubo Q centrado en el origen con lado $L > 4$ y tal que $supp(\zeta) \subset \frac{1}{2}Q$. Veamos que $A \equiv G \cap \frac{1}{2}Q$ y $B \equiv \mathbb{R}^n \setminus Q$ satisfacen las hipótesis del lema 4.5, para un cierto λ. El único caso no trivial es cuando $|I \cap A| > 0, |I \cap B| > 0$, para lo cual (por construcción de A, B) necesariamente el lado de I tiene medida $l(I) > L/4$. Podemos acotar entonces

$$\frac{|I \cap A|}{|I|} \leq \frac{|A|}{|I|} \leq \frac{4^n|G|}{L^n} \leq \frac{4^n\varepsilon}{L^n} \leq 2^{-2n\lambda}$$

si tomamos

$$\lambda = \frac{|\log_2 \varepsilon|}{2n}.$$

Aplicando el lema 4.5, tenemos que existe una función η_ε con $0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1$ en Q, y $\eta_\varepsilon = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus Q$, con

$$||\eta_\varepsilon||_{BMO} \leq \frac{C}{|\log_2 \varepsilon|}. \tag{4.6}$$

Consideramos ahora, para $\mu > 1$, el cubo $I = \mu Q$. El promedio de η_ε en I se acota por

$$|(\eta_\varepsilon)_I| \leq \frac{|Q|}{|I|} = \mu^{-n},$$

y por la desigualdad triangular acotamos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\eta_\varepsilon| = \int_Q |\eta_\varepsilon| &\leq \int_Q (|(\eta_\varepsilon)_I| + |\eta_\varepsilon - (\eta_\varepsilon)_I|) \leq |Q||(\eta_\varepsilon)_I| + \int_I |\eta_\varepsilon - (\eta_\varepsilon)_I| \\ &\leq C\mu^{-n} + |I|||\eta_\varepsilon||_{BMO} \leq C\left(\frac{1}{\mu^n} + \frac{\mu^n}{|\log_2 \varepsilon|}\right),\end{aligned}$$

por lo que tomando $\mu = |\log_2 \varepsilon|^{1/2n} > 1$, deducimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\eta_\varepsilon| \leq \frac{C}{|\log_2 \varepsilon|^{1/2}}. \tag{4.7}$$

Con esto, pasamos a probar (4.5). Descomponemos en los sumandos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} (f_k - f)\zeta dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|(1-\eta_\varepsilon)|\zeta| + \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_k \eta_\varepsilon \zeta\right| + \int_{\mathbb{R}^n} |f\eta_\varepsilon\zeta| \\ &= A_1 + A_2 + A_3.\end{aligned}$$

Como $\eta_\varepsilon = 1$ en $G \cap supp(\zeta)$ y $f_k \to f$ uniformemente en $(\mathbb{R}^n \setminus G) \cap supp(\zeta)$,

$$A_1 \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Aplicando la dualidad $h^1 - bmo$, podemos acotar

$$|A_2| \leq C||f_k||_{h^1}||\zeta\eta_\varepsilon||_{bmo} \leq C||\zeta\eta_\varepsilon||_{bmo}. \tag{4.8}$$

Para acotar el último factor consideramos dos casos. Si $|I| \geq 1$, acotamos

$$⨍_I |\eta_\varepsilon\zeta| \leq ||\zeta||_{L^\infty} ⨍_I |\eta_\varepsilon| \leq ||\zeta||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta_\varepsilon| \leq \frac{C}{|\log_2 \varepsilon|^{1/2}}. \tag{4.9}$$

Si $|I| \leq 1$, y denotando por x_0 el centro de I, y l su lado, tenemos que

$$\begin{aligned}⨍_I |\eta_\varepsilon\zeta - (\eta_\varepsilon\zeta)_I| &\leq ⨍_I |\eta_\varepsilon\zeta - \zeta(x_0)(\eta_\varepsilon)_I| + |\zeta(x_0)(\eta_\varepsilon)_I - (\zeta\eta_\varepsilon)_I| \\ &\leq ⨍_I |\eta_\varepsilon\zeta - \eta_\varepsilon\zeta(x_0)| + ⨍_I |\eta_\varepsilon\zeta(x_0) - \zeta(x_0)(\eta_\varepsilon)_I| + ⨍_I |\zeta(x_0)(\eta_\varepsilon)_I - (\zeta\eta_\varepsilon)_I| \\ &= ⨍_I |\eta_\varepsilon(\zeta - \zeta(x_0))| + ⨍_I |\zeta(x_0)(\eta_\varepsilon - (\eta_\varepsilon)_I)| + |\zeta(x_0)(\eta_\varepsilon)_I - (\zeta\eta_\varepsilon)_I| \\ &= ⨍_I |\eta_\varepsilon(\zeta - \zeta(x_0))| + ⨍_I |\zeta(x_0)(\eta_\varepsilon - (\eta_\varepsilon)_I)| + \left|⨍_I \eta_\varepsilon(\zeta - \zeta(x_0))\right| \\ &\leq 2⨍_I |\eta_\varepsilon(\zeta - \zeta(x_0))| + ⨍_I |\zeta(x_0)(\eta_\varepsilon - (\eta_\varepsilon)_I)|.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Utilizando que ζ es Lipschitz, y que $|I| = Cl^n$, tenemos que

$$\begin{aligned}⨍_I |\eta_\varepsilon(\zeta - \zeta(x_0))| &\leq \frac{C}{l^{n-1}} \int_I |\eta_\varepsilon| \leq \frac{C}{l^{n-1}} \left(\int_I |\eta_\varepsilon|^n\right)^{1/n} |I|^{(n-1)/n} \leq C \left(\int_I |\eta_\varepsilon|\right)^{1/n} \\ &\leq \frac{C}{|\log_2 \varepsilon|^{1/2n}},\end{aligned}$$

donde hemos usado (4.7). Por otro lado,

$$\fint_I |\zeta(x_0)(\eta_\varepsilon - (\eta_\varepsilon)_I)| \leq ||\zeta||_{L^\infty} \fint_I |(\eta_\varepsilon - (\eta_\varepsilon)_I)| \leq C||\eta_\varepsilon||_{BMO} \leq \frac{C}{|\log_2 \varepsilon|},$$

donde hemos usado (4.6). Así, de (4.10) deducimos

$$\fint_I |\eta_\varepsilon \zeta - (\eta_\varepsilon \zeta)_I| \leq \frac{C}{|\log_2 \varepsilon|^{1/2n}}. \tag{4.11}$$

Por definición de bmo, combinando (4.8), (4.9) y (4.11) concluimos que

$$|A_2| \leq C||\eta_\varepsilon \zeta||_{bmo} \leq \frac{C}{|\log_2 \varepsilon|^{1/2n}}.$$

Hasta ahora solo hemos impuesto $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$. De la acotación (4.7) se deduce que existe una subsucesión $\varepsilon_j \to 0$ tal que $\eta_{\varepsilon_j} \to 0$ en casi todo. Con esto, denotando por K un compacto que contiene al soporte de ζ, y al ser $|\eta_\varepsilon| < 1$, las funciones $|f\eta_{\varepsilon_j}|$ están dominadas puntualmente por $|f| \in L^1_{loc}$. Aplicando convergencia dominada, concluimos

$$A_3 \leq ||\zeta||_{L^\infty} \int_K |f\eta_{\varepsilon_j}| \to 0$$

cuando $j \to \infty$.

□

4.3. Aplicación a las ecuaciones de Euler

En este apartado vamos a probar que, si la vorticidad inicial ω es positiva (caso análogo al del capítulo 2), existe solución a las ecuaciones de Euler. También demostraremos que existe solución cuando la vorticidad tiene simetría radial. Por último, veremos con un contraejemplo que si eliminamos la hipótesis de vorticidad positiva, el teorema 4.4 es falso.

Teorema 4.7. *Dado $\omega_0 \in RM(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con ω_0 positiva, $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ con $\omega_0 = \nabla^\perp \cdot u_0$ y $T > 0$, existe una solución a las ecuaciones de Euler* (1.7).

Demostración: Como estamos en las condiciones del teorema de existencia de soluciones suaves, tenemos que existe una sucesión de soluciones u^ε con vorticidad ω^ε tales que

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \sup_{0\leq t\leq T} \int_K |u^\varepsilon|^2 + |\omega^\varepsilon| < \infty. \tag{4.12}$$

Para cada ε, $u^\varepsilon \in L^2_{loc} \Rightarrow \psi^\varepsilon \in H^1_{loc}$, donde la existencia de ψ como $\nabla^\perp \psi^\varepsilon = u^\varepsilon$ viene garantizada por la incompresibilidad de u^ε. Por ser ω^ε regular, tenemos que $\Delta\psi^\varepsilon = \omega^\varepsilon$

en el sentido clásico, y al ser $\omega^\varepsilon \in L^1_{loc}$, podemos aplicar el teorema 4.4, que junto a (4.12) implica

$$||\phi u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon||_{h^1(\mathbb{R}^2)} + ||\phi((u_1^\varepsilon)^2 - (u_2^\varepsilon)^2)||_{h^1(\mathbb{R}^2)} \leq C,$$

para una constante C independiente de ε.

Denotamos por u el límite débil de u^ε en L^2_{loc}. Por ser $u \in L^2_{loc}$, es directo que $u_1 u_2 \in L^1_{loc} \Rightarrow \phi u_1 u_2 \in L^1_{loc}$. Para aplicar el teorema 4.6 queda probar que $\phi u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \to \phi u_1 u_2$ en casi todo. Lo haremos para casi todo $t \in [0, T]$. Probaremos esto con ayuda de dos proposiciones.

Proposición 4.8. *Si para U un entorno acotado, y $k = 1, 2, \ldots$ se tiene que $\psi_k \in H^1(U)$ es una solución débil de*

$$\Delta \psi_k = \omega_k$$

en U, con $\{\psi_k\}$ acotada en $H^1(U)$, y ω_k acotada en $L^1(U)$, entonces $\{\psi_k\}$ es precompacto en $W^{1,p}$ para cada $1 \leq p < 2$, es decir, existe una subsucesión que converge en $W^{1,p}$.

Demostración: Nos basaremos en el trabajo [11]. Por compacidad débil e inyección compacta $H^1(U) \subset\subset L^2(U)$, existe una subsucesión (que denotamos igual por abuso de notación) $\{\psi_k\}$ tal que

$$\psi_k \rightharpoonup \psi \in H^1(U), \quad \psi_k \to \psi \in L^2(U). \tag{4.13}$$

Por tener convergencia fuerte en L^2, tomando subsucesión también tenemos convergencia en casi todo. Seguiremos denotando a esta subsucesión por $\{\psi_k\}$.

Fijamos $\sigma, \delta > 0$ y definimos

$$\beta_\sigma(s) = \begin{cases} \sigma & si \quad s \geq \sigma \\ s & si \quad -\sigma \leq s \leq \sigma \\ -\sigma & si \quad s \leq \sigma. \end{cases}$$

Por el teorema de Egoroff, existe un conjunto $E_\delta \subset U$ donde tenemos convergencia uniforme, y tal que $|U \setminus E_\delta| \leq \delta$. Tomamos $\zeta \in C_c^\infty(U)$ tal que $\zeta \equiv 1$ en E_δ, y $0 \leq \zeta \leq 1$. Eligiendo k suficientemente grande, tenemos que $|\psi_k - \psi| \leq \sigma/2$ en E_δ. Con esto podemos acotar

$$\int_{E_\delta} |\nabla \psi_k - \nabla \psi|^2 dx \leq \int_U \zeta \nabla(\psi_k - \psi) \cdot \nabla \beta_\sigma(\psi_k - \psi) dx,$$

e integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_{E_\delta} |\nabla\psi_k - \nabla\psi|^2 dx &\leq \int_U \zeta\nabla\psi_k \cdot \nabla(\beta_\sigma(\psi_k-\psi))dx - \int_U \zeta\nabla\psi\cdot\nabla(\beta_\sigma(\psi_k-\psi))dx \\ &= -\int_U \zeta\Delta\psi_k\beta_\sigma(\psi_k-\psi) - \int_U \nabla\zeta\cdot\nabla\psi_k\beta_\sigma(\psi_k-\psi) - \int_U \zeta\nabla\psi\cdot\nabla(\beta_\sigma(\psi_k-\psi))dx \\ &= -\int_U \zeta\omega_k\beta_\sigma(\psi_k-\psi) - \int_U \nabla\zeta\cdot\nabla\psi_k\beta_\sigma(\psi_k-\psi) - \int_U \zeta\nabla\psi\cdot\nabla(\beta_\sigma(\psi_k-\psi))dx.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Por las convergencias (4.13) y la definición de β_σ, es directo que $\beta_\sigma(\psi_k - \psi)$ converge a 0 fuerte en L^2, y débilmente en H^1. El segundo sumando de (4.14) se puede acotar por $||D\zeta||_{L^\infty}||D\psi_k||_{L^2}||\beta_\sigma(\psi_k-\psi)||_{L^2}$, por lo que tiende a 0 con k debido a la convergencia fuerte. En el tercer sumango de (4.14) podemos tomar límite débil, obteniendo otro 0. Acotando el primer sumando, obtenemos

$$\int_{E_\delta} |D\psi_k - D\psi|^2 dx \leq C\sigma||\omega_k||_{L^1(U)} + \eta(k) \leq C\sigma + \eta(k),$$

donde $\eta(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Como $\sigma > 0$ es arbitrario, concluimos que una subsucesión de $\{D\psi_k\}$ converge puntualmente a $D\psi$ en casi todo E_δ. Al ser cierto para $\delta > 0$ arbitrario, concluimos que $D\psi_k$ converge puntualmente a $D\psi$ en casi todo U. Sea $\varepsilon > 0$. Aplicamos de nuevo el teorema de Egoroff a $D\psi_k$, teniendo la existencia de un E_ε donde hay convergencia uniforme. Para cualquier $1 \leq p < 2$, podemos acotar

$$\begin{aligned}\int_U |D\psi_k - D\psi|^p &= \int_{E_\varepsilon} |D\psi_k - D\psi|^p + \int_{U\setminus E_\varepsilon} |D\psi_k - D\psi|^p \\ &= \int_{E_\varepsilon} |D\psi_k - D\psi|^p + \left(\int_{U\setminus E_\varepsilon} |D\psi_k - D\psi|^2\right)^{p/2} |U \setminus E_\varepsilon|^{(2-p)/2} \\ &\leq \int_{E_\varepsilon} |D\psi_k - D\psi|^p + \left(\int_U |D\psi_k - D\psi|^2\right)^{p/2} |\varepsilon|^{(2-p)/2}.\end{aligned}$$

En el primer sumando podemos aplicar convergencia dominada, por lo que se anula al tomar límite en k. El primer factor del segundo sumando se acota uniformemente en k por ser $\{\psi_k\}$ acotada en $H^1(U)$, y mantener el límite débil la cota de la sucesión. Al ser ε arbitrario, se deduce que $\int_U |D\psi_k - D\psi|^p \to 0$. □

Proposición 4.9. *Si la sucesión $u^\varepsilon(t,x)$ satisface las condiciones del teorema 1.4, entonces para cualquier $1 \leq p < 2$ existe una constante α tal que*

$$||u^\varepsilon(t_1) - u^\varepsilon(t_2)||_{L^p(B(0,R))} \leq C|t_1 - t_2|^\alpha.$$

Demostración: Sea $R > 0$. Consideramos una función $\rho \in C_c^\infty$ con las condiciones $\rho(x) \equiv 1$ si $|x| < R$, $0 \leq \rho(x) \leq 1$. Por ser $\{u^\varepsilon\}$ uniformemente acotada en $Lip([0,T], H^{-L}_{loc})$, y por la inclusión continua $H^{-L}(K) \subset W^{-L,p}(K)$, se deduce que

$$||\rho u^\varepsilon(t_1) - \rho u^\varepsilon(t_2)||_{W^{-L,p}} \leq C|t_1 - t_2|. \tag{4.15}$$

La función ρu^ε satisface el sistema

$$\begin{aligned} \nabla^\perp \cdot (\rho u^\varepsilon) &= \nabla^\perp \rho \cdot u^\varepsilon + \rho \omega^\varepsilon \equiv F_1^\varepsilon, \\ \nabla \cdot (\rho u^\varepsilon) &= \nabla \rho \cdot u^\varepsilon \equiv F_2^\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por ser $\rho \in C_c^\infty$, y la cota uniforme $\sup_{0\le t\le T} \int_K |u^\varepsilon|^2 + |\omega^\varepsilon| < C$, los términos de (4.16) están acotados en L^1 independientemente de ε. Para $s > 2(p-1)/p$, la inclusión continua $L^1 \hookrightarrow W^{-s,p}$ implica que $||F_i^\varepsilon||_{W^{-s,p}} \le C$, para $i = 1, 2$.

Por la descomposición de Helmholtz-Hodge, al ser ρu^ε regular, podemos expresarlo como $\rho u^\varepsilon = \nabla^\perp q_1 + \nabla q_2$, de forma que $F_1 = \nabla^\perp \cdot (\rho u^\varepsilon) = \Delta q_1$, y $F_2 = \nabla \cdot (\rho u^\varepsilon) = \Delta q_2$. Como las q_i ganan dos derivadas respecto a las F_i [28], ρu^ε gana una derivada respecto a las F_i. Podemos acotar entonces

$$||\rho u^\varepsilon||_{W^{1-s,p}} \le C(||F^\varepsilon||_{W^{-s,p}} + ||\rho u^\varepsilon||_{L^2}) \le C. \tag{4.17}$$

Para $1 < p < 2$, tenemos que $1 - s > 0$, y podemos aplicar la desigualdad de interpolación [1], y las cotas (4.15), (4.17), para obtener

$$\begin{aligned} ||\rho u^\varepsilon(t_1) - \rho u^\varepsilon(t_2)||_{L^p} &\le C||\rho u^\varepsilon(t_1) - \rho u^\varepsilon(t_2)||^{1-\alpha}_{W^{1-s,p}} ||\rho u^\varepsilon(t_1) - \rho u^\varepsilon(t_2)||^{\alpha}_{W^{-L,p}} \\ &\le C(||\rho u^\varepsilon(t_1)||_{W^{1-s,p}} + ||\rho u^\varepsilon(t_2)||_{W^{1-s,p}})^{1-\alpha} ||\rho u^\varepsilon(t_1) - \rho u^\varepsilon(t_2)||^{\alpha}_{W^{-L,p}} \\ &\le C|t_1 - t_2|^\alpha. \end{aligned}$$

De la inclusión continua $L^p \hookrightarrow L^1$, se concluye la prueba para el caso $p = 1$. □

Como estamos en las hipótesis de las proposiciones 4.8 y 4.9, tenemos que para cada $t \in [0, T]$, $1 \le p < 2$ existe una subsucesión $\{u^{\varepsilon_j}\} \subset \{u^\varepsilon\}$ tal que

$$u^{\varepsilon_j}(t) \to u(t) \tag{4.18}$$

en $L^p(B(0, R))$, y

$$||u^{\varepsilon_j}(t_1) - u^{\varepsilon_j}(t_2)||_{L^p(B(0,R))} \le C|t_1 - t_2|^\alpha. \tag{4.19}$$

Es directo que entonces u^{ε_j} está uniformemente acotada en $L^\infty([0, T], L^p(B(0, R)))$, que es un espacio de Banach. Vamos a demostrar que la sucesión $\{u^{\varepsilon_j}\}$ es de Cauchy, por lo que converge fuertemente, y tomando una subsucesión también en casi todo.

Consideramos la sucesión de tiempos $\{t_m\}_{m=1}^\infty = [0, T] \cap \mathbb{Q}$. Para cada t_m escogemos una subsucesión de forma que se tenga (4.18) y con un argumento diagonal, por lo que

$$u^{\varepsilon_j}(t_m) \to u(t_m) \in L^p, \tag{4.20}$$

para cualquier m. Dado $\delta > 0$ arbitrario, por densidad de $\mathbb{Q}$ y compacidad de $[0, T]$, podemos encontrar un número finito L de elementos $m_l \in \mathbb{N}$ tales que

$$[0, T] \subset \bigcup_{l=1}^{L} [t_{m_l} - \delta^{1/\alpha}, t_{m_l} + \delta^{1/\alpha}]. \tag{4.21}$$

De (4.20) se tiene que existe un J_L tal que para cualesquiera $j_1, j_2 > J_L$, y $l = 1, \ldots, L$,

$$||u^{\varepsilon_{j_1}}(t_{m_l}) - u^{\varepsilon_{j_2}}(t_{m_l})||_{L^p} \leq \delta. \tag{4.22}$$

Dado $t \in [0,T]$, escogiendo el t_{m_l} más cercano podemos acotar

$$\begin{aligned}||u^{\varepsilon_{j_1}}(t) - u^{\varepsilon_{j_2}}(t)||_{L^p} \leq & ||u^{\varepsilon_{j_1}}(t) - u^{\varepsilon_{j_1}}(t_{m_l})||_{L^p} + ||u^{\varepsilon_{j_1}}(t_{m_l}) - u^{\varepsilon_{j_2}}(t_{m_l})||_{L^p} \\ & + ||u^{\varepsilon_{j_2}}(t_{m_l}) - u^{\varepsilon_{j_2}}(t)||_{L^p} \leq C\delta,\end{aligned}$$

para $j_1, j_2 > J_L$, por las fórmulas (4.19), (4.21), (4.22). Esto muestra que la sucesión $\{u^{\varepsilon_j}\}$ es de Cauchy, por lo que converge en norma, y tomando una subsucesión también en casi todo $[0,T] \times B(0,R)$. Vamos a prescindir de los subíndices de ε, entendiéndose que tomamos las subsucesiones necesarias.

Al ser R arbitrario, podemos aplicar el teorema 4.6, y concluimos que $\phi u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \to \phi u_1 u_2$ en el sentido de las distribuciones, para cualquier $\phi \in C_c^\infty$ y en casi todo t. Dada una función test φ, elegimos ϕ tal que $\phi(x) = 1$ si $x \in supp(\varphi)$, para cualquier t. Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \varphi \to \int_{\mathbb{R}^2} u_1 u_2 \varphi, \quad e.c.t. \quad t \in [0,T].$$

Reduciendo la integral a un compacto K en $\mathbb{R}^2$ que contiene el soporte de φ para cualquier t, por ser u^ε uniformemente acotada en L^2_{loc} tenemos que la función $f^\varepsilon(t) = \int_K u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \varphi$ está uniformemente acotada en ε, t, por lo que aplicando convergencia dominada $\int_0^T f^\varepsilon \to \int_0^T f$, es decir,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \varphi \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_1 u_2 \varphi.$$

El mismo resultado se tiene para $u_1^2 - u_2^2$ por analogía, lo que prueba que u es solución a las ecuaciones de Euler.

□

Ahora vamos a ver una extensión al resultado de Delort en el caso de tener simetría radial, lo cual permite cambios de signo en la vorticidad. Nos ayudaremos del siguiente lema, basado en el artículo [18].

Lema 4.10. *Si $h \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $supp(h) \subset B(0,a)$, y $\int_{\mathbb{R}^2} h = 0$, entonces*

$$||h^{**}||_{L^1} \leq ||h^*||_{L^1} \leq Ca^2||h||_{L^\infty}.$$

Demostración: La primera desigualdad es trivial, ya que $h^{**}(x) \leq h^*(x)$ por definición. Para la segunda, consideramos dos casos. Si $x \in B(0,2a)$, entonces

$$\left|\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^2} h(y)\eta\left(\frac{x-y}{r}\right)dy\right| \leq ||h||_{L^\infty}\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^2}\eta\left(\frac{x-y}{r}\right)dy = ||h||_{L^\infty}.$$

Por tanto,

$$\int_{B(0,2a)} h^* \leq \int_{B(0,2a)} ||h||_{L^\infty} = Ca^2||h||_{L^\infty}.$$

Si $|x| \geq 2a$, para que $h(y)\eta((x-y)/r) \neq 0$ necesariamente $r \geq |x-y| \geq |x| - a \geq |x|/2$. Además, la condición $\int_{\mathbb{R}^2} h = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} h(y)\eta(x/r)dy = 0$, y por ser η Lipchitz podemos acotar

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^2} h(y)\eta\left(\frac{x-y}{r}\right)dy\right| &= \frac{1}{r^2}\int_{B(0,a)} h(y)\left[\eta\left(\frac{x-y}{r}\right) - \eta\left(\frac{x}{r}\right)\right]dy \\ &\leq \frac{C||h||_{L^\infty}}{r^3}\int_{B(0,a)} |y|dy \leq \frac{C||h||_{L^\infty}a^3}{|x|^3}.\end{aligned}$$

Eso permite acotar

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2a)} h^* \leq \int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2a)} \frac{Ca^3||h||_{L^\infty}}{|x|^3} = Ca^3||h||_{L^\infty}\int_{2a}^{\infty} |r|^{-2}dr = Ca^2||h||_{L^\infty}.$$

□

Teorema 4.11. *Dado $\omega_0 \in RM(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ con simetría radial, $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ cumpliendo $\omega_0 = \nabla^\perp \cdot u_0$ y $T > 0$, existe una solución a las ecuaciones de Euler* (1.7).

Demostración: El único resultado que no podemos aplicar de forma análoga al teorema 4.7 es el teorema 4.4. Para probar el resultado solo necesitamos demostrar que

$$||\phi u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon||_{h^1} + ||\phi((u_1^\varepsilon)^2 - (u_2^\varepsilon)^2)||_{h^1} \leq C$$

uniformemente en ε, para C y R dependientes solo de ϕ. Comenzaremos por acotar $||(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon)^{**}||_{L^1(B(0,R))}$ haciendo uso de la desigualdad (4.12), y aplicaremos el lema 4.1 para concluir la prueba. El otro término es análogo, por ser el primero rotado. Por comodidad vamos a prescindir de los superíncides ε, entendiéndose que estas cuentas las realizamos para las soluciones regularizadas.

La simetría radial transforma la relación $\Delta\psi = \omega$ en la EDO

$$\frac{1}{r}(r\psi')' = \omega. \tag{4.23}$$

Sea $\eta \in C_c^\infty$ con soporte en $B(0,1)$, positiva, con $\int \eta = 1$. Por la simetría radial, y usando que $\nabla^\perp\psi = u$, definimos

$$\begin{aligned} f(x) \equiv u_1u_2(x) &= -\frac{x_1x_2}{r^2}(\psi')^2, \\ r_i \equiv 2^i, \quad A_i &\equiv \{x : r_{i-1} < |x| < r_i\}, \\ f_i &\equiv f\chi_{A_i}. \end{aligned}$$

Por simetría, cada f_i satisface $\int_{\mathbb{R}^2} f_i = 0$. Para aplicar el lema 4.10 tenemos que probar que están en L^∞. Por definición de r_i, f, tenemos la cota

$$r_i^2 ||f_i||_{L^\infty} \leq 4 \sup_{r_{i-1}<r\leq r_i} r^2 |\psi'(r)|^2. \tag{4.24}$$

Para acotar el factor de la derecha, comenzamos observando que al tener $\omega \in L^1_{loc}$, la desigualdad (4.23) implica que $v(r) \equiv r\psi'$ es absolutamente continua en cada intervalo $[0, R]$. Podemos acotar

$$\left| v(r) - \fint_{r_{i-1}}^{r_i} v dr \right| \leq \int_{r_{i-1}}^{r_i} |v'| = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r|\omega|.$$

Por la desigualdad triangular inversa, podemos acotar

$$\begin{aligned}
\sup_{r_{i-1}\leq r\leq r_i} r|\psi'(r)| &\leq C \left[\frac{1}{r_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} |r\psi'| dr + \int_{r_{i-1}}^{r_i} r|\omega| dr \right] \\
&\leq C \left[\frac{1}{\sqrt{r_i}} \int_{r_{i-1}}^{r_i} |\sqrt{r}\psi'| dr + \int_{r_{i-1}}^{r_i} r|\omega| dr \right] \\
&\leq C \left[\frac{1}{\sqrt{r_i}} \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} r(\psi')^2 dr \right)^{1/2} (r_{i-1})^{1/2} + \int_{r_{i-1}}^{r_i} r|\omega| dr \right] \\
&\leq C \left[\left(\int_{A_i} |u|^2 dx \right)^{1/2} + \int_{A_i} |\omega| dx \right] < \infty,
\end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos usado $|\nabla\psi| = |u|$. Esto muestra que cada f_i está acotada y le podemos aplicar el lema 4.10, que junto a la desigualdad (4.24) nos da la cota

$$||f_i^{**}||_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C r_i^2 ||f_i||_{L^\infty} \leq C \left[\int_{A_i} |u|^2 dr + \left(\int_{A_i} |\omega| dr \right)^2 \right].$$

Como f restringido a $B(0, r_i)$ es igual a $\sum_{-\infty}^{i} f_j$ en casi todo, acotamos finalmente

$$\begin{aligned}
||f^{**}||_{L^1(B(0,r_i))} &\leq \sum_{j=-\infty}^{i} ||f_j^{**}||_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \sum_{j=-\infty}^{i} \left[\int_{A_j} |u|^2 dr + \left(\int_{A_j} |\omega| dr \right)^2 \right] \\
&\leq C \left[\int_{B(0,r_i)} |u|^2 dx + \left(\int_{B(0,r_i)} |\omega| dr \right)^2 \right] \leq C
\end{aligned}$$

independientemente de ε, por la acotación uniforme (4.12). Aplicando el lema 4.1, concluimos la prueba. □

Para finalizar, vamos a mostrar que la hipótesis de signo es necesaria en el teorema 4.4. Comenzaremos por construir una función que nos servirá de base para crear el contraejemplo.

Lema 4.12. *Existe una función $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, tal que*

$$supp(\psi) \subset B(0,1), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}\psi(x)\partial_{x_2}\psi(x)dx = 1.$$

Demostración: Sean $f, g, \widetilde{f}, \widetilde{g} \in C_c^\infty((-1/2, 1/2))$, y definimos

$$h(x) = f(x_1)g(x_2), \quad \widetilde{h}(x) = \widetilde{f}(x_1)\widetilde{g}(x_2), \quad \psi = h + \widetilde{h}.$$

Por ser funciones regulares y de soporte compacto, es directo que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}h(x)\partial_{x_2}h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}\widetilde{h}(x)\partial_{x_2}\widetilde{h}(x)dx = 0,$$

por lo que de la definición de ψ

$$\int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}\psi(x)\partial_{x_2}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{x_1}h(x)\partial_{x_2}\widetilde{h}(x) + \partial_{x_2}h(x)\partial_{x_1}\widetilde{h}(x))dx.$$

Integrando por partes, y separando en componentes,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}\psi(x)\partial_{x_2}\psi(x) &= 2\int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}h(x)\partial_{x_2}\widetilde{h}(x)dx \\ &= 2\left(\int_{\mathbb{R}} f'(x_1)\widetilde{f}(x_1)dx_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x_2)\widetilde{g}'(x_2)dx_2\right).\end{aligned}$$

Elegimos cualquier $f \in C_c^\infty$ no nula, y cualquier $\widetilde{g} \in C_c^\infty$ no nula. Tomando $\widetilde{f} = f'$, y $g = c\widetilde{g}'$, para un c apropiado se cumple el lema. □

Lema 4.13. *Existe una sucesión de funciones $\{\psi^\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ cumpliendo de forma uniforme en ε que*

$$supp(\psi^\varepsilon) \subset B(0,1), \quad ||\psi^\varepsilon||_{H^1(\mathbb{R}^2)} + ||\Delta\psi^\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C,$$

y que

$$||\partial_{x_1}\psi^\varepsilon\partial_{x_2}\psi^\varepsilon||_{h^1(\mathbb{R}^2)} \to \infty$$

cuando $\varepsilon \to 0$.

Demostración: Escogemos la función ψ dada en el lema 4.12. Definimos

$$\psi^\varepsilon(x) \equiv \psi(x/\varepsilon), \quad f(x) = \partial_{x_1}\psi(x)\partial_{x_2}\psi(x), \quad f^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Veamos que la sucesión $\{\psi^\varepsilon\}$ satisface el lema. La condición sobre el soporte es directa. El cambio de variable $y = x/\varepsilon$ muestra directamente que (para $\varepsilon \leq 1$)

$$\begin{aligned}||\psi^\varepsilon||_{H^1} &\leq ||\psi||_{H^1} < \infty, \\ ||\Delta\psi^\varepsilon||_{L^1} &\leq ||\Delta\psi||_{L^1} < \infty,\end{aligned}$$

por lo que solo queda probar $||f^\varepsilon||_{h_1} \to \infty$. Como el espacio h_1 no depende de la elección de η, podemos imponer $\eta(x) = 1$ para $x \in B(0, 1/2)$.

Para $\varepsilon < |x| \leq 1/4$, y tomando $r = 4|x|$, el cambio de variable $y \rightleftarrows \varepsilon z$ nos permite acotar

$$\begin{aligned} f^{\varepsilon,**}(x) &\geq \frac{1}{16|x|^2} \int_{B(0,1)} \eta\left(\frac{x-y}{4|x|}\right) f^\varepsilon(y) dy \\ &= \frac{1}{16|x|^2} \int_{B(0,1)} \eta\left(\frac{x-\varepsilon z}{4|x|}\right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{16|x|^2} \int_{B(0,1)} f(z) dz = \frac{1}{16|x|^2}, \end{aligned}$$

ya que $\int_{B(0,1)} f = 1$. Como $|x|^{-2}$ no es integrable en el origen (en dos dimensiones), tomando $\varepsilon \to 0$ concluimos

$$||f^\varepsilon||_{h^1} = ||f^{\varepsilon,**}||_{L^1} \to \infty.$$

□

Lo que muestra este ejemplo es que el teorema 4.4 necesita la hipótesis de signo. Sin embargo, este teorema solo utiliza la relación $\Delta\psi = \omega$, y no que ω sea solución de las ecuaciones de Euler. Un posible camino para probar la existencia de soluciones débiles tipo votex sheet sería probar que, independientemente del signo de ω, el término no lineal se acota en $h^1(B(0, R))$. Sigue siendo una pregunta abierta si esta propiedad es cierta o no.

Bibliografía

[1] R. A Adams and John J. F Fournier. *Sobolev spaces*. Academic Press, 2003.

[2] Vladimir I Bogachev. *Measure theory*. Springer, 2007.

[3] Russel E. Caflisch and Oscar F. Orellana. Singular solutions and ill-posedness for the evolution of vortex sheets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(2):293–307, 1989.

[4] Gianluca Ciampa, Gennaro; Crippa and Stefano Spirito. Weak solutions obtained by the vortex method for the 2D Euler equations are Lagrangian and conserve the energy. *arXiv.org*, 2019. https://arxiv.org/abs/1905.09720v1.

[5] Milton C.; Nussenzveig Lopes Helena J. Constantin, Peter; Lopes Filho and Vlad Vicol. Vorticity measures and the inviscid limit. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2019.

[6] Castro A.; Córdoba D. and Gancedo F. A naive parametrization for the vortex-sheet problem. *Mathematical Aspects of Fluid Mechanics*, pages 88–115, 2012. Cambridge University Press.

[7] Camillo De Lellis and László Székelyhidi. On turbulence and geometry: from Nash to Onsager. *Notices of the American Mathematical Society*, 66(05):677–685, 2019.

[8] Jean-Marc Delort. Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. *Journal of the American Mathematical Society*, 4(3):553, 1991.

[9] Ronald J. Diperna and Andrew J. Majda. Concentrations in regularizations for 2-d incompressible flow. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 40(3):301–345, 1987.

[10] L. C. Evans and S. Müller. Hardy spaces and the two-dimensional Euler equations with nonnegative vorticity. *Journal of the American Mathematical Society*, 7(1):199–219, 1994.

[11] Lawrence C Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. American mathematical Society, 1990.

[12] C. Fefferman and E. M. Stein. H^p spaces of several variables. *Acta Mathematica*, 129(0):137–193, 1972.

[13] G.B Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, 1976.

[14] John Garnett and Peter Jones. Bmo from dyadic bmo. *Pacific Journal of Mathematics*, 99(2):351–371, 1982.

[15] David Goldberg. A local version of real Hardy spaces. *Duke Mathematical Journal*, 46(1):27–42, 1979.

[16] Claude Greengard and Enrique Thomann. On Diperna-Majda concentration sets for two-dimensional incompressible flow. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(3):295–303, 1988.

[17] Peter W. Jones and Jean-Lin Journé. On weak convergence in $H^1(R^d)$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120(1):137–138, 1994.

[18] Robert Latter. A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms. *Studia Mathematica*, 62(1):93–101, 1978.

[19] Gilles Lebeau. Régularité du problème de Kelvin–Helmholtz pour l'équation d'Euler 2d. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 8:801–825, 2002.

[20] Leon Lichtenstein. Über einige existenzprobleme der hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser flüssigkeiten und die helmholtzschen wirbelsätze. *Mathematische Zeitschrift*, 23(1):89–154, 1925.

[21] Jian-Guo Liu and Zhouping Xin. Convergence of vortex methods for weak solutions to the 2-D Euler equations with vortex sheet data. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48(6):611–628, 1995.

[22] Helena J. Lopes Filho, M.C.; Nussenzveig Lopes and Zhouping Xin. Vortex sheets with reflection symmetry in exterior domains. *Journal of Differential Equations*, 229(1):154–171, 2006.

[23] Andrew Majda and Andrea L Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*. Cambridge University Press, 2002.

[24] Georges de Rham. *Varietés différentiables*. Hermann, 1955.

[25] Vladimir Scheffer. An inviscid flow with compact support in space-time. *Journal of Geometric Analysis*, 3(4):343–401, 1993.

[26] Steven Schochet. The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation. *Communications in Partial Differential Equations*, 20(5):1077–1104, 1995.

[27] Stephen Semmes. A primer on Hardy spaces, and some remarks on a theorem of Evans and Müller. *Communications in Partial Differential Equations*, 19(1-2):277–319, 1994.

[28] E. M Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. U.P., 1970.

[29] László Székelyhidi. Weak solutions to the incompressible Euler equations with vortex sheet initial data. *Comptes Rendus Mathematique*, 349(19-20):1063–1066, 2011.

[30] Roger Temam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, 1977.

[31] Italo Vecchi and Sijue Wu. On L^1-vorticity for 2-D incompressible flow. *Manuscripta Mathematica*, 78(1):403–412, 1993.

[32] W. Wolibner. Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogene, incompressible, pendant un temps infiniment long. *Mathematische Zeitschrift*, 37(1):698–726, 1933.

[33] Sijue Wu. Mathematical analysis of vortex sheets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8):1065–1206, 2006.

[34] V.I. Yudovich. Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 3(6):1407–1456, 1963.