

La realidad aumentada y su aplicación en el aula de Matemáticas

Jessica Nebril Aguado

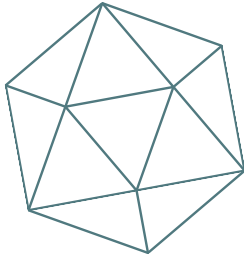
Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato

Especialidad Matemáticas



MÁSTERES
DE LA UAM
2019 – 2020

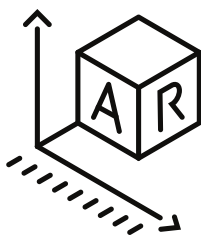
Facultad de Formación
de Profesorado y Educación



LA REALIDAD AUMENTADA Y SU APLICACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS



MÁSTER EN FORMACIÓN DEL DOCENTE EN EDUCACIÓN
SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO
CURSO 2019/2020



Autora: Jessica Nebril Aguado
Tutores: Angélica Benito Sualdea
Álvaro Nolla de Celis

Resumen

En este Trabajo de Fin de Máster se realiza un recorrido por las últimas investigaciones realizadas para la implementación de la Realidad Aumentada en Educación, haciendo un énfasis mayor en el aula de Matemáticas. Se hará un breve estudio sobre las diferentes aplicaciones existentes en la actualidad, descartando aquellas que se salgan del nivel de Secundaria y Bachillerato. Por último, se detallarán cada una de las tres propuestas didácticas para implementar la Realidad Aumentada en el aula de matemáticas de Secundaria y Bachillerato: la primera centrada en la visualización de las diferentes cónicas en el Cono de Apolonio con la ayuda de GeoGebra RA. La segunda basada en el estudio de las posiciones relativas entre 2 y 3 planos en el espacio usando también la aplicación de GeoGebra RA, y la tercera desarrollada mediante un Break Out en el que se incluye el uso de marcadores con Aumentaty.

Abstract

In this Master Thesis, we make an overview of the latest researchs carried out for the implementation of Augmented Reality in Education, with particular emphasis on the Mathematics classrooms. To this end, we review some of the journal publications and books and make a brief study of several of the Augmented Reality apps that currently exist, discarding those of them that go beyond Secondary Education. In particular, we analyze GeoGebra AR and Aumentaty, both softwares with a high didactical profile. Finally, we present and detail the three AR didactical proposals to be implemented at highschool mathematical classrooms: the first uses GeoGebra RA to visualize all the conics in the Apolonio cone. The second one, also using GeoGebra AR, study the relative positions of planes in the space. The last one is a Break Out where we introduce Aumentaty markers.

ÍNDICE

1. Introducción	3
2. Objetivos	5
3. Metodología	6
4. Marco teórico	6
4.1. Realidad aumentada	6
4.2. Realidad aumentada en educación	8
4.3. Realidad aumentada en matemáticas de Secundaria y Bachillerato.....	12
4.3.1. Experiencias previas con RA en educación matemática	13
4.3.2. Realidad aumentada y gamificación matemática	15
4.3.3. La realidad aumentada y los paseos matemáticos	16
4.3.4. Aplicaciones de RA para matemáticas	17
4.4. GeoGebra	19
4.4.1. Graficadora 3D.....	20
4.5. Aumentaty	22
5. Propuesta	23
5.1. El cono de Apolonio	23
5.1.1. Marco legislativo.....	23
5.1.2. Propuesta	23
5.2. Posiciones relativas	29
5.2.1. Marco legislativo.....	29
5.2.2. Propuesta	29
5.3. El Comienzo del Todo	34
5.3.1. Marco legislativo.....	34
5.3.2. Propuesta	34
6. Conclusiones	45
7. Líneas de investigación futuras	47
Anexo	48
1. Ficha de trabajo propuesta “Posiciones relativas”	48
2. Sesión Sistemas de Numeración	50
3. Repositorio de enlaces de actividades	53
Referencias	54

1. Introducción

Las nuevas tecnologías se han hecho imprescindibles en nuestra vida diaria. Usamos los dispositivos móviles para comunicarnos a través de las redes sociales, ver series, películas, e incluso, para escuchar música. En otras ocasiones incluso nos apoyamos en ellos para crear material para estudiar o impartir clases, aunque algunos docentes sienten aún rechazo ante la idea de introducir estos dispositivos en el aula.

En los últimos años y con la implementación del uso de las TICs en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO, de aquí en adelante) y Bachillerato, hemos visto como esta implementación en las aulas se centra, en su mayoría, en el uso de varios softwares mediante ordenadores, a pesar de que existen otras posibilidades que permiten el uso de otros dispositivos como los propios teléfonos móviles o *tablets*.

En este Trabajo de Fin de Máster, TFM, realizaremos una investigación sobre qué es la Realidad Aumentada (de aquí en adelante, RA), su historia, sus principales ventajas y desventajas, así como la clasificación de las aplicaciones según el nivel de RA que presenten. A partir de aquí se hará un recorrido por las últimas investigaciones realizadas para la implementación del uso de este tipo de aplicaciones en educación. Profundizaremos más y conoceremos los puntos a tener en cuenta a la hora de crear o realizar actividades con RA, las ventajas e inconvenientes que presenta cuando se implementan en la educación, y algunos ejemplos para llevarla a cabo como podrían ser, entre otros, mediante libros o en trabajos de campo.

Una vez hayamos acabado el recorrido por algunas de las posibilidades existentes en diferentes materias, nos enfocaremos en la asignatura de Matemáticas. En este caso haremos un estudio más profundo a través de diversas publicaciones, artículos y libros. Revisaremos diferentes prácticas de implementación de la RA en el aula a través de diversos softwares y las oportunidades que nos brinda cada uno de ellos. Seguidamente realizaremos una búsqueda de softwares de RA para Matemáticas a todos los niveles y descartaremos aquellas que se salgan del nivel de Secundaria y Bachillerato. Al final de esta sección estudiaremos y analizaremos los dos softwares que usaremos para nuestra propuesta didáctica, GeoGebra y Aumentaty, viendo sus principales características.

A continuación, se detallarán las tres propuestas didácticas que se exponen en el presente trabajo. La primera de las propuestas irá destinada al curso de 1º de Bachillerato del itinerario de Ciencias. En ella se estudiarán las diferentes secciones cónicas a partir

de un *applet* realizado con GeoGebra para su posterior visualización con RA. Ante la situación que se ha producido a causa de la pandemia de la COVID-19, se han realizado 4 variantes de la propuesta abarcando todos los escenarios de confinamiento posibles a los que nos podríamos enfrentar.

La segunda de las propuestas está enmarcada en el 2º curso de Bachillerato del itinerario de Ciencias. En ella se les pedirá a los alumnos que realicen un estudio sobre las distintas posiciones relativas entre 2 o 3 planos. Para ello se les hará entrega de una ficha de trabajo en la que se les darán las pautas para construir los objetos matemáticos necesarios en GeoGebra, además de varias cuestiones que deberán contestar sobre las hipótesis para que se den las distintas posiciones relativas.

La última propuesta está destinada para el curso de 2º ESO y nace con la intención de mostrar una actividad diferente de implementar la RA fuera del bloque de Geometría. Esta actividad consistirá en un *Break Out* que, como se verá en la sección 4.3.2., es una actividad basada en la gamificación, en la que los alumnos deberán resolver varias pruebas para conseguir abrir una caja con diferentes candados. El Break Out que se presenta en nuestra propuesta está basado en varias civilizaciones que fueron importantes en el campo de las matemáticas por la creación de sistemas de numeración y sus aportaciones a la historia. En ella se trabajará con todos los bloques definidos en el currículo menos el bloque 4, referente a Análisis. Para su desarrollo usaremos tanto la herramienta de GeoGebra y GeoGebra RA como las de Aumentaty.

A la hora de realizar cada una de las propuestas se seguirá un mismo guion basado en los siguientes puntos: marco legislativo en el que quedará enmarcada la actividad, conocimientos mínimos necesarios para su desarrollo, los objetivos a conseguir, los recursos necesarios para su realización, el desarrollo de la propia actividad, la evaluación de cada una de ellas mediante rúbricas y una encuesta final con el propósito de conocer la opinión del alumnado sobre la misma y las posibles mejoras a futuro.

Por último, detallaremos las conclusiones sobre el trabajo, las limitaciones que hemos encontrado a GeoGebra RA y Aumentaty y las líneas de investigación futuras.

2. Objetivos

Los objetivos generales de este trabajo son dos. El primero de ellos se basaría en investigar y conocer las diferentes formas de implementar la Realidad Aumentada en el aula de ESO y Bachillerato, así como conocer y estudiar las aplicaciones de GeoGebra RA y Aumentaty. Mientras que, por otro lado, el segundo de ellos sería realizar una propuesta didáctica sobre la implementación de la RA en diferentes cursos de ESO y Bachillerato apoyándonos en la investigación realizada a través de los diferentes estudios.

En concreto, en este trabajo se desarrollarán tres propuestas de actividades en el aula de matemáticas: una de ellas estará destinada a 2º ESO y las otras dos a los cursos de Bachillerato del itinerario de Ciencias, es decir, una irá destinada a 1º y la otra a 2º.

Los objetivos específicos que se pretenden conseguir en este trabajo son:

- Conocer diferentes propuestas sobre implementación de RA en el aula de matemáticas.
- Estudiar las posibilidades educativas que ofrece la herramienta GeoGebra RA para implementar la RA en el aula de matemáticas.
- Estudiar las posibilidades educativas que ofrece la herramienta Aumentaty para la creación de diferentes actividades.
- Realizar una propuesta didáctica en el aula de 2º ESO para la implementación de la RA mediante GeoGebra y Aumentaty mediante un *Break Out*,
- Realizar una propuesta didáctica para 1º de Bachillerato del itinerario de Ciencias mediante la aplicación de GeoGebra RA para el estudio de las diferentes secciones cónicas.
- Realizar una propuesta didáctica para 2º de Bachillerato del itinerario de Ciencias mediante la aplicación de GeoGebra RA para el estudio de las posiciones relativas entre 2 y 3 planos.

3. Metodología

La metodología que se ha llevado a cabo durante este trabajo se ha basado en la revisión bibliográfica de distintas publicaciones y revistas docentes sobre las diferentes propuestas realizadas para la implementación de herramientas de RA en la enseñanza, concretando más en lo referente a la materia de matemáticas.

Una vez acabado este recorrido a través de las distintas propuestas ya realizadas y su estudio, se procedió a realizar una búsqueda de información sobre las diferentes aplicaciones de RA que tuvieran relación con la asignatura de matemáticas. Se estudió los distintos niveles educativos en los que se pudieran aplicar, y se fueron descartando aquellas que estuviesen fuera de nuestro objetivo de implementación en la ESO y Bachillerato. A partir de esta búsqueda seleccionamos dos aplicaciones, GeoGebra y Aumentaty para estudiarlas más en profundidad y realizar la propuesta didáctica en base a ellas.

A la hora de realizar las diferentes propuestas que se muestran en el presente trabajo, en el caso de las dos destinadas a los cursos de Bachillerato, pensamos en mostrar aquellos conceptos en los que los alumnos presentan una mayor dificultad de una manera más visual y tangible. Mientras que la propuesta para el curso de 2º ESO nace con la intención de introducir nuevas metodologías emergentes, como la gamificación, a partir de herramientas tecnológicas de manera que se puedan abarcar varios de los bloques definidos en el currículo.

4. Marco teórico

4.1. Realidad aumentada

La RA es el conjunto de tecnologías que ofrecen una experiencia al usuario basada en la visión del mundo físico, a la que se le añade información digital en tiempo real y que puede venir dada mediante una imagen, texto, audio, vídeo u objetos 3D entre otros. Para poder llevar a cabo este tipo de experiencias es necesario utilizar dispositivos tecnológicos como una *tablet*, un *smartphone* u ordenadores en sus diferentes variantes, siempre que dispongan de una webcam.

A pesar de que el término de “Realidad Aumentada” se le atribuye a Tom Caudell en 1992, fue en 1968 cuando Ivan Sutherland desarrolló el primer sistema de visualización de RA, véase (Cózar et al., 2015) para más detalles.

Las aplicaciones de la RA son muy variadas y podemos encontrarlas en diferentes ámbitos como las telecomunicaciones, el deporte, la arquitectura, el marketing, el ocio, la medicina y la enseñanza entre otras.

Alguna de las características principales de la realidad aumentada son las siguientes:

- Combina elementos reales y virtuales.
- Es interactiva en tiempo real.
- Fomenta el desarrollo, construcción y uso de elementos en 3D.

Las aplicaciones de RA se clasifican según los denominados niveles de RA. Estos niveles vienen definidos por los diferentes grados de complejidad de las tecnologías que se quieran implementar. En 2009 Lens-Fitzgerald dio la clasificación sobre los diferentes niveles (Cózar et al., 2015):

- **Nivel 0** (enlazado con el mundo físico): En este nivel entran las aplicaciones que enlazan el mundo físico mediante códigos de barras como, por ejemplo, los códigos QR. Estos códigos actúan como enlace a otros contenidos de manera que no existe ningún registro en 3D, ni seguimiento de marcadores.
- **Nivel 1** (RA con marcadores): En este nivel están las aplicaciones que utilizan marcadores entre ellos imágenes 2D como, por ejemplo, imágenes en blanco y negro, de forma cuadrada y con dibujos esquemáticos, para el reconocimiento de patrones 2D. En él también se permite el reconocimiento de objetos 3D, aunque se dan en el nivel más avanzado del mismo.
- **Nivel 2** (RA sin marcadores): En este nivel encontramos las aplicaciones que se ayudan del GPS y la brújula de los *smartphones* para determinar la localización del usuario y de esta manera mostrarle puntos de interés sobre las propias imágenes del mundo real. En este nivel también encontramos aplicaciones que se ayudan del reconocimiento de las superficies gracias a la cámara de los dispositivos móviles para posicionar el contenido digital en dicha superficie.
- **Nivel 3** (Visión aumentada): En este nivel encontramos dispositivos como las Google Glass, o HoloLens. Estos dispositivos son capaces de ofrecer una experiencia al usuario mucho más personal e inmersiva que las que ofrecen los niveles anteriores. En este nivel encontramos muchas aplicaciones destinadas a videojuegos e, incluso, en museos, monumentos históricos o espacios naturales inaccesibles.

4.2. Realidad aumentada en educación

En la actualidad, vivimos en una sociedad en la que internet es una parte imprescindible en nuestras vidas tanto a nivel personal como profesional. Aunque la mayor parte de la sociedad ha tenido que amoldarse a esta “era de la información” muchos de los alumnos de la actualidad, son “nativos digitales” como los denominó Marc Prensky. Estos han sido la primera generación en crecer con esta tecnología. Para ellos interactuar con las nuevas herramientas tecnológicas es mucho más sencillo que para sus predecesores. Consumen rápidamente cualquier tipo de información independientemente del medio del que venga, lo que les permite estar en constante comunicación con sus similares y, además, son capaces de crear contenido de cualquier tipo mediante estos medios (Prensky, 2001).

De esta manera podríamos llegar a pensar que la enseñanza podría verse revolucionada gracias a las características que presentan estas nuevas generaciones de alumnos. Sin embargo, si analizamos las escuelas de hoy en día con las de hace 100 años encontramos muchas semejanzas entre ambas.

En la siguiente tabla se muestran las características de la Escuela Tradicional frente a la Escuela Nueva:

Escuela Tradicional	Escuela Nueva
Escuela: principal fuente de información y de transformación cultural e ideológica de los ciudadanos.	Educación integral: La escuela es una comunidad que debe impulsar su afán y el deseo de aprender, pero también valores.
El docente es el centro del proceso de enseñanza	Alumno: centro del proceso de enseñanza-aprendizaje
El maestro sabe, el alumno aprende de memoria lo que el maestro sabe.	El alumno sabe, construye conocimiento, aprende y comparte con la ayuda del maestro.
Estudiante: papel pasivo, con poca independencia cognoscitiva y pobre desarrollo del pensamiento teórico.	Aprender haciendo. Formación del pensamiento crítico y desarrollo de la creatividad. Observación, manipulación, experimentación.
Currículo: muy rígido y con un gran volumen de información, con carácter secuencial y sin establecer relaciones entre materias.	Currículo: apoyado en los centros de interés del alumno. Debe procurar el equilibrio entre las necesidades sociales y los intereses y exigencias del alumnado.

Enseñanza abstracta, memorística, vertical.	Enseñanza respetuosa con las necesidades e intereses del alumno. Confiere autonomía al alumno para que haga sus propias investigaciones.
Metodología fundamental: exposición verbal por parte del maestro.	Metodologías activas que implican colaboración del alumno.
Relación alumno-docente basada en el predominio de la autoridad, mediante una disciplina impuesta.	La relación maestro-alumno se basa en el afecto, el diálogo y la amistad.
Se exige sobre todas las cosas obediencia a las normas y el orden.	Desarrollo del espíritu crítico y democrático del alumno. El maestro propone, argumenta, comenta y consensua con el alumno las reglas del juego.
Evaluación dirigida al resultado mediante ejercicios reproductivos.	Evaluación continuada, formativa, y sumativa. Forma parte del propio proceso de enseñanza/ aprendizaje.
Escuela: mundo aparte alejado de la vida cotidiana.	La escuela no debe ser una preparación para la vida sino la vida misma.

Tabla 1: Diferencias entre la escuela tradicional y la escuela nueva (Muñoz, 2014).

Al ver la tabla anterior podríamos confirmar que las similitudes entre ambas están presentes en muchas aulas de ahora, sin embargo, si recurrimos al **DECRETO 48/2015**, de 14 de mayo que establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y al **REAL DECRETO 1105/2014**, del 26 de diciembre que establece el currículo de Bachillerato observamos que una de las características principales en ambas etapas educativas es el uso de herramientas TIC.

Este cambio en el currículo respecto a las leyes predecesoras de educación ha contribuido a que tanto el docente como el alumnado vayan conociendo nuevas herramientas y que su uso tome un nuevo papel dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, desbancando así su uso solo a momentos puntuales.

Una de las herramientas digitales que nos afirman que su uso puede llevarse a cabo más allá de en un momento puntual es la RA. La RA está contribuyendo a la ruptura de las fronteras espacio-temporales de la escuela tradicional ya que las posibilidades de aplicar herramientas de este tipo en el aula son muy numerosas.

Para poder llevar a cabo este tipo de prácticas debemos tener en cuenta varios puntos clave:

1. **Objetivo educativo:** Qué queremos conseguir con la actividad. Entre los objetivos más usuales encontramos afianzar un concepto, repasar contenidos, estudiar nuevos conceptos...
2. **Conocimientos previos del alumnado:** Debemos tener en cuenta cuáles van a ser los conocimientos previos que debe tener el alumno para realizar las actividades.
3. **Tiempo disponible:** Tendremos que tener en cuenta el tiempo del que disponemos para poder llevar a cabo las actividades, así como el tiempo que necesitaremos para diseñarlas.
4. **Metodología:** Este es uno de los puntos más importantes a la hora de diseñar la actividad ya que no siempre una misma metodología va a resultar la mejor para cada actividad. Para el uso de RA podemos usar diversas metodologías, aunque destacarán especialmente todas aquellas en las que las actividades se lleven a cabo de manera colaborativa y cooperativa entre los alumnos.
5. **Herramienta o aplicación:** Debemos seleccionar muy bien la herramienta o aplicación con la que se va a llevar a cabo la actividad. Uno de los puntos a tener en cuenta es si la aplicación es gratuita o no ya que este punto sería determinante para que los alumnos puedan usarla también fuera del centro.

El uso de la RA en el aula puede venir dado de diferentes maneras. A continuación, se muestra una selección de ejemplos para implementarla (Blázquez, 2017; Lee, 2012):

- **Libros digitales:** Se puede añadir tanto a los libros en formato papel como a los electrónicos utilizando marcadores o códigos QR para activar la información del libro o incluso añadir información extra sobre el tema.
- **Prácticas en laboratorios de física y química o biología:** Se pueden realizar diferentes prácticas de laboratorio usando la RA de manera que, al visualizar cada instrumento, los alumnos obtengan información sobre cómo usarlo o las instrucciones de una práctica concreta mediante vídeos o imágenes. En el laboratorio de Biología se podría usar la RA para estudiar el cuerpo humano o las características de los minerales, entre otros muchos usos.
- **Trabajos de campo:** Se pueden usar estas herramientas a la hora de asociar información a los objetos de estudio tanto por parte del docente como del alumnado. También se pueden realizar paseos o rutas por la ciudad de manera que a medida que se realiza la actividad, y los alumnos van pasando por sitios

emblemáticos o de interés descubran información sobre estos. Una de las ventajas de este tipo de trabajos es que se pueden llevar a cabo en cualquier asignatura.

- **Eventos:** Podríamos usar la RA para los eventos del propio centro como graduaciones, excursiones, posters o eventos de manera que al usar códigos QR en los paneles de información tanto los alumnos como los docentes puedan obtener más información sobre los diferentes eventos a través de su dispositivo móvil.

En cuanto a las ventajas e inconvenientes que presentan este tipo de herramientas en el aula se muestra a continuación una tabla con los más destacados de los artículos e informes que se han ido consultando a lo largo del estudio del presente trabajo (Cózar et al., 2015; Blázquez, 2017).

Ventajas	Inconvenientes
Desarrollo de habilidades cognitivas	Requiere formación del docente
Desarrollo de habilidades perceptivo-motoras	Pueden surgir problemas técnicos
Construcción del conocimiento por parte del alumno	Sobrecarga cognitiva
Formación de actitudes de reflexión	Puede distraer la atención de los alumnos en determinadas ocasiones
Aumenta la motivación por el aprendizaje	Brecha digital
Se refuerzan capacidades y competencias	Los alumnos pueden caer en un aprendizaje vago
La actitud del alumno es más positiva frente al proceso de enseñanza-aprendizaje	Falta de experiencia educativa
Refuerza la atención, concentración y la memoria tanto a corto como a largo plazo	Carencia de marcos conceptuales que aporten bases para la toma de decisiones para su incorporación
Mayor accesibilidad ya que el alumno puede recurrir a ella cuando lo necesite	
Desarrollo de destrezas tecnológicas	
Mayor información	
Mejora la confianza del alumno	
Desarrollo de las habilidades espaciales	
Proporciona oportunidades de colaboración entre los alumnos	

Facilita la comunicación alumno-docente	
Promueve el autoaprendizaje	
Rompe la monotonía de las clases tradicionales	
Fomenta la participación	
Muchas de las tecnologías son gratuitas	
El docente puede crear contenidos digitales educativos propios	
Accesibilidad	

Tabla 2: Ventajas e inconvenientes de la RA en educación.

4.3. Realidad aumentada en matemáticas de Secundaria y Bachillerato

La información tecnológica, así como su fácil acceso nos ha permitido evolucionar de una manera más rápida y ágil hacia un nuevo desarrollo sobre el enfoque de la enseñanza de las matemáticas tanto en el trabajo dentro del aula como fuera de ella.

El uso de dispositivos móviles, como *tablets* y *smartphones*, ha potenciado mucho el uso de determinadas aplicaciones matemáticas, entre ellas aplicaciones de RA. El uso de este tipo de aplicaciones facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que durante este tipo de prácticas el alumno llega a interactuar a tres niveles diferentes: nivel real, nivel virtual y nivel cognitivo. De esta manera lo que se busca es que mediante estas prácticas el alumno convierta la información que se le brinda mediante estos medios en conocimientos (Hernández et al., 2012).

Todas las investigaciones que hemos revisado durante este trabajo afirman que gracias a la RA y sus diferentes usos dentro del aula, los alumnos se verán más motivados ante la materia, mejorarán su capacidad de visualización de objetos matemáticos y podrán trabajar desde casa lo visto en el aula, así como nuevos conceptos todas las veces que quieran. Otra de las ventajas que más destacan referentes al alumnado es que gracias a este tipo de aplicaciones el proceso de aprendizaje llevado a cabo por su parte puede llegar a ser más flexible e individualizado.

Por la parte del docente, las ventajas que presenta el uso de este tipo de aplicaciones están muy encaminadas al trabajo en el aula. Gracias a ellas el docente puede disponer de más tiempo durante las clases para resolver dudas e incluso, puede llegar a implementar nuevas metodologías en las que se trabaje de una manera más colaborativa con aplicaciones de este estilo. Otra de las ventajas que podríamos señalar es que el docente puede diseñar sus propios materiales a su gusto, con las modificaciones que crea

oportunas dependiendo del tipo de alumnado con el que vaya a trabajar en cada momento, atendiendo así a la diversidad de la clase de la mejor manera posible.

4.3.1. Experiencias previas con RA en educación matemática

Durante los últimos años se han realizado numerosas investigaciones sobre cómo introducir la RA en las aulas de Secundaria y Bachillerato. En esta sección veremos algunas de las investigaciones que se han realizado, así como diferentes actividades o proyectos que se han llevado a cabo.

La Universidad de Comenius de Bratislava tiene un programa que consiste en un Máster para futuros docentes de Educación Secundaria y Bachillerato. En él tendrán que elegir entre diferentes programas de estudio, combinando matemáticas con cualquier otra asignatura de ciencias y, además, aprenderán la variedad de materiales que están disponibles online, así como su fiabilidad para ponerlos en práctica durante sus futuras clases. En definitiva, el programa se basa en tres partes: pedagogía, matemáticas y la asignatura que haya elegido cada estudiante en las que, además, los alumnos trabajarán y analizarán nuevas herramientas tecnológicas (Babinská, 2019).

En los estudios que han realizado sobre las actividades efectuadas con los alumnos destaca uno de los softwares, *Augmented Polyhedrons*. Con esta aplicación realizan diferentes actividades sobre calcular áreas o medidas de diferentes cuerpos geométricos (Babinská, 2019).

En (Figueiredo, 2015) nos hablan sobre cómo crear material de RA basado en marcadores puede ser de gran ayuda para solucionar los problemas que les surgen a los alumnos a la hora de realizar problemas de matemáticas en casa. Durante el artículo nos muestran diferentes ejemplos sobre actividades de matemáticas usando *Microsoft tags*. El docente les da a los alumnos un PDF en el que al lado de cada enunciado aparece un código QR. Al escanearlo éste activa un texto explicativo, un enlace a una página, un vídeo explicativo sobre teoría, el ejercicio o, incluso, la solución del problema propuesto. De esta manera los estudiantes desde casa pueden recurrir a esas “ayudas” si les surge alguna duda y, además pueden ver si la solución que han obtenido al resolver el problema es correcta o no.

En conclusión, (Figueiredo, 2015) afirma que el uso de la RA en el aula puede motivar a los alumnos y, además, su uso contribuye a extender la clase a un espacio virtual

en el que los estudiantes tienen más tiempo y recursos para poder desempeñar el proceso de aprendizaje de una manera más sencilla.

En (Yingprayoon, 2015) nos dice que las construcciones de objetos en 3D combinan cuatro áreas de investigación: geometría, pedagogía, psicología y RA. Además, nos muestra cómo construir modelos geométricos 3D mediante el software *Autodesk Maya*¹. A pesar de que este software es de pago, tiene muchas opciones para crear todo tipo de objetos matemáticos en 3D, simplemente haciendo clic en las diferentes pestañas en las que se divide el programa.

Para poder visualizar la construcción con AR es necesario usar otro software para verlo en el mundo real. El software que nos presenta (Yingprayoon, 2015) es *Augmented*². Lo único que tendremos que hacer para poder ver nuestro modelo es usar una imagen de fondo que nos sirva como marcador para poder activar el objeto.

De esta manera propone que los docentes creen diferentes modelos geométricos con RA apoyándose en el libro de texto que usen o en hojas de trabajo que les vayan a mandar a los alumnos como marcadores de manera que estos puedan visualizar posteriormente los diferentes modelos con la ayuda del móvil o una *tablet*.

Otros autores como (Kaufmann & Schmalstieg, 2003) y (Lee, 2012) nos muestran un modelo de RA mucho más inmersivo que los anteriores. Ambos nos hablan sobre la herramienta *Construct3D*³, diseñada específicamente para la enseñanza de geometría. Esta aplicación permite que varias personas trabajen sobre una misma construcción a la vez, siempre y cuando ambas personas lleven puesto el equipo. El equipo necesario para poder llevar a cabo esta inmersión consta de un casco, unas gafas HMDs y un micrófono. De esta manera pueden comunicarse entre ellos en todo momento. Con esta herramienta los alumnos son capaces de crear los objetos matemáticos más simples e ir avanzando hasta poder, incluso, sacar propiedades de ciertas superficies. Una de las características más destacables de esta aplicación es que el alumno ve en todo momento sus manos y los cambios que van realizando de manera que la inmersión es mucho mayor que en los vistos anteriormente. Kaufmann dice “...*este es el factor clave en el éxito del uso de RA para la enseñanza de geometría*” (Kaufmann & Schmalstieg, 2003, p. 342).

¹ Autodesk Maya: <https://www.autodesk.com/education/free-software/maya>

² Augmented: <https://www.augment.com/>

³ Construct3D: <https://www.construct3dconf.com/>

Otra de las características más destacables de esta aplicación es que al construir cada objeto, este se va dividiendo en diferentes capas para poder trabajarlas de manera independiente. Gracias a esto se diferencian tres modos de trabajo de la aplicación: un modo independiente, un modo colaborativo y un modo maestro. Además, durante el uso de la herramienta el resto de los alumnos pueden ver una proyección del objeto según se va construyendo. De esta manera todos los alumnos pueden ser partícipes de una forma u otra durante la actividad.

En la actualidad se están realizando planes para integrar esta herramienta en las escuelas de Educación Superior de Australia.

4.3.2. Realidad aumentada y gamificación matemática

Actualmente existen numerosas metodologías para desempeñar cualquier tipo de actividad en el aula. Sin embargo, una de las que más fuerza está tomando en los últimos años es la “Gamificación”.

(Lee, 2012) nos habla sobre cómo llevar a cabo la RA a través de la Gamificación, es decir, mediante el aprendizaje basado en juegos. En el artículo Lee nos habla sobre *The Horizon Report* de 2010. En él nos dice lo siguiente sobre este tipo de prácticas: “Los juegos que se basan en el mundo real y son aumentados con datos en red dan a los educadores maneras nuevas y útiles de mostrar relaciones y conexiones” (Johnson, 2010, p. 25). Es decir, gracias a este tipo de prácticas podemos romper la rutina del aula haciéndola mucho más dinámica, y podemos adaptar este tipo de prácticas según el objetivo que queremos conseguir en ese momento (repasar un concepto, una Unidad Didáctica, repaso del curso, actividades de ampliación, acertijos...). Dentro de este tipo de prácticas destacan dos: los *Escape Room* y los *Break Out*.

Una de las características principales entre ambas es que los *Escape Room* giran en torno a una “historia” y su finalidad es salir del aula tras haber superado diferentes actividades, mientras que en el *Break Out* su misión es abrir una caja con diferentes candados. En ambos se puede poner un tiempo límite para superar la prueba, aunque este aspecto es más característico de los *Escape Room* que de los *Break Out* (Gómez, 2018; De la Mano, 2018).

Una de las ventajas más destacadas de este tipo de prácticas con RA es que el alumno puede interactuar con los elementos de la actividad cuando se acerca a la ubicación vinculada o cuando activa el recurso al escanear un marcador. Algunas ventajas que

podemos encontrar son que el trabajo se realiza de forma colaborativa y cooperativa por parte de los alumnos, permiten que el alumno se centre en la consecución de un objetivo común, el aprendizaje se realiza de una manera más divertida, se desarrolla el pensamiento crítico y, sobre todo, el alumno es el protagonista de la actividad (De la Mano, 2018).

4.3.3. La realidad aumentada y los paseos matemáticos

Por último, podríamos destacar una de las aplicaciones más novedosas de la RA, los paseos matemáticos. En (Botana et al., 2019, p. 353) nos describen los paseos matemáticos como “...*rutas a través de entornos del mundo real que nos permiten descubrir diferentes aspectos matemáticos de objetos y ubicaciones del mundo real.*”. Estas rutas pueden realizarse por una gran variedad de lugares, desde zonas urbanas hasta la naturaleza. En cualquiera de ellas el docente puede diseñar las tareas que crea convenientes basándose en lugar y las situaciones cotidianas que quiera exponer a través de las matemáticas. Entre los diferentes tipos de paseos destacan los paseos realizados sobre lugares históricos o monumentos.

Uno de los proyectos más importantes a nivel europeo es el Proyecto MoMaTre⁴, Mobile Math Trails in Europe. Este proyecto busca apoyar y difundir ideas de rastros matemáticos con dispositivos móviles en Europa, es decir, que durante estos paseos o rutas se pueda descubrir y resolver diferentes problemas matemáticos. El proyecto proporciona material para que los docentes puedan llevar a cabo actividades matemáticas al aire libre y, además, apoya a los docentes para que creen cursos para estudiantes universitarios de educación para enseñarles a enriquecer sus clases al aire libre. En su web encontramos un catálogo de actividades para poder llevar a cabo este tipo de actividades, además de cronogramas para un plan de estudio a largo plazo tanto para docentes como futuros docentes (MoMaTre, s.f.).

Otro de los proyectos que surgió ante la necesidad de combinar este concepto de ruta con el uso que las tecnologías móviles nos brindan en la actualidad es MathCityMap. Este surgió en 2012 y con él, se pretende facilitar el aprendizaje del alumno mediante la modelización matemática del lugar seleccionado a través del uso de la aplicación que lleva su mismo nombre. Con la revolución de la industria 4.0 se esperaba que la tecnología de este tipo de aplicaciones evolucionase a la RA. Gracias a esta revolución ha surgido el

⁴ MoMaTre: <http://momatre.eu/the-project/>

programa AR-MobileMathTrails basado en el concepto de MathCityMap, pero incluyendo la RA. Con esta aplicación podemos geolocalizar cada lugar y una vez allí, proyectar la información u objetos que queramos. La aplicación del proyecto llega a soportar un máximo de 6 grupos compuestos cada uno de ellos por 5 alumnos. Durante el paseo los diferentes grupos descubrirán la localización exacta del lugar en el que tienen que realizar la actividad mediante los marcadores que les aparecerán la aplicación. Una vez allí obtendrán toda la información necesaria del problema, aunque si surgiese algún problema los alumnos podrán obtener pistas escaneando un código de barras que se les habrá entregado previamente. Este tipo de actividades además de motivar al alumno a aprender cómo aplicar las matemáticas en el mundo que le rodea, les ayuda a comprender problemas reales, es decir, la aplicación móvil con RA actúa como puente entre los conceptos matemáticos y las situaciones del mundo real (Cahyono et al., 2020).

Existen muchos paseos matemáticos para realizar en España, uno de los más destacados es el Paseo Matemático por Granada. Este paseo consiste en descubrir las figuras matemáticas que se esconden detrás de los símbolos más emblemáticos de la ciudad. Para poder llevar esto a cabo se han apoyado en GeoGebra y sus múltiples herramientas, ya que gracias a algunas de ellas podemos hasta reconstruir monumentos en ruinas. El usuario simplemente tendrá que acercarse al lugar y cuando el GPS de su dispositivo móvil reconozca la localización exacta, le mostrarán la información matemática relativa al monumento. Otra técnica que nos muestra (Botana et al., 2019) para llevar a cabo estos paseos sería la basada en el reconocimiento de imágenes. Para ello se usaría el reconocimiento de formas geométricas a partir de patrones sin necesidad de geolocalización ni marcadores (MoMaTre, s.f.; Desqbre Fundación, s.f.).

En definitiva, existe una gran variedad de actividades para poder introducir la RA en el aula y fuera de ella, dependiendo del contexto de cada actividad o centro.

4.3.4. Aplicaciones de RA para matemáticas

En esta sección veremos algunas de las aplicaciones de RA para el aula de matemáticas de ESO y Bachillerato. Además, se realizará una breve descripción de sus características principales y veremos en qué campo de aplicación se ajustan más.

- **Arloon:** Es una aplicación española en la que podemos encontrar varias aplicaciones para diferentes materias y niveles educativos. Tiene dos aplicaciones para matemáticas, una de ellas está destinada al cálculo mental matemático para

los alumnos de Educación Primaria, *MentalMath*, mientras que la otra, *Geometry*, está destinada al estudio de diferentes cuerpos geométricos. Esta última podría valer tanto para el aprendizaje de alumnos de Primaria como a los alumnos de los dos primeros cursos de la ESO. Ambas se encuentran disponibles tanto para IOS como Android, pero son de pago (Arloon, s.f.).

- **Autodesk Maya:** Es un software con el que podemos desde crear animaciones 3D hasta gráficos de movimiento y efectos visuales. Uno de sus puntos a favor es que dispone de muchas herramientas para la creación de objetos matemáticos en 3D. El software es de pago y sólo está disponible para PC, aunque tienen habilitados varios recursos para estudiantes, docentes y centros (Yingprayoon, 2015).
- **Construct3D:** Herramienta para la creación de objetos matemáticos en 3D de manera colaborativa o individual. Se necesita de un laboratorio equipado de pantallas digitales, punteros y gafas de RA entre otros para poder llevar a cabo las actividades como vimos en el apartado anterior (Kaufmann & Schmalstieg, 2003).
- **Geometry - Augmented Reality:** Aplicación basada en marcadores con la que podemos crear en tiempo real puntos, rectas y polígonos. Con ella, además podremos calcular el área y perímetro de las figuras geométricas que hemos ido creando. Está disponible tanto para IOS como para Android y es gratuita.
- **Layar:** Herramienta destinada a la creación de activadores a las que denomina “page” y capas en las que se encontrará la información que queramos añadir ya sea una imagen, vídeo, audio, objetos 3D... Gracias a esta herramienta podremos “dar vida” a nuestros libros de texto, pósters o actividades. Está disponible tanto para IOS como para Android y, además, es gratuita (Blázquez, 2017).
- **MathCityMap:** Es una aplicación destinada a la creación de paseos o rutas matemáticas por ciudades. Con ella los estudiantes pueden descubrir las matemáticas que se esconden detrás de sitios emblemáticos de sus ciudades, así como desarrollar sus habilidades matemáticas. Aunque no es una aplicación de RA en sí, en un futuro se espera que se desarrolle esta función.
- **GeoGebra AR app y Aumentaty:** Veremos más en profundidad ambas aplicaciones en las secciones 4.4 y 4.5.

A pesar de que no encontramos una gran variedad de aplicaciones para introducir la RA en el aula, algunas de ellas como GeoGebra, pueden ser de gran ayuda más allá de la Geometría.

En el siguiente apartado se realizará un estudio más detallado sobre las herramientas GeoGebra y Aumentaty, ya que van a ser las dos aplicaciones que usaremos para nuestras propuestas didácticas.

4.4. GeoGebra

Markus Hohenwarter creó GeoGebra en 2002 como parte del proyecto de máster que estaba cursando en Austria. Se pueden trabajar con él los bloques de Álgebra, Análisis, Estadística y Probabilidad y Geometría (Prodromou, 2019).

GeoGebra se compone de diferentes aplicaciones para trabajar: *Calculadora científica*, *Calculadora gráfica*, *GeoGebra clásico*, *Graficadora 3D*, *Geometría* y *Realidad Aumentada*. Una de las más polivalentes es la aplicación GeoGebra clásico, ya que en ella podemos tener diferentes vistas dependiendo del tipo de trabajo que queramos realizar, es decir, tenemos una vista algebraica, una vista de cálculo simbólico (CAS), dos vistas gráficas, una vista 3D, una hoja de cálculo y otra vista para cálculos de probabilidad.

A continuación, se muestra una tabla comparativa entre las diferentes aplicaciones de las que dispone GeoGebra y sus características.

Aplicaciones - Características	 Calculadora científica	 Calculadora gráfica	 Geometría	 3D	 CAS	 Clásico
Cálculos numéricos	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Operaciones con funciones	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Operaciones con fracciones	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Gráficas		✓	✓	✓	✓	✓
Deslizadores		✓	✓	✓	✓	✓
Vectores y matrices		✓	✓	✓	✓	✓
Tabla de valores		✓			✓	✓
Construcciones Geométricas			✓	✓		✓
Gráficas 3D				✓		✓
Cálculos simbólicos				✓	✓	✓
Derivadas e integrales				✓	✓	✓
Soluciones de ecuaciones				✓	✓	✓
Realidad aumentada				✓		

Figura 1: Tabla comparativa entre las diferentes aplicaciones ampliada de la de GeoGebra. (GeoGebra, s.f.).

Además de la gran versatilidad GeoGebra también cuenta con un banco de recursos al que cualquier persona con cuenta pueda acceder y al que, además, puede aportar con sus creaciones de manera pública. GeoGebra está disponible tanto online como en ordenador y, además, dispone de aplicación para IOS y Android.

Para el desarrollo del presente trabajo y la propuesta didáctica nos centraremos en el uso de las aplicaciones de Graficadora 3D y Realidad Aumentada.

4.4.1. Graficadora 3D

La aplicación Graficadora 3D se compone de una vista algebraica y una vista gráfica 3D de manera que permite conectar la Geometría 3D con el Álgebra (GeoGebra Team German, s.f.).

La vista algebraica nos permite introducir de manera manual las fórmulas de los objetos que queramos graficar, aunque también disponemos de un menú desplegable con múltiples funciones para graficar algunos objetos matemáticos, poner textos e incluso, rotar o desplazar la vista de la gráfica 3D.

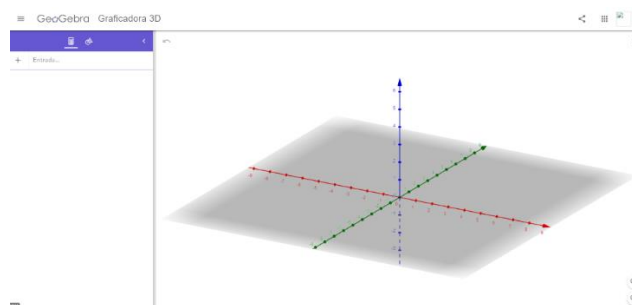


Figura 2: Vista algebraica Graficadora 3D GeoGebra.

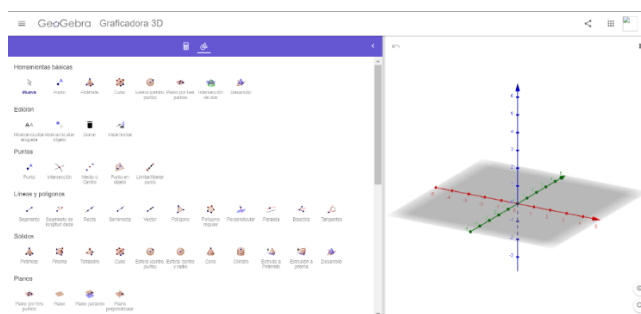


Figura 3: Herramientas disponibles en Graficadora 3D GeoGebra.

Entre las características que posee esta aplicación destacan las siguientes (Del Río, s.f.):

- Crear sólidos, esferas, planos...

- Obtener la intersección entre dos objetos (existe una opción específica para ello).
- Experimentar con deslizadores, puntos, objetos geométricos...de manera conjunta.
- Graficar funciones de dos variables.
- Utilizar construcciones realizadas por otros usuarios de GeoGebra.

Si además usamos la aplicación desde un dispositivo móvil podremos acceder a la visualización del objeto con RA:

- Arrastrar un objeto para cambiar su posición en la vista gráfica con los dedos.
- Acercar o alejar el objeto en la vista gráfica.
- Rotar el objeto.
- Acceder a la vista algebraica de manera rápida.

Además de todas estas características, la aplicación móvil disponible para Android nos da una funcionalidad más, la Realidad Aumentada. Haciendo clic en el botón de AR, situado en la esquina inferior derecha, se activará la cámara de nuestro dispositivo móvil y nos pedirá enfocar una superficie para poder posicionar nuestro objeto 3D en el mundo real. Para IOS tendremos que descargarnos la app de Graficadora 3D y la de GeoGebra RA, ya que son independientes.

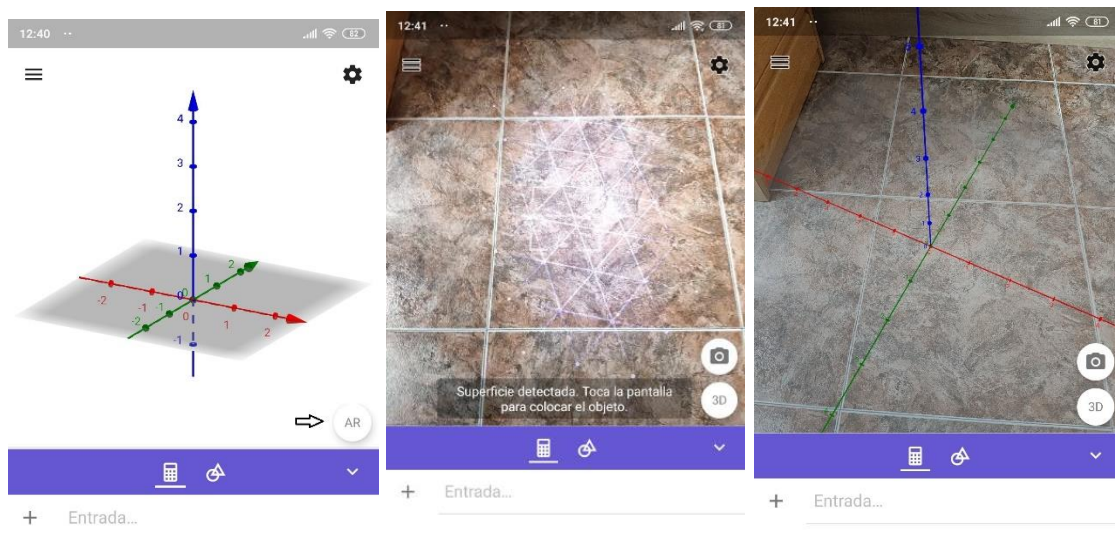


Figura 4: Proceso de activación de RA en la Graficadora 3D.

En todo momento nos aparecerá la vista algebraica de manera que podremos realizar cambios y verlos de inmediato sobrepuestos en la superficie que hayamos elegido para la vista de RA. En el caso de haber creado los objetos mediante deslizadores, podremos dar al botón de *play* y ver como varía nuestra construcción sin necesidad de estar cambiando

continuamente los datos. También podremos adentrarnos o alejarnos del objeto moviéndonos alrededor de él, ampliando y alejando con los dedos en la pantalla del dispositivo móvil, de manera que el usuario puede explorar la construcción desde cualquier perspectiva (Tomaschko & Hohenwarter, 2019).

Otra de las características de GeoGebra RA es que pertenece al grupo de aplicaciones de RA que no necesitan marcadores, ya que el contenido virtual se puede visualizar directamente y, además, se puede colocar en el mundo real. Esto es una de las mayores ventajas de la aplicación ya que se puede utilizar en cualquier lugar sin necesidad de puntos de referencia (Tomaschko & Hohenwarter, 2019).

4.5. Aumentaty

Anteriormente hemos visto que existen dos tipos diferentes de aplicaciones de RA: las basadas en marcadores y las que no necesitan marcadores. Aumentaty nos brinda la oportunidad de crear contenido con RA a través de diferentes tipos de “disparadores”. Entre ellos encontramos la opción de crear marcadores basados en imágenes, geolocalizar un lugar o asociar contenido mediante imágenes, enlaces o vídeos a un evento o acción (Aumentaty, s.f.).

La plataforma Aumentaty⁵ nació como una iniciativa impulsada por LabHuman con el fin de proporcionar soluciones en diversos ámbitos a través de un software. Entre sus características principales encontramos que es un software libre y que nos permite usar marcadores de una manera sencilla.

La plataforma se compone de diferentes softwares para la creación de escenas de RA (Aumentaty, s.f.):

1. **Aumentaty Creator:** Esta aplicación permite crear escenas en las que los objetos en 3D están vinculados a marcadores. Podemos asociar cualquier tipo de información multimedia como vídeos, documentos, imágenes...Con esta aplicación también podemos crear puntos de interés y rutas virtuales. Esta aplicación sólo está disponible, actualmente, para Windows.
2. **Aumentaty Scope:** Es la aplicación que permite visualizar los contenidos de la plataforma que hayan sido creados mediante la aplicación Creator. A diferencia de la aplicación Creator, ésta si está disponible tanto para IOS como para Android.

⁵ Aumentaty: <http://www.aumentaty.com/index.php>

5. Propuesta

A continuación, se detalla una propuesta de tres actividades didácticas con RA para llevar a cabo en el aula de Matemáticas.

Las actividades están destinadas para tres cursos diferentes: la primera está destinada para 1º de Bachillerato correspondiente al itinerario de Ciencias, la segunda será para 2º de Bachillerato del mismo itinerario, y la tercera será una actividad dirigida para el 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria.

5.1. El cono de Apolonio

Esta propuesta nace ante la dificultad que presentan muchos alumnos a la hora de poner en práctica la visión espacial.

5.1.1. Marco legislativo

Para situar la actividad dentro del marco legislativo nos hemos apoyado en el **Real Decreto 1105/2014**, de 26 de diciembre que establece el currículo básico de Bachillerato para la Comunidad Autónoma de Madrid. Por ello nuestra actividad quedaría enmarcada en el curso de 1º de Bachillerato del itinerario de Ciencias, concretamente en el Bloque 4 correspondiente a Geometría donde se trabajan las diferentes secciones cónicas.

5.1.2. Propuesta

A continuación, se detalla la propuesta de actividad en dos variantes. Estas dos variantes surgen ante la situación que se ha experimentado durante este curso escolar respecto a la docencia no presencial, debido a la pandemia de la COVID-19. Por ello la propuesta de actividad que se muestra posteriormente está pensada para llevarse a cabo tanto si la enseñanza se realiza de manera presencial o si por el contrario se realiza a distancia.

1. Conocimientos previos necesarios

Entre los conocimientos previos que se requiere que el alumno tenga para la realización de la actividad destacan los siguientes:

- Cuerpos y figuras geométricas.
- Vectores.
- Ecuaciones de la recta.
- Puntos y rectas simétricas.

- Ángulo entre dos 2 rectas.
- Mediatriz.
- Bisectriz.
- Ecuación y forma de la circunferencia.
- Ecuación y forma de la hipérbola.
- Ecuación y forma de la parábola.

2. Objetivos

Los objetivos que se pretenden conseguir con esta actividad, en sus diferentes variantes, son los siguientes:

- ✚ Mejorar la visualización espacial de los alumnos.
- ✚ Perder el miedo a la parte de matemáticas que requiere de un pensamiento más abstracto, en este caso la tridimensionalidad.
- ✚ Introducir nuevas tecnologías en el aula como la RA.
- ✚ Desarrollar las competencias digitales por parte del alumnado.
- ✚ Manejar la aplicación de GeoGebra.
- ✚ Entender cómo surgen las diferentes secciones cónicas mediante el uso de nuevas tecnologías que permitan trabajar con objetos matemáticos de una manera más tangible y visual.
- ✚ Desarrollar el razonamiento lógico y el pensamiento crítico para sacar las hipótesis sobre las diferentes cónicas.
- ✚ Cambiar la rutina del aula basada en explicaciones de tiza y pizarra.
- ✚ Hacer protagonistas a los alumnos sobre su propio aprendizaje.

3. Desarrollo de la actividad

La actividad “*El cono de Apolonio*” consistirá en introducir los lugares geométricos, en concreto las diferentes secciones cónicas, mediante un *applet* realizado con GeoGebra, en el que se muestra cómo surgen las diferentes cónicas cuando un plano va intersecando un cono con diferentes inclinaciones del mismo.

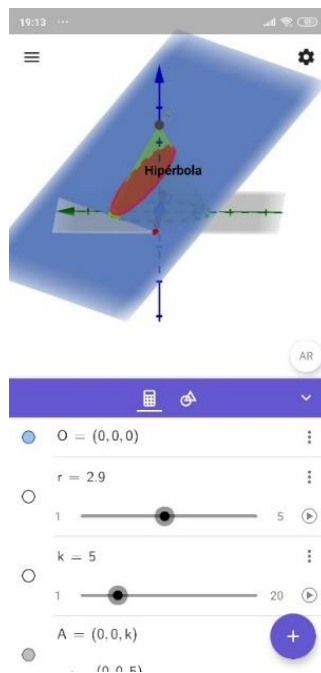


Figura 5: Applet del Cono de Apolonio realizado con GeoGebra 3D.

El *applet* está creado con varios deslizadores para que los alumnos puedan cambiar la altura del cono, su radio y la inclinación del plano a su gusto. De esta manera en clase tanto el docente como los alumnos podrán ver los cambios que se producen en vivo al activar el *play* de los deslizadores que quieran en cada momento, utilizando la opción de RA para una mejor visualización. En concreto para nuestra actividad lo interesante es ver qué ocurre cuando activamos el *play* de los deslizadores creados para los ángulos que determinan el plano, ya que gracias a esto podrán observar cómo van surgiendo las diferentes secciones cónicas según varía la inclinación del plano.

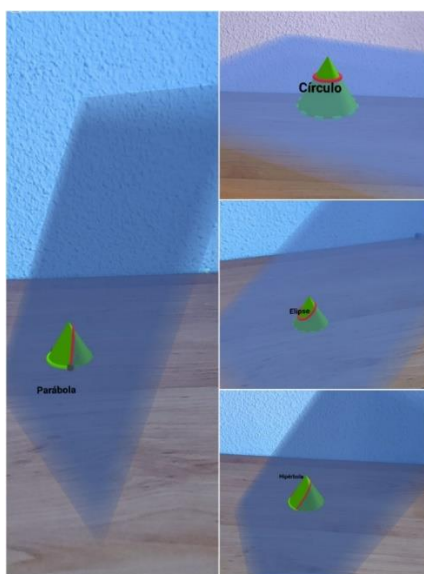


Figura 6: Secciones cónicas con el applet de GeoGebra RA.

Se adjunta a continuación el enlace al *applet* realizado con GeoGebra 3D válido para cualquiera de las siguientes variantes de la actividad:

<https://www.geogebra.org/m/e3br7hvg>

- **Variante 1** (Docencia presencial):

Para llevar a cabo la actividad hemos llegado a dos opciones de la misma, basándonos en que el tipo de docencia en el que se realizaría sería la presencial.

A continuación, se realiza una descripción de ambas variantes:

1. **Opción 1:** El docente será el encargado de manejar el *applet* mediante la aplicación de GeoGebra RA y mostrará a los alumnos en directo cómo van surgiendo las diferentes cónicas de manera que todos los alumnos vean al mismo tiempo el objeto 3D.
2. **Opción 2:** El docente dará el *applet* de GeoGebra a los alumnos y serán ellos mismos los que manejen el objeto 3D y saquen las conclusiones sobre cómo se van dando las diferentes secciones. Una vez hayan pasado varios minutos, se realizará un debate para poner en conjunto las conclusiones que han sacado sobre cómo van surgiendo las distintas cónicas.

- **Variante 2** (Docencia a distancia):

En esta ocasión para llevar la actividad bajo un contexto en el que la docencia se tuviese que realizar en la modalidad a distancia, también hemos llegado a dos opciones para su realización.

1. **Opción 1:** El docente puede realizar un vídeo introductorio del tema de lugares geométricos apoyándose en el *applet* descrito anteriormente, de manera que puede colgarlo en el aula virtual que use el centro para que los alumnos puedan verlo las veces que quieran. También se puede reproducir en el caso de realizar la clase mediante videollamada. En el vídeo el docente puede explicar cómo está realizado el *applet* y mostrar al alumnado cómo van surgiendo las diferentes secciones.
2. **Opción 2:** El docente puede subir o mandar el *applet* a los alumnos y que sean ellos mismos los que saquen las conclusiones. También se les pedirá que hagan fotos colocando el objeto 3D en diferentes superficies o graben algún vídeo del funcionamiento del *applet*. De esta manera se fomentará tanto la creatividad de los alumnos como el manejo de herramientas tecnológicas. En la presentación mediante fotos o vídeos deberán añadir las conclusiones a las

que han llegado para que se dé cada cónica. Una vez todos los alumnos hayan presentado su trabajo se realizará un debate en clase sobre las conclusiones a las que han llegado y en caso de error, el docente dará las directrices necesarias para llegar a las hipótesis correctas.

En esta opción tendremos que tener en cuenta la falta de recursos que pueden llegar a tener los alumnos, ya que si alguno de ellos no dispone de dispositivo móvil sería mejor decantarse por la primera opción.

4. Recursos necesarios

Los recursos necesarios para poder llevar a cabo la actividad en sus diferentes variantes serían los siguientes:

- Dispositivo móvil con acceso a internet: En cada una de las opciones en las que el alumno sea el encargado de realizar la actividad, tendremos que tener en cuenta, cuántos de nuestros alumnos disponen de un dispositivo móvil. Si se diese el caso de que alguno de los alumnos no disponga de él, tendremos que realizar la actividad por parejas o grupos, para que todos puedan participar en ella.
- Aplicación GeoGebra RA.
- Aula virtual o Moodle para poder colgar al alumnado el vídeo o el *applet* de GeoGebra.

5. Competencias

A continuación, se muestra una tabla con las diferentes competencias con las que se trabajará en cada una de las variantes propuestas anteriormente.

	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC
Docencia presencial (Opción 1)	✓	✓	✓	✓	✓		
Docencia presencial (Opción 2)	✓	✓	✓	✓	✓		
Docencia a distancia (Opción 1)	✓	✓	✓	✓	✓		
Docencia a distancia (Opción 2)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Las siglas de la tabla anterior se corresponden con las competencias claves definidas en el **Real Decreto 1105/2014**, de 26 de diciembre:

- Comunicación lingüística, **CCL**.
- Comunicación matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, **CMCT**.

- Competencia digital, **CD**.
- Aprender a aprender, **CAA**.
- Competencias sociales y cívicas, **CSC**.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor, **SIEE**.
- Conciencia y expresiones culturales, **CEC**.

6. Evaluación

La evaluación que se presenta sería para la opción 2 de la variante 2, es decir, para la opción de docencia a distancia en la que el alumno tiene que usar el *applet* y realizar fotos o vídeos del mismo. Para llevar a cabo la evaluación, el docente se apoyará en la siguiente rúbrica:

Categoría (% sobre la nota)	Sobresaliente	Notable	Aprobado	Insuficiente
Manejo de GeoGebra. (15%)	Ha conseguido abrir el <i>applet</i> en la aplicación correctamente	Ha conseguido abrir el <i>applet</i> en la aplicación, aunque ha necesitado ayuda 1 vez	Ha conseguido abrir el <i>applet</i> en la aplicación, aunque ha necesitado ayuda varias veces	No ha conseguido abrir el <i>applet</i>
Manejo de la aplicación de GeoGebra RA. (15%)	Se desenvuelven muy bien con el uso de la aplicación de GeoGebra RA	Se desenvuelven bien con GeoGebra RA, aunque han tenido alguna pequeña dificultad con el <i>applet</i>	Se desenvuelven bien con GeoGebra RA, aunque ha tenido varios problemas con el <i>applet</i>	Son capaces de usar el objeto 3D, pero no han conseguido visualizarlo con RA
Creatividad con el <i>applet</i> . (20%)	Ha tenido en cuenta los colores y la perspectiva para su visualización	Ha tenido en cuenta los colores y la perspectiva para su visualización, aunque no es la mejor	Ha tenido en cuenta los colores, pero no la perspectiva para su visualización	No ha tenido en cuenta los colores ni la perspectiva
Creatividad en la presentación. (20%)	La presentación está muy trabajada y contiene todas las cónicas	La presentación está elaborada y contiene todas las cónicas	La presentación está bien, pero no contiene	La presentación no está trabajada y faltan cónicas

			todas las cónicas	
Hipótesis y razonamiento. (20%)	Uso de razonamientos matemáticos complejos	Uso de razonamientos matemáticos efectivos	Hay evidencias de razonamiento matemático	Poca evidencia de razonamiento matemático
Debate. (10%)	Ha participado en el debate grupal en todo momento	Ha participado en el debate grupal de manera muy activa	Ha participado en el debate grupal en alguna ocasión	No ha participado en el debate grupal

En el caso de realizar la docencia presencial y de que se optase por la opción 2 descrita anteriormente, se le pedirá al alumnado que realice la siguiente encuesta sobre la actividad para conocer posibles mejoras a futuro y su opinión sobre la misma: https://docs.google.com/forms/d/1dsTEkZk00WrUQM3rLUuxT0nooIYqO5qJKEA1uiGxKR0/edit?usp=forms_home&ths=true

Cabe destacar que la actividad en sus diferentes variantes puede realizarse tanto en la actualidad como en cursos posteriores ya que se espera que el uso de aplicaciones de RA vaya en aumento año tras año.

5.2. Posiciones relativas

Esta propuesta nace ante la dificultad de visualización que presentan muchos alumnos en el curso de 2º de Bachillerato a la hora de manejar objetos tridimensionales.

5.2.1. Marco legislativo

Para situar la actividad dentro del marco legislativo nos hemos apoyado en el **Real Decreto 1105/2014**, de 26 de diciembre que establece el currículo básico de Bachillerato para la Comunidad Autónoma de Madrid. Por ello nuestra actividad quedaría enmarcada en el curso de 2º de Bachillerato del itinerario de Ciencias, concretamente en el Bloque 4 correspondiente a Geometría donde trabajaríamos las posiciones relativas entre planos.

5.2.2. Propuesta

A continuación, se detallará la propuesta de actividad “Posiciones relativas”. La actividad puede llevarse a cabo tanto si la docencia se realiza de manera presencial como si es a distancia.

1. Conocimientos previos necesarios

Entre los conocimientos previos que se requiere que el alumno tenga para la realización de la actividad destacan los siguientes:

- Matrices: definición, operaciones con matrices, determinante de una matriz y rango de una matriz.
- Vectores en el espacio: características principales, expresión analítica, operaciones con vectores y aplicaciones a problemas geométricos.
- Producto escalar de 2 vector y producto mixto de 3 vectores.
- Sistema de referencia en el espacio.
- Ecuaciones de la recta.
- Posiciones relativas de dos rectas.
- Ecuaciones del plano.

2. Objetivos

Los objetivos que se pretenden conseguir con esta actividad se corresponden con los de la actividad anterior, aunque también encontramos algunos nuevos. A continuación, se muestra una lista con los objetivos principales de la actividad:

- ✚ Mejorar la visualización espacial de los alumnos.
- ✚ Perder el miedo a la parte de matemáticas que requiere de un pensamiento más abstracto, en este caso la tridimensionalidad.
- ✚ Manejar objetos tridimensionales.
- ✚ Introducir nuevas tecnologías en el aula como la RA.
- ✚ Desarrollar las competencias digitales por parte del alumnado.
- ✚ Manejar la aplicación de GeoGebra y GeoGebra RA.
- ✚ Estudiar las diferentes posiciones relativas entre 2 y 3 planos, y sus intersecciones.
- ✚ Desarrollar el razonamiento lógico y el pensamiento crítico para sacar las hipótesis sobre las diferentes posiciones.
- ✚ Cambiar la rutina del aula basada en explicaciones de tiza y pizarra.
- ✚ Hacer protagonistas a los alumnos sobre su propio aprendizaje.

3. Desarrollo de la actividad

La actividad “*Posiciones relativas*” consistirá en realizar un estudio de las posiciones relativas entre 2 y 3 planos. En esta actividad los protagonistas serán los alumnos ya que serán ellos mismos los que tendrán que dar las hipótesis para que se

den las diferentes posiciones relativas entre los planos. Para poder llegar a ello, el docente les entregará una hoja de trabajo en la que se les indicará las pautas para construir los diferentes objetos matemáticos necesarios y, unas cuestiones sobre las diferentes posiciones que deberán debatir con el resto de la clase al final de la actividad para obtener las hipótesis correctas. (Ver Anexo 1)

Para desarrollar la actividad los alumnos divididos en parejas crearán un *applet* que constará de varios deslizadores. Estos deslizadores se corresponderán con los coeficientes A, B, C y D de la fórmula general de un plano, $Ax + By + Cz = D$. De esta manera el alumno podrá activar el *play* de cada uno de ellos y ver en tiempo real cómo se dan las diferentes posiciones relativas y cuáles son las condiciones para surjan cada una de ellas.

Una vez los alumnos hayan acabado de crear, “investigar” con el *applet* y hayan contestado a las diferentes cuestiones presentes en la ficha de trabajo, se realizará un breve debate sobre las conclusiones que ha sacado cada pareja, y entre todos, guiados si es necesario por el docente, se llegará a las hipótesis correctas.

En las dos tablas siguientes se muestran las condiciones necesarias para que se den cada una de las posiciones relativas en el caso del estudio de 2 y 3 planos respectivamente.

	Planos coincidentes	Planos paralelos	Planos secantes
Rango A = 1 y Rango A* = 1	✓		
Rango A = 1 y Rango A* = 2		✓	
Rango A = 2 y Rango A* = 2			✓

Tabla 3: Estudio de las posiciones relativas de 2 planos mediante rangos.

	3 planos coincidentes	3 planos paralelos	2 planos coincidentes y el 3º paralelo a ellos	2 planos coincidentes cortados por el 3º	Haz de planos	2 planos paralelos cortados por el 3º	3 planos que se cortan 2 a 2 en tres rectas	3 planos que se cortan en un punto
Rango A = 1 Rango A* = 1	✓							
Rango A = 1 Rango A* = 2		✓	✓					
Rango A = 2 Rango A* = 2				✓	✓			
Rango A = 2 Rango A* = 3						✓	✓	
Rango A = 3 Rango A* = 3								✓

Tabla 4: Estudio de las posiciones relativas de 3 planos mediante rangos.

Ambas tablas podrían usarse durante el debate en clase de manera que cada pareja pueda exponer sus conclusiones y el resto opinar sobre las mismas hasta llegar a las conclusiones correctas para que se den las distintas posiciones.

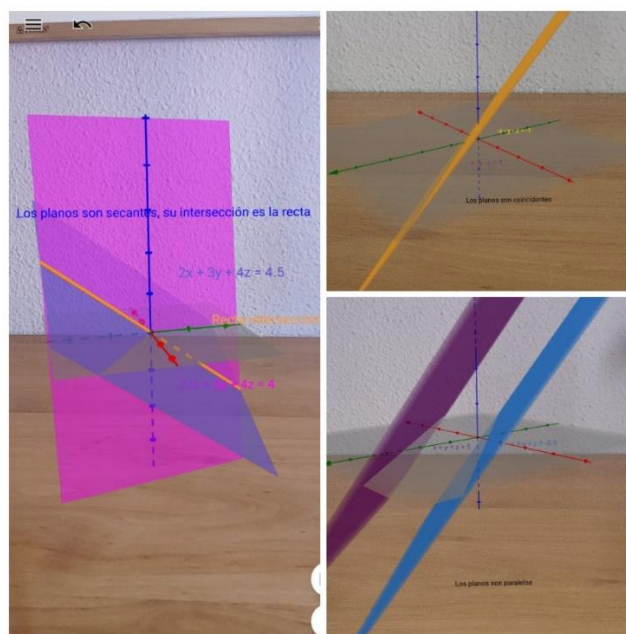


Figura 7: Applet realizado con GeoGebra para estudiar las posiciones relativas de 2 planos.

A continuación, se adjuntan los enlaces a los *applets* realizados con GeoGebra para trabajar las posiciones relativas entre 2 y 3 planos:

- Posiciones relativas de 2 planos: <https://www.geogebra.org/m/gestcsx3>
- Posiciones relativas de 3 planos: <https://www.geogebra.org/m/fp5snefe>

4. Recursos necesarios

Para poder llevar a cabo la actividad los recursos necesarios serían los siguiente:

- Aula de informática.
- Dispositivos móviles con acceso a internet.
- Aplicación de GeoGebra RA.

5. Competencias

A la hora de llevar a cabo la actividad intentaremos trabajar con el máximo posible de competencias clave definidas en el **Real Decreto 1105/2014**, de 26 de diciembre. En la siguiente tabla se muestran las competencias con las que se trabajará tanto si la actividad se realiza en un contexto en el que la docencia sea presencial como en el caso de que sea a distancia.

	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC
Docencia presencial	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Docencia online	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

6. Evaluación

Durante toda la actividad el docente realizará una tarea de observación directa del alumnado con la finalidad de evaluar tanto al alumno como la actividad en sí misma, con el fin de mejorarla para futuras ocasiones. Para la evaluación del alumnado el docente se apoyará en la siguiente rúbrica para evaluar el trabajo desarrollado por cada equipo:

Categoría (% sobre la nota)	Sobresaliente	Notable	Aprobado	Insuficiente
Manejo de GeoGebra (10%)	Han conseguido crear todos los objetos matemáticos pedidos	Han conseguido crear la mayor parte de los objetos pedidos	Han conseguido crear alguno de los objetos pedidos	No han conseguido crear los objetos pedidos
Manejo de la aplicación de GeoGebra RA (10%)	Se desenvuelven muy bien con el uso de la aplicación de GeoGebra RA	Se desenvuelven bien con GeoGebra RA, aunque han tenido alguna pequeña dificultad con el <i>applet</i>	Se desenvuelven bien con GeoGebra RA, aunque ha tenido varios problemas con el <i>applet</i>	Son capaces de usar el objeto 3D, pero no han conseguido visualizarlo con RA
Trabajo en parejas. (10%)	Todo el trabajo ha sido en pareja	El 80% del trabajo ha sido en pareja	El 50% del trabajo ha sido en pareja	No han trabajado en pareja
Hipótesis y razonamiento. (20%)	Uso de razonamientos matemáticos complejos	Uso de razonamientos matemáticos efectivos	Hay evidencias de razonamiento matemático	Poca evidencia de razonamiento matemático
Estrategias/procedimientos. (20%)	Uso de estrategias eficientes y efectivas	Uso de estrategias efectivas	Algún uso de estrategias efectivas	Raramente uso de estrategias efectivas
Respuestas proporcionadas. (20%)	Todas las cuestiones estaban bien contestadas	Todas las cuestiones estaban bien menos 1	Todas las cuestiones estaban bien menos 2	Más de 3 cuestiones no estaban bien
Debate. (10%)	Han participado en el debate grupal en todo momento	Han participado en el debate grupal de manera muy activa	Han participado en el debate grupal en alguna ocasión	No han participado en el debate grupal

Además, al final de la actividad se pedirá a los alumnos que realicen la siguiente encuesta sobre la actividad con el fin de conocer sus impresiones sobre su realización y posibles mejoras de la misma:

<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScjAfmyoCWCzdu180z7uxOrBDjzliocs5eX1LOqLuxTVy4Bog/viewform>

A pesar de que sabemos lo que supone para muchos alumnos y docentes este curso por la prueba de acceso a la universidad, creemos que esta propuesta podría ayudar a que los alumnos desconecten de la presión del curso en sí, y que esta parte de la asignatura en la que se suele perder la componente geométrica o visual se vea favorecida con su realización gracias al gran componente tangible que tiene.

5.3. El Comienzo del Todo

Esta última propuesta nace con la idea de mostrar una actividad de RA fuera del bloque de Geometría en sí mismo. Es decir, con esta actividad se quiere mostrar un enfoque diferente sobre cómo llevar al aula este tipo de tecnología abarcando todos los bloques posibles del currículo, y no sólo el de Geometría.

5.3.1. Marco legislativo

Para situar la actividad dentro del marco legislativo nos hemos apoyado en el **DECRETO 48/2015**, de 14 de mayo que establece el currículo básico para la ESO. Por ello nuestra actividad quedaría enmarcada en el curso de 2º ESO, concretamente se trabajará con los Bloques 1, 2, 4 y 5, es decir, se trabajarán todos los bloques menos el de Análisis.

5.3.2. Propuesta

A continuación, se detallará la propuesta de la actividad “*El Comienzo del Todo*”. La actividad consistirá en un *Break Out* que se llevará a cabo en el período que hay entre la evaluación ordinaria de mayo y la extraordinaria de junio.

Como dijimos en la sección 4.3.2. los *Break Out* son el conjunto de actividades que giran en torno a una historia, que el alumno deberá superar y que tienen por finalidad abrir un cofre con varios candados (Moreno, 2019). Este tipo de actividades se pueden considerar un ejemplo de gamificación en el aula. Esta metodología docente, de reciente desarrollo, destaca por el uso de elementos de diseño del juego en contextos de no juego (Deterding et al., 2011).

1. Conocimientos previos necesarios

Entre los conocimientos previos que se requiere que el alumno tenga para la realización de la actividad destacan los siguientes:

- Conocimiento sobre los diferentes sistemas de numeración surgidos a lo largo de la historia: En clases previas a la realización de la actividad se trabajará con los distintos sistemas de numeración, su historia, sus aportaciones y curiosidades.
- Factorización de un número en números primos.
- Definición y cálculo del mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
- Operaciones con números enteros.
- Ecuaciones de segundo grado y su resolución.
- Cuerpos y figuras geométricas.
- Cálculo de áreas y volúmenes.

2. Objetivos

Los objetivos que se pretenden conseguir con la realización de esta actividad son los siguientes:

- ✚ Introducir herramientas de RA de una manera diferente a las descritas en las actividades anteriores.
- ✚ Cambiar la rutina del aula basada en explicaciones de tiza y pizarra.
- ✚ Fomentar la motivación del alumnado.
- ✚ Desarrollar las competencias digitales por parte del alumnado.
- ✚ Repasar los contenidos definidos en el currículo del curso de manera que sirva de repaso para los alumnos que hayan suspendido y tengan que ir a la convocatoria extraordinaria, y de refuerzo para el resto.
- ✚ Desarrollar el razonamiento lógico y el pensamiento crítico ante las actividades que se proponen.
- ✚ Trabajar de manera cooperativa y colaborativa entre los diferentes grupos.

3. Desarrollo de la actividad

La actividad “*El Comienzo del Todo*” consistirá en un *Break Out* con RA basado en diversas civilizaciones que han surgido a lo largo de la historia y que tienen un arraigo con el mundo de las matemáticas. En esta propuesta, trabajaremos con la civilización Babilónica, la Egipcia, la Romana, la Griega y la Maya.

Para ello lo primero que se realizará será dividir a los alumnos en grupos mediante la herramienta SociEscuela⁶ que nos ayudará a hacer grupos lo más equilibrados posible, atendiendo a las fortalezas y debilidades de cada uno de los alumnos que componen el curso.

Antes de que los alumnos lleguen al aula repartiremos por la misma los marcadores de RA diseñados para marcar el camino de la actividad. Estos marcadores se caracterizan porque su base es del color de cada uno de los equipos. De esta manera conseguimos que los alumnos puedan identificar en cada “estación” cuál es su marcador y no pierdan tanto tiempo durante la actividad. Cuando tengamos hechos los grupos y colocados los marcadores, les comunicaremos a los alumnos quiénes conforman cada equipo y cuál es su color de referencia para toda la actividad. Seguidamente comprobaremos que todos los equipos disponen de un dispositivo móvil para la actividad y revisaremos si tienen descargada la aplicación de Scope y la de GeoGebra RA para su realización.

Una vez realizada todas las comprobaciones, pediremos a los equipos que escaneen el primer marcador, común para todos, que les derivará al vídeo introductorio de la actividad.



Figura 8: Primer marcador de la actividad.



Figura 9: Imagen resumen vídeo introductorio a la actividad.

⁶ SociEscuela: <https://socioescuela.es/es/index.php>

Enlace al vídeo introductorio de la actividad:

https://drive.google.com/file/d/1zo1AO_PRoDdBSN_ISPUmY4JhJfk1fQjN/view?usp=sharing


Cuando todos los equipos hayan acabado de ver el vídeo comenzará la actividad. Cada grupo deberá dirigirse hacia su primer marcador siguiendo las huellas que habrá en el suelo. Una vez escaneado el primer marcador cada grupo se encontrará con la primera prueba en la que descubrirán un poco más su civilización. Aquí deberán contestar una cuestión sobre la misma y apuntar la pista para la prueba final. Las pruebas que se muestran a continuación son las que haría el equipo “Romanos” durante el desarrollo del *Break Out*.



Figura 10: Marcador de la primera prueba.

Una vez escaneado el primer marcador, deberán pinchar en el icono que les sale. A continuación, este les redirigirá a un *applet* de GeoGebra que les mostrará la primera pregunta. Si el equipo no acertase les saldrá un mensaje recomendándoles que revisen, en este caso, los valores que le han dado a los símbolos que componen el año de construcción de la Puerta de Alcalá. Si por el contrario el equipo ha acertado les mostrará la primera pista, el valor de a .

La influencia de la Antigua Roma es visible a día de hoy en nuestra ciudad. Si observamos en la Puerta de Alcalá aparece el año de su construcción?



¿Sabrías identificar el año del que se trata?
Selecciona el año correcto entre las distintas opciones.

1778
 1878 **Correcto!**
 1788

La pista para la prueba final es: $a = 1$
APÚNTALA

Figura 11: Primera prueba del equipo Romanos.

El siguiente *applet* nos redirige a la prueba 1 del equipo “Romanos”:

<https://www.geogebra.org/m/fzpuasks>

En la siguiente actividad todos los equipos deberán resolver una operación matemática enmarcada en el Bloque 2 del currículo, en concreto, la parte referente al Álgebra.

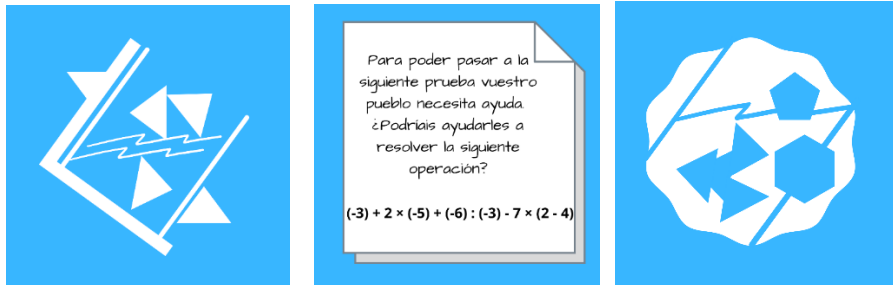


Figura 12: Marcador para el enunciado de la prueba, enunciado y marcador para la comprobación.

Una vez hayan resuelto la operación, deberán escanear el marcador que los llevará al *applet* dónde deberán comprobar si su resultado es correcto o no. En el caso de que sea así, les mostrará que la siguiente pista es x^2 .

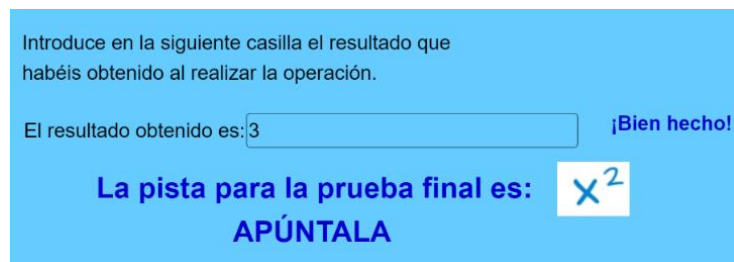


Figura 13: Applet para comprobar la solución de la prueba.

Enlace al *applet* de comprobación de la actividad:

<https://www.geogebra.org/m/c46fgrfv>

En la siguiente prueba se trabajarán conceptos vistos durante el Bloque 4 correspondiente a Geometría. En esta prueba cada equipo tendrá que calcular el volumen de un objeto 3D. En unos casos tendrán que calcular el volumen restante entre un cono que contiene una esfera, y en otros, deberán calcular el volumen restante entre un cilindro que contiene una esfera.

Para realizar la actividad cada equipo deberá escanear de nuevo dos marcadores. El primero de ellos los llevará al enunciado de la prueba y, además, contendrá una casilla para que, una vez resuelto el problema, puedan comprobar si la solución es la

correcta. El segundo marcador los llevará al *applet* del objeto 3D que deberán visualizar con la ayuda de la aplicación de GeoGebra RA. Allí cada equipo deberá encontrar los datos que le falten para poder resolver el problema, concretamente en este caso, deberán buscar cuál es la altura del cilindro. Una vez obtenidos todos los datos y calculado el resultado de la prueba, cada equipo deberá escanear de nuevo el primer marcador para comprobar si su respuesta es correcta, y obtener así la siguiente pista.

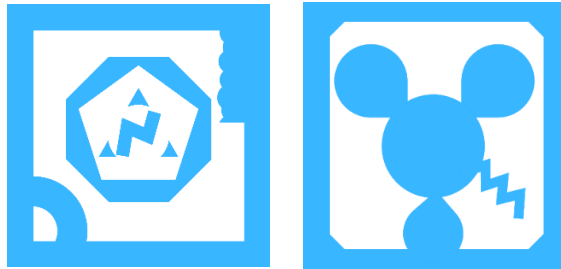


Figura 14: Marcadores del enunciado y el applet del objeto 3D para la prueba 3 respectivamente.

Vuestro amigos Romanos quieren hacer una actividad con alumnos de vuestra edad. Para ello les han dado un cilindro que contiene una esfera. Del cilindro conocemos el radio de su base es $r = 3$ cm. El radio de la esfera contenida en el cilindro es $r = 2$ cm. ¿Podrías ayudar a los alumnos a averiguar los datos que faltan y calcular el volumen que queda al introducir la esfera en el cilindro?

Cilindro:	Esfera:
Altura = ?	Diámetro = 4 cm
Radio = 3 cm	

Una vez tengáis la solución, debéis escanear el mismo marcador y meter la solución en la siguiente casilla para comprobarla. Tendréis que aproximar el resultado de manera que no tengáis decimales.

El volumen es: ¡Bien hecho!

La pista para la prueba final es: b = 5

APÚNTALA

Figura 15: Enunciado de la prueba y casilla de comprobación del resultado de la prueba.

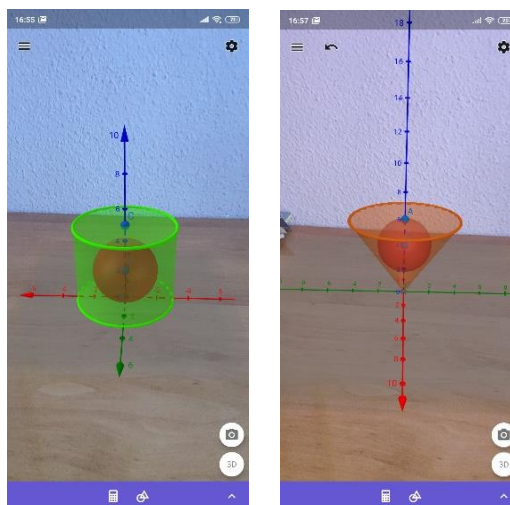


Figura 16: Applets de las dos variantes de prueba.

Enlace a los *applets*:

- Cilindro con esfera: <https://www.geogebra.org/m/tg9qh5jh>
- *Applet* del enunciado y comprobación de la solución: <https://www.geogebra.org/m/nsezkhmh>
- Cono con esfera: <https://www.geogebra.org/m/qgwjgdz>

En la siguiente prueba los alumnos deberán resolver dos actividades referentes al Bloque de Números. Tendrán que calcular el mínimo común múltiplo, M.C.M, y el máximo común divisor, M.C.D, de dos casos que se les proponen. De esta manera además de repasar ambos conceptos, también tendrán que recordar cómo factorizar un número en factores primos.

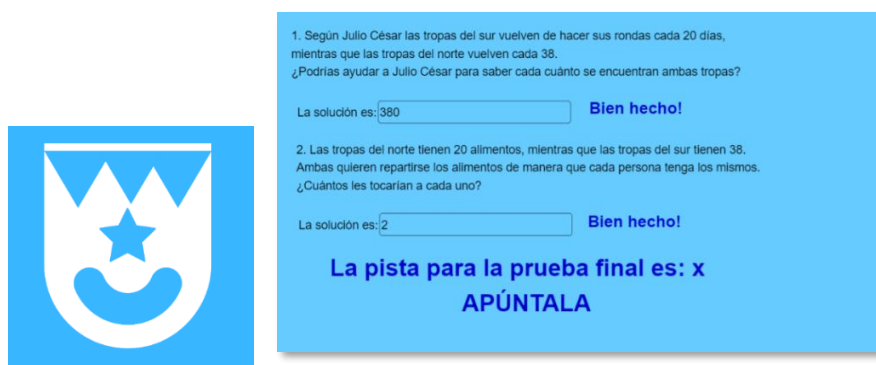


Figura 17: Marcador y prueba 4.

Enlace al *applet* realizado para la actividad:

<https://www.geogebra.org/m/pnstqvqc>

En la siguiente actividad se trabajará, de nuevo, con el bloque de Geometría. En ella los equipos tendrán que calcular el área total de un prisma hexagonal. Para esta actividad deberán escanear tres marcadores, uno para el enunciado, otro para poder visualizar el objeto y otro para comprobar la solución.



Figura 18: Marcadores para la prueba 5.



Figura 19: Enunciado de la prueba y visualización mediante AR del objeto 3D realizado con GeoGebra

Applet realizado con GeoGebra 3D del prisma con base hexagonal:

<https://www.geogebra.org/m/jwyqvvgw>

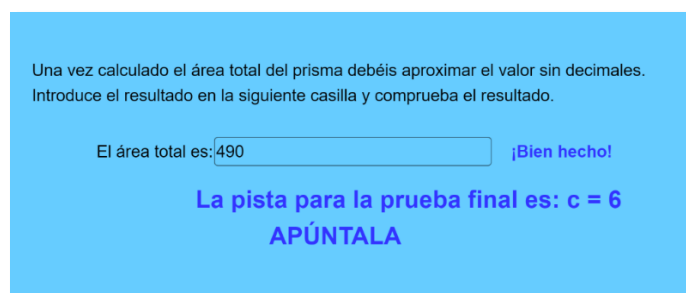


Figura 20: Applet para la comprobación del resultado de la prueba 5.

Enlace al *applet* para la comprobación del resultado obtenido por los alumnos en la prueba: <https://www.geogebra.org/m/nucrr69c>

En la penúltima prueba se trabajará con un bloque diferente, el Bloque 5, perteneciente a Estadística. En esta prueba cada equipo deberá calcular la media y la mediana de un gráfico de barras. Una vez hayan contestado ambas cuestiones será el propio *applet* el que les dará la última pista para la prueba final.



Figura 21: Último marcador del equipo Romanos

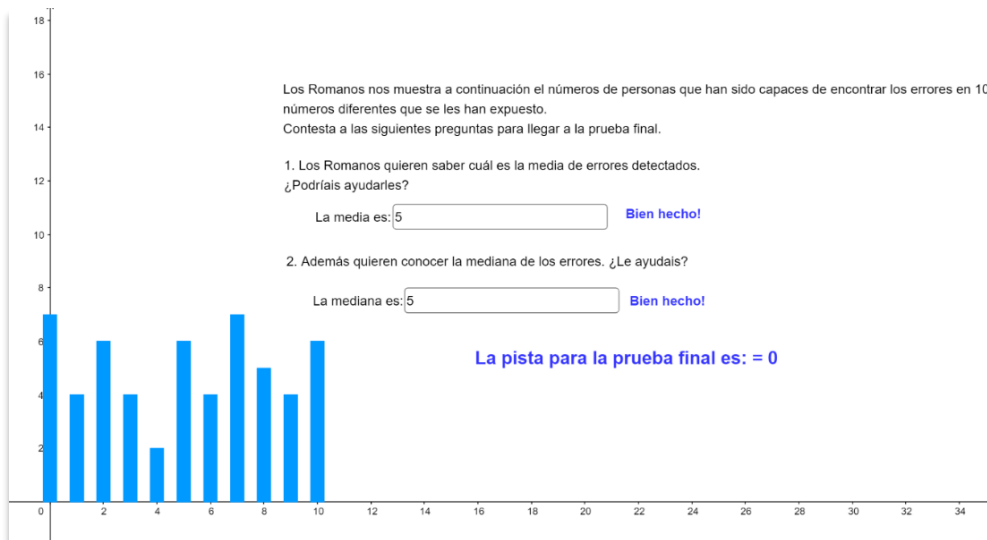


Figura 22: Penúltima prueba de la actividad.

Enlace al *applet* de la actividad: <https://www.geogebra.org/m/k4uvzdqd>

Cuando cada equipo haya acabado las seis pruebas deberá ir al último lugar marcado en el recorrido de clase. Allí encontrará un sobre que le dará la siguiente información:

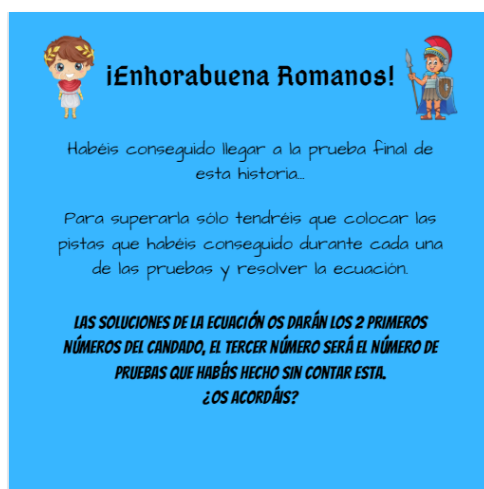


Figura 23: Información prueba final.

En este caso, el equipo Romanos deberá resolver la siguiente ecuación de segundo grado para obtener la clave que les ayudará a abrir el candado:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Cuando el equipo termine de resolver la ecuación de segundo grado tendrá que ir al cofre y encontrar a qué candado le corresponde su combinación numérica. Para

descubrir qué hay dentro del cofre, los 5 equipos tendrán que conseguir la combinación numérica de los candados. Si alguno de los equipos presenta problemas para llegar a la prueba final, los equipos que hayan acabado podrán ayudarles para que lleguen a esta y todos juntos descubran qué contiene el cofre.

4. Recursos necesarios

Los recursos necesarios para poder llevar a cabo el *Break Out* se especifican en la siguiente lista:

- Aula para el desarrollo de la actividad.
- Imprimir los marcadores de cada equipo.
- 5 sobres con las instrucciones de la prueba final para cada equipo.
- Pegatinas para hacer el recorrido de la actividad.
- Folios y bolígrafos para cada grupo.
- Dispositivos móviles con acceso a internet (1 por equipo).
- Aplicación Scope.
- Aplicación GeoGebra RA.
- 5 candados.
- 1 cofre.
- Colección de *applets* y pruebas para los diferentes equipos:
https://drive.google.com/drive/folders/1wgLWuleghJAgKomRp_J2x9eI71FhgntB?usp=sharing

5. Competencias

Apoyándonos en las competencias claves definidas en el **DECRETO 48/2015**, de 14 de mayo, se muestra a continuación la siguiente tabla con las competencias que se trabajarán durante la actividad.

	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC
Break Out	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

6. Evaluación

Durante toda la actividad el docente realizará una tarea de observación directa del alumnado con la finalidad de evaluar tanto al alumnado como la actividad en sí misma

para futuras realizaciones de esta. Para la evaluación del alumnado el docente se apoyará en la siguiente rúbrica para evaluar el trabajo desarrollado por cada equipo:

Categoría (% sobre la nota)	Sobresaliente	Notable	Aprobado	Insuficiente
Manejo de la aplicación Scope (10%)	Se desenvuelven muy bien con la app	Se desenvuelven bien con la app	Han tenido algún problema con la app	No han conseguido usar la app
Manejo de la aplicación de GeoGebra RA (10%)	Se desenvuelven muy bien con el uso de GeoGebra, la RA, han sacado los datos necesarios y han resuelto el problema	Se desenvuelven bien con GeoGebra y la RA, han conseguido obtener todos los datos, pero no el resultado correcto	Se desenvuelven bien con GeoGebra y la RA, pero no han conseguido obtener todos los datos	Son capaces de usar el objeto 3D, pero no han conseguido visualizarlo con RA
Trabajo en grupo. (10%)	Todos los miembros trabajan en grupo	El 80% de los miembros trabajan en grupo	El 50% de los miembros trabajan en grupo	No hay trabajo en grupo
Hipótesis y razonamiento. (20%)	Uso de razonamientos matemáticos complejos	Uso de razonamientos matemáticos efectivos	Hay evidencias de razonamiento matemático	Poca evidencia de razonamiento matemático
Estrategias/procedimientos. (20%)	Uso de estrategias eficientes y efectivas	Uso de estrategias efectivas	Algún uso de estrategias efectivas	Raramente uso de estrategias efectivas
Respuestas proporcionadas. (10%)	Todos los problemas fueron resueltos	Todos los problemas, menos uno, fueron resueltos	Todos los problemas, menos dos, fueron resueltos	Mas de 3 problemas no fueron resueltos
Conclusión. (20%)	Han conseguido llegar a la prueba final sin ayuda	Han conseguido llegar a la prueba final, pero han necesitado ayuda 1 vez	Han conseguido llegar a la prueba final, pero han necesitado ayuda 2 veces	Han necesitado ayuda en varias ocasiones para llegar a la prueba final

Para mejorar la actividad y conocer la opinión de nuestros alumnos sobre la misma y el trabajo que han realizado en ella, se les pedirá que contesten el siguiente cuestionario sobre la actividad:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScjkGv88imYAfbpq062loxe_qNrrYV_cyCq_si_2i8I0kqNsg/viewform?usp=sf_link

6. Conclusiones

El objetivo principal de este TFM era investigar y conocer diferentes formas de implementar la RA en el aula de matemáticas tanto a nivel de ESO como Bachillerato, de manera que se pudiese realizar una propuesta didáctica basada en el estudio de dos herramientas como GeoGebra y Aumentaty.

El camino desarrollado hasta su consecución ha sido muy interesante ya que he podido descubrir múltiples formas de introducir aplicaciones de RA, no sólo en el área de las matemáticas, sino también en otras materias propias de estos niveles de enseñanza.

Uno de los puntos clave a la hora de realizar las dos primeras propuestas para el trabajo fueron las dificultades que yo tuve mientras estudiaba Bachillerato. Gracias a esto pensé que sería interesante crear unas actividades que se saliesen de lo habitual, pero que no requiriesen mucho tiempo ni para su creación ni para su desarrollo, y que además fuesen beneficiosa para cualquier alumno.

La propuesta del *Break Out* surgió ante algunas limitaciones que vimos para trabajar los bloques del currículo que no se correspondiesen con el de Geometría con la herramienta de GeoGebra con RA. También, pensamos que sería interesante trabajar con el nivel 1 de RA, crear nuestros propios marcadores, ver cuáles funcionaban mejor y Aumentaty nos daba esta oportunidad, además de ofrecernos trabajar con otros niveles. Cabe destacar que una de las prioridades en esta propuesta era trabajar con el mayor número de bloques definidos en el currículo, y por ello se decidió situarla entre la evaluación ordinaria de mayo y la extraordinaria de junio.

Debido a la situación que se dio en el pasado mes de marzo, no se pudieron llevar a cabo las propuestas anteriores, y esto en gran medida nos hizo reflexionar sobre qué herramientas o software sería más interesante seleccionar, de manera que los alumnos pudiesen trabajar con ellos tanto en el centro como en casa.

GeoGebra es una de las herramientas más polivalentes para el aprendizaje de las matemáticas y que sea un software gratuito, intuitivo y con el que se puede trabajar desde cualquier lugar fue clave para su selección. Otro punto a tener en cuenta era que muchos alumnos en la actualidad ya lo conocen y han trabajado con él anteriormente. Sin embargo, a la hora de realizar las propuestas se han encontrado diferentes limitaciones:

- La aplicación de GeoGebra RA no es tan versátil como la versión Clásica ya que a la hora de diseñar material se centra mucho en geometría y trabajar contenidos del resto de bloques resulta bastante complicado.
- A la hora de utilizar la RA debemos tener en cuenta qué superficie vamos a utilizar como base y qué colores vamos a poner a nuestros objetos, ya que en muchas ocasiones esto dificulta mucho la visibilidad de algunos.
- Es bastante complicado controlar las escalas de los ejes en la versión 3D.
- Cuando queremos que se visualice un texto ya sea un comentario, las fórmulas de nuestros objetos o propiedades de los mismos, es complicado situarlos en una “buena” posición ya que sólo puede realizarse en la versión 3D y no, cuando ya se está proyectando con la RA. Además, cuando se proyecta con la RA los textos cambian de lugar.

En el caso de Aumentaty la elegimos porque nos daba la oportunidad de crear un *Break Out* con nuestros propios materiales a través de marcadores propios, aunque la plataforma dispone de mucho material que han realizado otras personas de la comunidad y que puede usarse de manera gratuita. A pesar de que las opciones que ofrece la aplicación en cuanto al uso de diferentes niveles de RA, material y opciones es muy extensa, durante el desarrollo de la actividad se han encontrado las siguientes limitaciones:

- La aplicación destinada a la creación de proyectos es bastante lenta y en numerosas ocasiones no hemos podido acceder a nuestro propio material.
- No hemos podido enlazar objetos 3D creados con la herramienta GeoGebra a nuestros marcadores.
- A la hora de posicionar las imágenes, vídeos u objetos sobre el marcador la aplicación es poco intuitiva y su realización es bastante complicada.
- La aplicación destinada a la visualización del contenido con RA va un poco lenta y en varias ocasiones no hemos podido ver ni descargar nuestro material creado.
- Para poder visualizar los proyectos tienes que descargarlos con anterioridad.

A pesar de las limitaciones anteriores se podría destacar que una de las ventajas que presenta en sí la plataforma Aumentaty es que no es necesario imprimir los marcadores para poder visualizar el contenido, ya que nos da la opción de crear marcadores temporales haciendo una foto al propio marcador.

En cuanto a las limitaciones del proyecto podemos señalar que se requiere que el personal docente tenga conocimientos sobre ambas herramientas.

En conclusión, el camino desarrollado ha sido muy satisfactorio y aunque las circunstancias a causa de la pandemia han impedido poder llevar a cabo las actividades espero poder hacerlo en un futuro, que les motive a los alumnos y ofrecerles una visión diferente y más divertida sobre aprender matemáticas.

7. Líneas de investigación futuras

Este TFM puede servir como base para futuros trabajos que sigan la línea del mismo, mejorándola o incluso desarrollando nuevas propuestas encaminadas a la implementación de este tipo de herramientas en el aula de matemáticas.

Las líneas de investigación futura son:

- Implementación de las actividades propuestas anteriormente.
- Analizar el impacto real de los recursos y actividades.
- Realizar una autoevaluación ante posibles fallos y mejoras de cada una de las propuestas.
- Probar el comportamiento entre GeoGebra y Aumentaty para el desarrollo del *Break Out*.
- Experimentar y crear otro tipo de actividades en las que se pongan en uso ambas herramientas.
- Estudio de aplicaciones futuras y realización de nuevas actividades combinando estas con las que se han usado en este TFM.
- Resolución del problema que surge al intentar importar objetos 3D a Aumentaty desde GeoGebra.
- Desarrollo de nuevas opciones características de GeoGebra Classic para la aplicación de GeoGebra 3D.
- Desarrollo de una función que permita colocar textos, fórmulas y comentarios donde el usuario quiera en la vista de RA de GeoGebra RA.

Anexo

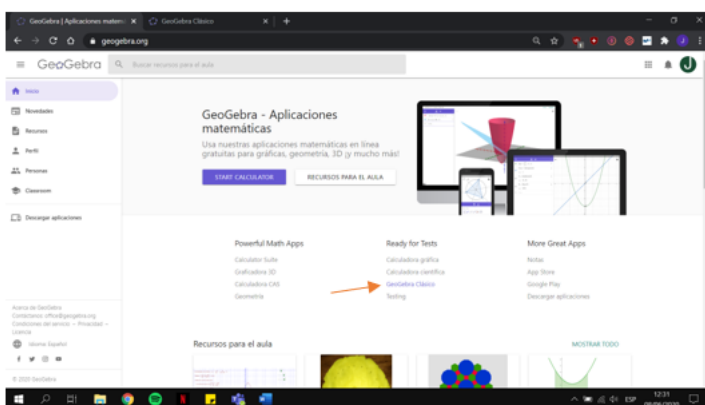
1. Ficha de trabajo propuesta “Posiciones relativas”

Ficha de trabajo: Posiciones relativas

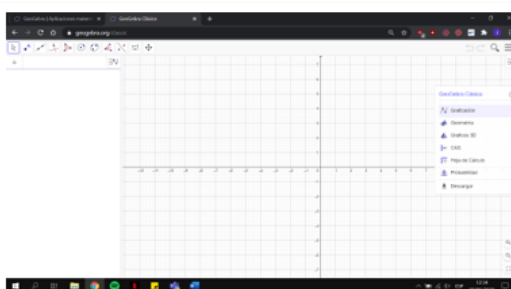
A continuación, encontrareis las instrucciones para crear vuestro propio applet para estudiar las posiciones relativas de 2 planos y varias cuestiones que deberéis responder entre ambos miembros de la pareja para posteriormente ponerlo en común con el resto del grupo.

Instrucciones:

1. Abrir la web de GeoGebra en vuestro ordenador.
2. En la pantalla de inicio debemos seleccionar la opción de “GeoGebra Clásico”.



Al hacer clic nos llevará a la siguiente pantalla:



3. En esta pantalla iremos a desplegable que se encuentra en la parte superior derecha

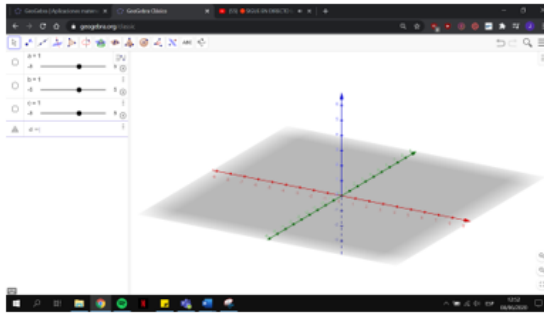


hacemos clic y seleccionamos la opción Vista. Ahí deshabilitaremos la *Vista*

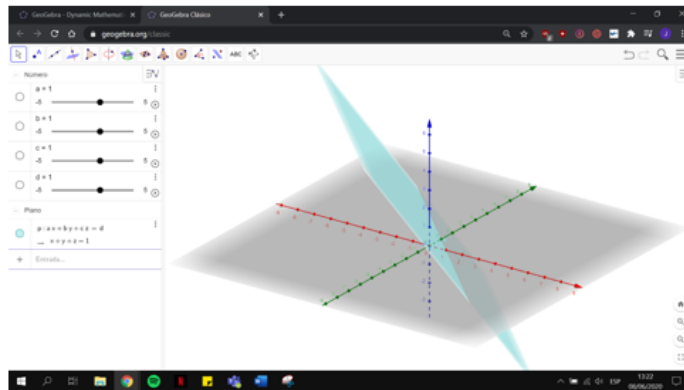
Gráfica y seleccionaremos la *Vista Gráfica 3D*.

4. Crear 4 deslizadores que llamaremos a, b, c y d.

Para crear los deslizadores tendremos que escribir en la vista algebraica el nombre de cada deslizador e igualarlo a 1.



5. Escribir la forma general del plano donde a, b, c son los coeficientes que acompañan respectivamente a x, y, z y d es el término independiente.



Repetiremos el mismo proceso para crear un segundo plano.

6. Una vez que tengamos ambos planos guardamos y abrimos el applet desde la aplicación de GeoGebra RA.
7. Hacemos clic en el botón RA, elegimos una superficie para ver nuestra construcción

Cuestiones:

1. ¿Qué ocurre a medida que el valor del coeficiente a cambia?
2. ¿Qué ocurre a medida que el valor del coeficiente b cambia?
3. ¿Qué ocurre a medida que el valor del coeficiente c cambia?
4. ¿Qué ocurre a medida que el valor del coeficiente d cambia?
5. ¿Qué debe ocurrir para que los 2 planos sean coincidentes respecto a los coeficientes de cada uno de los planos?
6. ¿Qué debe ocurrir para que los 2 planos sean paralelos respecto a los coeficientes de cada uno de los planos?
7. ¿Qué debe ocurrir para que los 2 planos sean secantes respecto a los coeficientes de cada uno de los planos?

2. Sesión Sistemas de Numeración

En algunas de las sesiones anteriores a la realización del *Break Out* se trabajará con los diferentes sistemas numéricos de las civilizaciones protagonistas de la actividad. Durante estas sesiones se profundizará en la historia de cada una de las civilizaciones, las curiosidades más destacadas de los sistemas de numeración, así como las aportaciones que estas civilizaciones realizaron.

Para realizar estas sesiones nos apoyaremos en dos presentaciones, una para las sesiones de clase y otra en la que se encuentre toda la información que ha recabado el docente.

A continuación, se muestran algunas de las diapositivas de ambas presentaciones:



Figura 24: Timeline de la presentación del docente.



Figura 25: Prehistoria de la presentación de clase.

A slide titled "SISTEMA BABILÓNICO O SEXAGESIMAL". It lists characteristics of the system: base 60, positional, 2 symbols (vertical and horizontal), and no zero. It also lists contributions: horoscope, 360-degree circle, time measurement, and sexagesimal system. A table shows the symbols for numbers 1-60. An "INFO" button is at the bottom right.

1	II	III	IIII	IIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIII
2	IIII	IIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIII
3	IIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII
4	IIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
5	IIIIIIIIII	IIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
6	IIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
7	IIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
8	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
9	IIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
10	IIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

Figura 26: Sistema Babilónico de la presentación de clase.

SISTEMA BABILÓNICO

Sumerios, acadios y babilonios



Características:

- Es un sistema de **base 60**
- **Posicional** (depende del valor y el lugar que ocupa).
- **2 símbolos:** la cuña vertical=1 unidad y la cuña horizontal = 10 unidades.
- **No tenían 0.**
- Para saber que número era se basaban en el contexto.

Aportes:

- El **horóscopo**
- La **división de la circunferencia en 360°**
- La **división del grado en horas, minutos y segundos**
- La **medición del tiempo**

Figura 23: Sistema Babilónico de la presentación del docente.

SISTEMA DE NUMERACIÓN EGIPCIO

CARACTERÍSTICAS:

- **BASE 10**
Fue el primer sistema de la historia de base 10.
- **BASADO EN IDEOGRAMAS**
Representaciones simbólicas
- **NO TENÍAN 0**
Crearon un 0 porque era requerido en trabajos de arquitectura
- **PRINCIPIO ADITIVO**
Se acumulan las cifras hasta obtener el valor.
- **NO ES POSICIONAL**
Los números pueden ser escritos de izquierda a derecha, de derecha a izquierda o de arriba a abajo.
- **ARMONÍA ESTÉTICA**
- **TENÍAN FRACCIONES**



ESCRITURA HIERÁTICA





JEROGLÍFICOS

Figura 4: Sistema Egipcio de la presentación de clase.

SISTEMA ROMANO

CARACTERÍSTICAS:

- Sistema de **base 10**
- Utilizan **7 símbolos**
- Principio **aditivo, multiplicativo y sustractivo**
- Se colocan de **mayor a menor**
- Sólo se pueden representar **números naturales**

CURIOSIDADES:

- Se basan en el sistema de numeración **etrusco**
- **No tenían 0**
- Historia sobre la escritura del número 4



Figura 5: Sistema Romano de la presentación del docente.

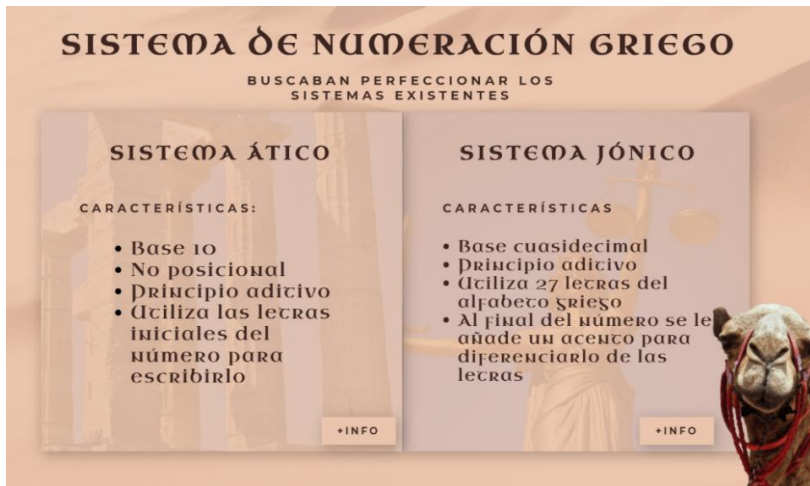


Figura 6: Sistema Griego de la presentación de clase.



Figura 7: Sistema Maya de la presentación de clase.



Figura 8: Sistema Maya de la presentación de clase.

Enlaces a ambas presentaciones:

- Presentación completa del docente:
<https://view.genial.ly/5e9869aeab06b70df96e12a9/presentation-presentacion-pehm>
- Presentación para trabajar con los alumnos:
<https://view.genial.ly/5e8b63e32f4c5b0e17f9373a/presentation-sistnumeracion-pehm>

3. Repositorio de enlaces de actividades

A continuación, se muestra una tabla con los diferentes *applets* de cada una de las actividades propuestas.

Actividad	Enlace
Actividad 1: El Cono de Apolonio	https://www.geogebra.org/m/e3br7hvg
Actividad 2: Posiciones relativas	<ul style="list-style-type: none">• Posiciones relativas de 2 planos: https://www.geogebra.org/m/gestcsx3• Posiciones relativas de 3 planos: https://www.geogebra.org/m/fp5snefe
Actividad 3: El Comienzo del Todo	https://drive.google.com/drive/folders/1-HEIym_zNi8gNF_TXIA8Ou4FepP2WYT5?usp=sharing

Referencias

- AllFreakApk*. (s.f.). Arloon Geometry. Obtenido de: <https://m.allfreeapk.com/arloon-geometry,1217328/>
- APKCombo*. (s.f.). UTPL Biología RA. Obtenido de: <https://apkcombo.com/es-es/biolog%C3%ADa-ra/com.ediam.biologiaUTPL/>
- Arloon*. (s.f.). Apps educativas con realidad aumentada. Obtenido de: <http://www.arloon.com/>
- Aumentaty*. (s.f.). Aumentaty Solutions. Obtenido de: <http://www.aumentaty.com/solutions/index.php/2017/11/02/la-plataforma-aumentaty/>
- Aumentaty*. (s.f.). Proyectos. Obtenido de: <http://www.aumentaty.com/community/es/everything/>
- Babinská, M. e. (2019). Augmented Reality and Future Mathematics Teachers. En T. Prodromou, *Augmented Reality in Educational Settings* (págs. 236-261). Brill Sense.
- Billinghurst, M., Hirokazu, K., & Poupyrev, I. (2001). The MagicBook: a transitional AR interface. En J. Joaquim, *Computer & Graphics, Vol 25, Issue 5* (págs. 745-753). Elsevier.
- Blázquez, A. (2017). Realidad aumentada en educación. *Gabinete de Tele-Educación, UPM*.
- Blázquez, A. (2018). Manual Aumentaty: Herramienta de Realidad Aumentada. *Gabinete de Tele-Comunicación, UPM*.
- Botana, F., Kovács, Z., Martínez-Sevilla, A., & Recio, T. (2019). Automatically Augmented Reality with GeoGebra. En T. Prodromou, *Augmented Reality in Educational Settings* (págs. 347-368). Brill Sense.
- Cahyono, A., Sukestiyarno, Y., Asikin, M., Miftahudin, Kafi Ahsan, M., & Ludwig, M. (2020). Learning Mathematical Modelling With Augmented Reality Mobile Math Trails Program: How can it work? *Journal on Mathematics Education, Vol 11, No 2*, 181-192.
- Canarias 3D*. (s.f.). Realidad Aumentada para guías turísticas y rutas de senderismo. Obtenido de: <http://www.canarias3d.es/index.php/realidad-aumentada/para-guias-turisticas>
- Cózar, R., De Moya, M. V., Hernández, J. A., & Hernández, J. R. (2015). Tecnologías emergentes para la enseñanza de las Ciencias Sociales. Una experiencia con el uso de la Realidad Aumentada en la formación inicial de maestros. *Digital Education Review*, 3-4.
- De la Mano, E. (2018). *Revista Ventana Abierta*. Recuperado el 2020, de Revista Ventana Abierta: <http://revistaventanaabierta.es/gamificando-mi-aula-escape-room-y-breakoutedu/>
- Del Río, L. (s.f.). *GeoGebra*. Obtenido de <https://www.geogebra.org/m/fuznheva#material/vzmsaz52>
- Desqbre*. (2020). Vesica Piscis en la Casa de los Tiros. Obtenido de: <https://paseosmatematicos.fundaciondescubre.es/noticias/vesica-piscis-en-la-casa-de-los-tiros/>
- Desqbre Fundación*. (s.f.). Paseos matemáticos por Granada. Obtenido de: <https://paseosmatematicos.fundaciondescubre.es/paseo-virtual/>

- Deterding, S., Khaled, R., Nacke, L., & Dixon, D. (2011). Gamification: Toward a Definition. *CHI 2011 Gamification Workshop Proceedings*. Vancouver, BC, Canada.
- Figueiredo, M. (2015). Teaching Mathematics with Augmented Reality. *12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Universidade do Algarve*. Faro, Portugal, 183.
- GeoGebra. (s.f.). Comparación entre aplicaciones de GeoGebra. Obtenido de: <https://www.geogebra.org/m/MqVqGRux#material/cjfsbt8n>
- GeoGebra Team German (s.f.). *GeoGebra*. Obtenido de <https://www.geogebra.org/m/fuznheva>
- Gómez, P. (2018). *Escape Room Matemático*. Obtenido de: <https://goo.gl/UXKAKH>
- Hernández, J., Pennesi, M., Sobrino, D., & Vázquez, A. (2012). *Tendencias Emergentes en Educación con TIC*. Espiral.
- Iphoneness. (s.f.). 5 Augmented Reality Math Apps. Obtenido de: <https://www.iphoneness.com/iphone-apps/augmented-reality-math-apps/>
- Johnson, L. e. (2010). *The Horizon Report*. New Media Consortium.
- Kaufmann, H., & Schmalstieg, D. (2003). Mathematics and geometry education. En J. Joaquim, *Computers & Graphics, Vol 27, Issue 3* (págs. 339-345).
- La Vanguardia*. (12 de Julio de 2016). Cómo descargar y jugar hoy a Pokémon Go en España. Obtenido de: <https://www.lavanguardia.com/tecnologia/videojuegos/20160712/403138073124/descargar-instalar-pokemon-go-espana.html>
- Lee, K. (2012). Augmented Reality in Education and Training. *Tech trends tech trends*, 56, 13-21.
- Microsoft. (s.f.). HoloLens 2. Obtenido de: <https://www.microsoft.com/es-es/hololens>
- MoMaTre. (s.f.). The Project. Obtenido de: <http://momatre.eu/the-project/>
- Moreno, E. (2019). El "BreakOut edu" como herramienta clave para la gamificación en la formación inicial de maestros/as. *EDUTEC*, 66-79.
- Muñoz, J.M. (2014). Realidad Aumentada una oportunidad para la educación. *Comunicación & Pedagogía*, 6-11.
- Observatorio del Gabinete de Tele-Comunicación, UPM*. (2019). Apps de Realidad Aumentada para utilizar en tus clases. Obtenido de: <https://blogs.upm.es/observatoriorogate/2019/03/29/apps-de-realidad-aumentada-para-utilizar-en-tus-clases/>
- Prensky, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the Horizon*, Vol 9, No 5.
- Prodromou, T. (2019). Notes on contributors. En T. Prodromou, *Augmented Reality in Educational Settings*. Brill sense.
- SMPAD. (2016). Preventízate ante las drogas. Obtenido de: <http://www.puertodelacruz.es/smpad/?p=1834>

Tomaschko, M., & Hohenwarter, M. (2019). Augmented Reality in Mathematics Education: The Case of GeoGebra AR. En T. Prodromou, *Augmented Reality in Educational Settings* (págs. 325-345). Brill Sense.

Universo Abierto. (2016). Layar: realidad aumentada aplicada a bibliotecas. Obtenido de: <https://universoabierto.org/2016/01/06/layar-realidad-aumentada-aplicada-a-bibliotecas/>

Yingprayoon, J. (2015). Teaching mathematics using augmented reality. *20th Asian Technology Conference in Mathematics*, (págs. 384-391). Leshan, China.