

# Autofunciones de alta energía y localización inversa

Alba Dolores García Ruiz

Máster en Matemáticas y Aplicaciones



MÁSTERES  
DE LA UAM  
2020-2021

Facultad de Ciencias

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

---

AUTOFUNCIONES DE ALTA ENERGÍA Y  
LOCALIZACIÓN INVERSA

---

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER  
MÁSTER EN MATEMÁTICAS Y APLICACIONES

Presentado por:  
Alba Dolores García Ruiz

Tutores:  
Alberto Enciso Carrasco  
*Director*

María del Mar González Noguera  
*Tutor académico*

Curso académico 2020-2021  
Presentado en junio de 2021



# Autofunciones de alta energía y localización inversa

Alba Dolores García Ruiz

Alba Dolores García Ruiz *Autofunciones de alta energía y localización inversa*.  
Beneficiaria de una beca de máster JAE Intro SOMdM 2020.  
Trabajo de fin de Máster. Curso académico 2020-2021.

**Responsable de  
tutorización**

Alberto Enciso Carrasco  
*Director*

María del Mar González Nogueras  
*Tutor académico*

Máster en Matemáticas y  
Aplicaciones  
Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de  
Madrid

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Dña. Alba Dolores García Ruiz, con D.N.I. 77021580P,

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Máster (T.F.M.), correspondiente al curso académico 2020-2021, es original, entendida esta, en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Madrid a 11 de enero de 2022

Fdo: Alba Dolores García Ruiz



# Índice general

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
Summary	XIII
Introducción	XV
1. ¿Qué son las autofunciones y por qué son útiles?	XV
2. Conjuntos de nivel	XVI
3. La ecuación de Helmholtz y teoremas de localización inversa	XVII
<b>1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz</b>	<b>1</b>
1.1. Rigidez de las autofunciones de alta energía	1
1.2. Autofunciones aproximadas y la función espectral	5
1.3. Demostración del teorema 1.4	7
1.3.1. Aplicación del teorema 1.3 y algunos cálculos	7
1.3.2. G.A.T.: Teoría de aproximación global	11
1.3.3. Construimos la autofunción aproximada	14
1.4. Algunos comentarios <i>a posteriori</i>	16
<b>2. El Principio de localización inversa</b>	<b>21</b>
2.1. La esfera unidad $S^d$ y el toro plano $\mathbb{T}^d$	22
2.1.1. Localización inversa para esféricos armónicos	22
2.1.2. El caso de $\mathbb{T}^d$	25
2.1.3. Localización inversa en múltiples regiones	26
2.2. Campos de Beltrami	28
2.2.1. Teorema principal para campos de Beltrami	29
2.2.2. Observaciones finales	32
2.3. La ecuación de Schrödinger: potencial de Coulomb y oscilador armónico	34
2.3.1. El oscilador armónico	36
2.3.2. El potencial de Coulomb	41
<b>3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados</b>	<b>45</b>
3.1. Problemas de realización	45
3.2. El caso euclídeo: una estrategia general.	46
3.3. Realización de torbellinos enlazados en campos de Beltrami de altas energías	47
3.4. Una conjetura de Berry sobre conjuntos nodales anudados para operadores de Schrödinger	53
3.5. Autofunciones del Laplaciano en el toro y la esfera con conjuntos nodales de topología complicada	56
<b>4. Localización inversa en el espacio hiperbólico</b>	<b>59</b>
4.1. El espacio hiperbólico $\mathcal{H}^n(\kappa)$	59

Índice general

4.2. Localización inversa en el caso del KCH . . . . .	61
4.2.1. Teorema principal . . . . .	61
4.2.2. Demostración del lema 4.1 . . . . .	65
4.2.3. Un corolario de realización . . . . .	66
4.3. Localización inversa en el caso del OAH . . . . .	68
4.3.1. Teorema principal . . . . .	69
4.3.2. Demostración del lema 4.3 . . . . .	73
4.3.3. Un nuevo resultado de realización . . . . .	74
4.4. Algunas cuestiones sugerentes . . . . .	76
<b>5. G.A.D. en el espacio hiperbólico y aplicaciones</b>	<b>79</b>
5.1. G.A.D. en $\mathcal{H}^d(\kappa)$ . . . . .	81
5.2. Algunas (posibles) consecuencias de este resultado . . . . .	85
<b>A. El problema de autovalores</b>	<b>87</b>
<b>B. Funciones elementales</b>	<b>95</b>
B.1. Función Gamma . . . . .	95
B.2. Esféricos armónicos . . . . .	96
B.3. Funciones de Bessel . . . . .	97
B.3.1. Funciones de Bessel de primera especie: $J_\alpha$ . . . . .	97
B.3.2. Funciones de Bessel de segunda especie: $Y_\alpha$ . . . . .	97
B.3.3. Otras funciones de Bessel . . . . .	98
B.4. Polinomios de Laguerre . . . . .	99
B.5. Funciones de Legendre y otras relacionadas . . . . .	99
B.6. Polinomios de Jacobi . . . . .	100
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>

## Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a don Alberto Enciso Carrasco, mi director, por haber tutorizado y enfocado el proyecto de manera excepcional. Me ha sabido guiar en todo momento, resolver todas mis dudas y enseñarme nuevas referencias y herramientas que han sido de gran ayuda para el desarrollo del trabajo. Su esfuerzo y dedicación para conmigo durante los últimos meses han sido la pieza clave que me ha permitido desarrollar este T.F.M. Así mismo, traslado mi más sincero agradecimiento a don Daniel Peralta-Salas; la excelente labor de ambos investigadores ha sido inestimable para la obtención de los resultados originales que se exponen en los capítulos 4 y 5. Del mismo modo, me gustaría agradecer a doña María del Mar González Nogueras por desempeñar de forma inmejorable su labor como tutora académica, aconsejando y apoyando durante todo el proceso con una calidez característica.

Agradezco al Consejo Superior de Investigaciones Científicas por haber financiado gran parte de mis estudios de máster otorgándome una beca de colaboración de introducción a la investigación “JAE Intro SOMdM 2020”; y agradezco a todo el personal investigador y administrativo del ICMAT, el Centro de Excelencia Severo Ochoa en el que llevaba a cabo esta beca: en todo momento han estado ahí para ayudarme, y su eficiencia y amabilidad han hecho de mi llegada al ICMAT una experiencia enriquecedora. Gracias a la Universidad Autónoma de Madrid, por haberme facilitado los medios necesarios para la realización de este Trabajo Final de Máster, ya que de no ser así, no me habría sido posible disponer de los materiales e instalaciones que me han ayudado a desarrollarlo.

Una vez dadas las gracias a mi Universidad y tutor me gustaría agradecer a todos aquellos investigadores y autores que han trabajado previamente en este campo y han hecho, gracias a su esfuerzo, dedicación y trabajo, posible escribir sobre la temática tratada en mi proyecto. Sin ellos, sin las barreras que han tirado a su paso y sin sus hallazgos no hubiese sido posible siquiera plantearme la temática a tratar.

Por último, pero no por ello menos importante, gracias a mi familia, amigos y compañeros que han supuesto en todo momento un apoyo moral de gran importancia, ayudándome a superar los obstáculos a nivel psicológico que un proyecto de tal envergadura lleva consigo.



## Resumen

El análisis de las autofunciones del operador de Laplace, esto es, las soluciones no triviales del problema de autovalores  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ , es uno de los temas centrales en EDPs. Un tema íntimamente relacionado es el estudio de las soluciones de la llamada ecuación de Helmholtz,  $\Delta v + v = 0$ , que se conocen habitualmente como ondas monocromáticas. Una relación bien conocida entre ondas monocromáticas y autofunciones es que el comportamiento local de una sucesión de autofunciones con alta energía (esto es,  $\lambda^2 \rightarrow \infty$ ) cerca de un punto de máximo define una onda monocromática acotada, tras un reescalado adecuado que depende del autovalor. Por el contrario, el comportamiento local de una onda monocromática se puede realizar por una autofunción aproximada (o casi-modo) asociada a cualquier energía suficientemente elevada, en escalas determinadas por esta energía y salvo un error tan pequeño como queramos.

Un poderoso refinamiento de este último hecho es lo que llamamos principio de localización inversa: si, *grosso modo*, la degeneración de los autovalores de alta energía es lo suficientemente grande, uno puede reemplazar las autofunciones aproximadas por autofunciones propiamente dichas. En estas notas probamos versiones concretas de este principio para los potenciales de Coulomb y del oscilador armónico (en  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ ) y para el Laplaciano y los campos de Beltrami en el toro y la esfera. Además mostramos que este tipo de resultados han sido esenciales en la demostración de una conjetura de Berry sobre conjuntos nodales anudados del operador de Schrödinger y para obtener soluciones estacionarias de la ecuación de Euler con energía finita y líneas y tubos de vorticidad anudados como queramos.

Finalmente, mencionamos algunas ideas clave detrás del principio de localización inversa buscando desarrollar una teoría sistemática y relajar las hipótesis de simetría subyacentes. Esta línea de investigación continúa abierta y la autora considera que puede dar interesantes frutos en el futuro cercano.



## Summary

The analysis of the eigenfunctions of the Laplace operator, that is, nontrivial solutions to the eigenvalue problem  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ , is one of the central problems in PDEs. A closely related subject is the study of solutions to the so-called Helmholtz equation,  $\Delta v + v = 0$ , which are usually called monochromatic waves. A well-known link between monochromatic waves and eigenfunctions is that the local behaviour of a sequence of high-energy eigenfunctions (i.e., with  $\lambda^2 \rightarrow \infty$ ) near their maxima defines a bounded monochromatic wave, after suitable rescalings that depend on the eigenvalue. Conversely, the local behaviour of a monochromatic wave can be realized by an approximate eigenfunction (or quasimode) of any large enough energy, on scales determined by this energy and up to a controllable error.

A powerful refinement of the latter fact is what we call the inverse localization principle: if, roughly speaking, the degeneracy of the high energy eigenvalues is large enough, one can replace the quasimodes by actual high-energy eigenfunctions. In this notes we prove precise versions of this principle for Coulomb and harmonic oscillator potentials (in  $\mathbb{R}^d$  and  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ ) and for the Laplacian and Beltrami fields on the torus and the sphere. We also show that this kind of results have been instrumental in the proof of Berry's conjecture on knotted nodal sets of Schrödinger operators and to obtain finite-energy stationary solutions of Euler equation with knotted vortex lines and tubes.

Finally, we mention some key ideas behind the localization principle in order to develop a systematic theory and try to weaken the underlying symmetry hypothesis. This line of research is still open and the author consider that it can be really fruitful in the future.



# Introducción

## 1. ¿Qué son las autofunciones y por qué son útiles?

Las autofunciones del Laplaciano aparecen por primera vez durante el estudio de la vibración en membranas. Las ecuaciones del movimiento en una membrana vibratoria  $\Omega$  están dadas por el problema de valores iniciales y de frontera Dirichlet para el perfil  $u(t, x)$  en  $\mathbb{R}_0^+ \times \Omega$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u(t, x) = 0; \\ u(0, x) = \varphi_0(x), & \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = 0; \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Si  $\varphi_\lambda$  es una función propia Dirichlet, i.e., una solución no trivial de la ecuación

$$\left( \Delta + \lambda^2 \right) \varphi_\lambda = 0 \text{ y } \varphi_\lambda|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

entonces se obtiene una solución periódica de la ecuación de ondas en  $\mathbb{R} \times \Omega$ :

$$u_\lambda(t, x) = (\cos(t\lambda)) \varphi_\lambda(x).$$

Por tanto,  $\varphi_\lambda$  representa el perfil de una vibración periódica, es decir, un modo normal (en inglés, *a mode of vibration*).

Una generalización natural es considerar las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami en variedades riemannianas  $(M, g)$ , con o sin frontera. El operador de Laplace de  $(M, g)$  está definido como la divergencia del gradiente:  $\Delta_g = \text{div}_g(\nabla^g)$ ; y viene dado en coordenadas locales por

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

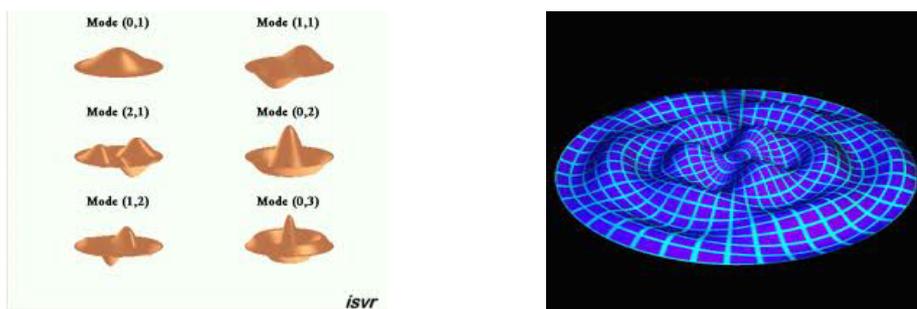


Figura 1.: El conjunto nodal de una autofunción nos da las posiciones en las cuales la membrana vibratoria permanece quieta. Imágenes extraídas de las notas de Steve Zelditch, que se pueden encontrar [aquí](#).

Aquí  $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ ,  $(g^{ij})$  es la matriz inversa de  $(g_{ij})$  y  $\sqrt{g} =: \sqrt{\det(g_{ij})}$ . En variedades riemannianas con frontera vacía  $\partial\mathbb{M} = \emptyset$ , el problema de autovalores (1) adopta la forma

$$\left(\Delta_g + \lambda^2\right) u_\lambda = 0. \quad (2)$$

Cuando la variedad  $\mathbb{M}$  es compacta, el operador de Laplace-Beltrami tiene un espectro discreto con multiplicidades finitas y, como único punto de acumulación, el infinito. En el apéndice A tratemos el problema de autovalores, donde se justifica esta afirmación. Escribimos

$$0 = \lambda_0^2 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \nearrow +\infty,$$

para la sucesión ordenada de autovalores, repetidos según su multiplicidad. Del correspondiente conjunto  $\{u_j\}_{j \geq 0}$  de autofunciones se puede tomar una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{M})$  con respecto al producto escalar  $\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{M})} = \int_{\mathbb{M}} uv \, dV_g$ , donde  $dV_g$  es la forma de volumen de  $(\mathbb{M}, g)$ . De igual importancia son las frecuencias  $\lambda_j$ , que son autovalores del operador pseudo-diferencial elíptico de primer orden  $\sqrt{-\Delta}$  (consultar, de nuevo, el apéndice A).

Como en el caso de la membrana vibratoria, las autofunciones  $u_k$  representan modos de vibración de  $\mathbb{M}$ . También modelan estados estacionarios de una partícula libre en la variedad.

## 2. Conjuntos de nivel

En matemáticas, el estudio de las autofunciones tiende a caer en dos categorías:

- análisis de los estados fundamentales  $u_0$  y  $u_1$ ;
- análisis de las frecuencias altas; centrado, de hecho, en el límite de autofunciones  $\lim \lambda_j \rightarrow \infty$ .

En ambos ámbitos es habitual estudiar propiedades de las autofunciones tales como acotaciones  $L^p$ , distribución de puntos críticos, relación con flujos geodésicos, conjuntos nodales, etc. En este trabajo aparecerá principalmente este último problema, en el que se han hecho numerosos avances recientemente.

El «conjunto cero» o conjunto nodal de la función  $u$  es el espacio  $\mathcal{N}_u = \{x \in \mathbb{M} \mid u(x) = 0\}$ . Físicamente, se trata de los puntos de la membrana vibrante que permanecen estáticos, es decir, la parte de  $\mathbb{M}$  quieta durante la vibración. Los patrones nodales (en inglés, *nodal patterns*) han sido objeto de estudio desde la época de Ernst Chladni, siglo XIX, cuando se comenzaron a visualizar experimentalmente estos modos de vibración. Hoy en día, sigue siendo un fructífero campo de estudio. Un ejemplo de ello son los conocidos como problemas de realización en los que se trata de realizar una determinada variedad (en el caso más usual, un nudo o enlace) como conjunto nodal de una función que es solución de una cierta ecuación en derivadas parciales impuesta por la naturaleza del fenómeno a modelar.

En líneas generales, se conoce que el comportamiento de los conjuntos nodales para autofunciones con energía bajas (especialmente, la primera no trivial  $u_1$ ) es bastante flexible. Eremenko, Jakobson y Nadirashvili [EJN07] realizaron un estudio detallado de las posibles configuraciones de los conjuntos nodales en la esfera dos dimensional  $S^2$ . En cualquier superficie cerrada, Lisi [Lis11] probó que cualquier curva era difeomorfa a  $u_1(0)$  para alguna métrica  $g$ . Este resultado fue generalizado por A. Enciso y D. Peralta-Salas [EPS15a] para variedades e hipersuperficies arbitrarias  $\Sigma \subseteq \mathbb{M}$ .

### 3. La ecuación de Helmholtz y teoremas de localización inversa

Para autovalores grandes ( $\lambda_k \rightarrow \infty$ ) la configuración de los conjuntos nodales es mucho más rígida. Una muestra de ello es la famosa conjetura de Yau sobre los conjuntos nodales [Yau82]: si notamos  $u_\lambda$  a una función propia asociada al valor propio  $\lambda^2$  y  $\mathcal{N}_{u_\lambda} := \{x \in \mathbb{M} : u_\lambda^2(x) = 0\}$ , su conjunto nodal; entonces la conjetura de Yau afirma que existen constantes  $C_{\mathbb{M},g}, c_{\mathbb{M},g}$  (dependientes de la variedad  $\mathbb{M}$  y de su métrica  $g$ ) tales que

$$c_{\mathbb{M},g}\lambda \leq \mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{N}_{u_\lambda}) \leq C_{\mathbb{M},g}\lambda, \quad (3)$$

donde  $\mathcal{H}^k$  es la medida de Hausdorff de dimensión  $k$ . Esta propiedad fue demostrada por Donnelly y Fefferman [DF88] en el caso en que la métrica  $g$  es analítica. Muy recientemente, A. Logunov ha hecho importantes avances también en esta línea de trabajo: en su artículo [Log18], Logunov ha demostrado la cota inferior de la conjetura de Yau. En el caso más general, a fecha de hoy, permanece sin resolver.

Esta rigidez se debe al comportamiento asintótico de las autofunciones asociadas a energías grandes o de alta energía (habitualmente llamadas *high-energy eigenfunctions*): en cualquier variedad riemanniana  $\mathbb{M}$ , estas autofunciones  $u_j$ ,  $j \rightarrow \infty$ , se comportan localmente (en conjuntos de diámetro  $1/\lambda_j$ ), como las ondas monocromáticas en  $\mathbb{R}^n$  lo hacen en bolas de diámetro 1. Por suerte, la riqueza de esta clase de ondas permite, en ciertos contextos, recuperar la libertad de que disponíamos sobre los conjuntos nodales. En el capítulo 3 se proporcionan algunos resultados muy recientes en esta línea de investigación.

### 3. La ecuación de Helmholtz y teoremas de localización inversa

Como ya hemos comentado, estrechamente relacionado con el estudio de las autofunciones se encuentra el conocimiento de las ondas monocromáticas. Estas son soluciones de la ecuación

$$\Delta u + u = 0, \quad (4)$$

donde  $\Delta$  es el Laplaciano euclideo habitual. En cierto momento, estaremos interesados también en estudiar esta ecuación en otra métrica y consideraremos, por tanto, el operador  $\Delta_g + 1$ . En el desarrollo de este trabajo son especialmente interesantes las soluciones de esta ecuación definidas en dominios acotados  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  y en todo el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$  gracias a la teoría de aproximación global para ecuaciones elípticas desarrollada por Lax, Malgrange y Browder, entre otros autores.

El principal nexo entre ondas monocromáticas y autofunciones es el siguiente hecho bien conocido: el comportamiento local de una sucesión  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de autofunciones con autovalores  $\lambda_k \rightarrow \infty$  cerca de sus puntos máximos se asemeja a una onda monocromática acotada, tras reescalar adecuadamente mediante un factor relacionado con  $\lambda_k$ . La mayor desventaja de este resultado es que no proporciona ninguna información para discernir si una solución de Helmholtz en  $\mathbb{R}^n$  corresponde a una autofunción en la variedad o no.

Por el contrario, el comportamiento local de cualquier onda monocromática se puede realizar por una autofunción aproximada (también conocidas como casi-modos, del inglés *quasimode*, nomenclatura que no utilizaremos en lo que sigue), es decir, una función próxima en algún sentido a las autofunciones. Más concretamente, se puede encontrar una combinación lineal de autofunciones de alta energía con autovalores cercanos que aproximan una solución de Helmholtz prefijada en la escala natural dada por  $1/\lambda$ .

Una pregunta que surge naturalmente en teoría espectral es cuándo se pueden reemplazar

zar las autofunciones aproximadas por autofunciones propiamente dichas. Es un resultado clásico que esto es cierto en el caso de los esféricos armónicos pero, *a priori*, no está claro que se pueda hacer en una variedad riemanniana genérica. Este problema, bautizado como «problema de localización inversa», supone un poderoso refinamiento de la aproximación por autofunciones aproximadas. El principio de localización inversa afirma *grosso modo* que si la degeneración de los autovalores de alta energía de  $M$  es lo suficientemente grande, se puede alcanzar la aproximación con auténticas funciones propias. El problema permanece abierto hasta el día de hoy en su versión más general. No obstante, en ciertos contextos particularmente simétricos, Enciso y Peralta-Salas, junto con Torres de Lizaur y Hartley, han dado una respuesta afirmativa a esta cuestión.

Estos contextos son los siguientes:

- En [EPSdL21] se demuestra el principio para las autofunciones del toro plano  $(\mathbb{T}^n, g_0) = ((\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n, g_0)$  (donde  $g_0$  denota la métrica plana usual) y se aporta una nueva demostración para el, ya conocido, caso de la esfera de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con su métrica habitual  $(S^n, g_{S^n})$ .
- Si consideramos la ecuación de autovalores como un caso particular de la ecuación relativista de Schrödinger, en el que la partícula es libre, podemos preguntarnos acerca del problema resultante al añadir un cierto potencial  $V$ . Para el oscilador armónico y el potencial de Coulomb, esenciales en mecánica cuántica, el problema fue resuelto en [EHPS18b] y [EHPS18a], respectivamente. Además podríamos considerar el caso de una partícula sujeta a uno de estos potenciales y que se encuentra en un espacio de curvatura negativa constante. Muy recientemente A. Enciso, D. Peralta-Salas y la autora han resuelto el problema ya comentado en este nuevo contexto: el espacio hiperbólico. Su prueba se podrá encontrar en el capítulo 4. Además, se está preparando un artículo conteniendo este resultado para su posible publicación [EGRPSa].
- En el marco de las autofunciones vectoriales, i.e.  $V = (v_1, v_2, v_3)$  tales que  $\Delta v_j = \lambda v_j$  para  $j = 1, 2, 3$ , se ha probado cierto el principio para campos de Beltrami, a saber, funciones  $u : \mathbb{M}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que  $\text{rot } u = \lambda' u$  donde  $\mathbb{M}^3$  es la esfera o el toro de dimensión 3 [EPSdL17].

Para la demostración de estos hechos ha sido clave la existencia de una cierta flexibilidad que aparece en el problema como consecuencia de la simetría del mismo. Concretamente, en todas las demostraciones arriba mencionadas se utiliza fuertemente las grandes multiplicidades de las autofunciones de alta energía. Por esta razón, la prueba no se puede extender a una variedad riemanniana genérica. De hecho, el resultado no debería ser cierto en general. Explotando estas ideas y utilizando herramientas de análisis microlocal y geometría diferencial entre otros, se cree que es posible desarrollar una teoría sistemática de localización inversa en variedades. En estas notas comentamos brevemente cuales creemos que podrían ser los siguientes pasos a seguir para alcanzar este objetivo: tratar de rebajar las hipótesis de simetría subyacentes, estudiar una propiedad de localización inversa cuantitativa y relacionarla con las métricas Zoll aparecen como los hitos a seguir.

La localización inversa es una poderosa herramienta por asegurar que cualquier onda monocromática definida en un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  se puede reproducir en una bola pequeña de la variedad por una autofunción de alta energía. Esto nos permite por ejemplo «transferir» aquellos conjuntos nodales que sean realizables en el espacio euclídeo a autofunciones de alta energía en la variedad (o, en su defecto, al problema con potencial no

### 3. *La ecuación de Helmholtz y teoremas de localización inversa*

nulo), siempre que se satisfaga una cierta estabilidad estructural. Gracias a esto, los teoremas de localización inversa han permitido resolver la conjetura de Berry en conjuntos nodales anudados del operador de Schrödinger y, en el contexto de mecánica de fluidos, obtener soluciones estacionarias con energía finita de la ecuación de Euler tridimensional que presentan líneas de vorticidad anudadas, entre otros resultados importantes. Comentaremos estas importantes aplicaciones en el capítulo 3.

Finalmente destacaremos que en todas las aplicaciones anteriormente mencionadas se hace uso de la teoría de aproximación global con decaimiento. Hablaremos de ella brevemente a lo largo de todo el trabajo y dedicaremos el capítulo 5 a la presentación de un nuevo resultado de G.A.D. en el contexto del espacio hiperbólico, que se espera que pueda ser una herramienta en la resolución de problemas de realización en el contexto del espacio hiperbólico tanto para la ecuación de Helmholtz como para ciertas ecuaciones diferenciales no lineales.



# 1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

En este capítulo demostramos dos resultados clásicos que relacionan las funciones protagonistas de estas notas: las autofunciones del Laplaciano en una variedad cerrada y las ondas monocromáticas. En primer lugar veremos que, como la ley de Weyl afirma, el comportamiento local a cierta escala de toda autofunción se rige por la ecuación de Helmholtz y, a continuación, notaremos que un resultado recíproco es cierto si utilizamos autofunciones aproximadas.

## 1.1. Rigidez de las autofunciones de alta energía

Fijamos  $\mathbb{M}$  una  $d$ -variedad de Riemann cerrada con métrica  $g$ , de clase  $C^\infty$  (de ahora en adelante, diremos simplemente «regular» o «suave»). Notaremos por  $\Delta_g$  al operador de Laplace-Beltrami en  $\mathbb{M}$  para diferenciarlo del Laplaciano euclídeo habitual  $\Delta$ . En lo que sigue, supondremos que  $\mathbb{M}$  es cerrada (i.e., sin borde y compacta). Respecto del producto escalar definido en  $L^2(\mathbb{M})$ , el operador  $\Delta_g$  es autoadjunto. Por ello, el Teorema Espectral (véase el apéndice A) permite tomar una base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\mathbb{M})$  consistente en autofunciones asociadas a valores propios que tomamos ordenados  $0 = \lambda_0^2 < \lambda_1^2 \leq \dots \leq \lambda_k^2 \leq \dots \rightarrow \infty$ .

*Observación 1.1.* Llamamos la atención del lector sobre el hecho de que la ecuación de autovalores considerada en estas notas será  $(\Delta_g + \lambda_k^2)u = 0$ , en contraste con la convención adoptada por gran cantidad de manuales y autores de notar a los valores propios sin el exponente cuadrado,  $(\Delta_g + \lambda_k)u = 0$ . Intuitivamente, por ser el Laplaciano  $\Delta_g$  un operador de segundo orden, la escala más adecuada para cancelar el factor  $\lambda_k^2$  es  $\lambda_k^{-1}$ , de forma que nos ahorramos escribir molestas raíces cuadradas continuamente al reescalar nuestro problema. Denominamos, como es habitual, frecuencias del Laplaciano a los valores  $\lambda_k$ .

Por otro lado, diremos que una función  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una onda monocromática (en inglés, *monochromatic waves*) si es una solución regular de la ecuación de Helmholtz:  $\Delta v + v = 0$ . Como veremos, ondas monocromáticas y autofunciones son clases de funciones estrechamente relacionadas. Ya en la introducción hablamos sobre la flexibilidad de las funciones propias asociadas a energía pequeñas (recordemos los resultados de [Lis11] y [EPS15a]). La contrapartida de esta propiedad es la rigidez de las mismas a medida que aumentamos el valor de la energía asociada, que se puede intuir por el trabajo de [Yau82], [DF88] y [Log18], entre otros. El primer nexo de unión entre autofunciones en una variedad cerrada  $\mathbb{M}$  y ondas monocromáticas euclídeas es un hecho bien conocido en este escenario: toda sucesión de funciones propias con alta energía (cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ ) se comporta localmente (tras un reescalado adecuado) como una onda monocromática. De este resultado, que es bien conocido incluimos una demostración en esta sección que se debe a A. Eremenko, D. Jakobson y N. Nadirashvili, 2007 [EJN07].

**Definición 1.1.** Dada una función  $f \in L^\infty(\mathbb{M})$  diremos que un punto  $x \in \mathbb{M}$  es un punto de máximo de  $f$  si se tiene que  $|f(x)| = \|f\|_{L^\infty}$ .

1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

**Teorema 1.1.** Sea  $(\mathbb{M}, g)$  una  $d$ -variedad riemanniana cerrada, el comportamiento local de las autofunciones del Laplaciano  $u_k$  tales que  $\Delta_g u_k + \lambda_k^2 u_k = 0$ , para  $k$  lo suficientemente grande, está dado, cerca de un punto de máximo y en la escala natural  $\lambda_k^{-1}$ , por una solución acotada de la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Delta \tilde{u} + \tilde{u} = 0$ .

*Demostración.* Primero demostraremos la existencia de límite,  $\tilde{u}$ . Para ello utilizaremos una técnica conocida habitualmente por su terminología en inglés: *Blow-up procedure*, o procedimiento del *Blow-up*.

Fijado  $k \in \mathbb{N}$ , consideramos la autofunción  $u_k : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por satisfacer en todo  $\mathbb{M}$  la ecuación

$$\Delta_g u_k + \lambda_k^2 u_k = 0. \quad (1.1)$$

Tomamos también un punto de máximo de ella,  $x_k \in \mathbb{M}$  y normalizamos la sucesión de funciones propias como  $\frac{u_k}{\|u_k\|_{L^\infty(\mathbb{M})}} = \frac{u_k}{|u_k(x_k)|}$ , de forma que  $\|u_k\|_{L^\infty(\mathbb{M})} = 1$ .

Para cada uno de estos  $x_k \in \mathbb{M}$  fijamos  $\{E_1^k, \dots, E_d^k\}$  una base ortonormal de  $T_{x_k} \mathbb{M}$  y definimos coordenadas geodésicas normales asociadas a esta base. Es decir, notamos por  $I_k \subseteq T_{x_k} \mathbb{M}$  al entorno de cero donde está bien definida la aplicación exponencial:

$$\exp_{x_k} : I_k \rightarrow \mathbb{M} \quad (1.2)$$

$$v \mapsto \exp_{x_k}(v) := \gamma_{x_k, v}(1), \quad (1.3)$$

siendo  $\gamma_{x_k, \nu}$  la única geodésica que pasa por  $x_k$  con dirección  $\nu$ . Las coordenadas geodésicas están dadas entonces por la parametrización

$$X : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M} \quad (1.4)$$

$$x \mapsto X(x) := \exp_{x_k}(\theta(x)); \quad (1.5)$$

siendo  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  una bola abierta centrada en el origen y

$$\theta : \mathbb{B} \rightarrow T_{x_k} \mathbb{M} \quad (1.6)$$

$$x \mapsto \theta(x) := \sum_{k=1}^d x^i E_i^k. \quad (1.7)$$

Para  $r_k$  lo suficientemente pequeño (basta pedir,  $r_k < i_{x_k}$ , donde  $i_{x_k}$  es el radio de inyectividad de  $\mathbb{M}$  en  $x_k$ , es decir, el mayor radio tal que  $\exp_{x_k}$  es un difeomorfismo en  $\mathcal{B}_{i_{x_k}}^g$ ), podemos definir la bola geodésica centrada en  $x_k$  y de radio  $r_k$  como

$$\mathcal{B}_{r_k}^g(x_k) = \left\{ \exp_{x_k}(\theta(x)) \mid |x| < r_k \right\}. \quad (1.8)$$

Por ser  $\mathbb{M}$  una variedad compacta sabemos que el radio de inyectividad de la variedad  $i_{\mathbb{M}} = \inf_{p \in \mathbb{M}} i_p$  es positivo. Podemos entonces encontrar un valor  $n > 0$  tal que  $i_{x_k} \geq i_{\mathbb{M}} \geq n > 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Si definimos  $C := n\lambda_1$ , se cumple  $\frac{C}{\lambda_k} = n \frac{\lambda_1}{\lambda_k} < n \leq i_{x_k}$  y las bolas geodésicas  $\mathcal{B}_{C/\lambda_k}^g(x_k) = \left\{ \exp_{x_k}(\theta(x)) \mid |x| < C/\lambda_k \right\}$  están siempre bien definidas.

En este momento realizamos el *Blow-up* de cada una de estas bolas a la bola unidad de  $\mathbb{R}^d$ . Para ello, hacemos un reescalado definiendo una nueva métrica  $\tilde{g}_k = \lambda_k^2 \cdot g$  y nuevas

coordenadas normales dadas por las parametrizaciones:

$$Y : V_k = B \cdot \sqrt{\lambda_k} \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{M} \quad (1.9)$$

$$y \mapsto Y(y) := \exp_{x_k}(\lambda_k^{-1}\theta(y)). \quad (1.10)$$

Una ventaja de utilizar las coordenadas normales geodésicas es que nos permiten diagonalizar la métrica  $\tilde{g}_k$  en  $x_k$  y obtener la siguiente expansión en serie de Taylor de los coeficientes  $g_{ij}(x)$  y  $g^{ij}(x)$ :

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^d R_{ikjl} x^k x^l + \mathcal{O}(|x|^3) \text{ y}$$

$$g^{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^d R_{ikjl} x^k x^l + \mathcal{O}(|x|^3),$$

donde  $R$  es el tensor de curvatura de Riemann en  $\mathbb{M}$ ,  $R_{ijkl} = g(R(E_i, E_k)E_j, E_l)$  en  $x$  y  $\delta_{ij}$  es el símbolo de Kronecker.

Observando que  $\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij}(\lambda_k^{-1}y)$ , con algunos cálculos directos podemos comprobar

$$\tilde{g}_{ij}(y) = \delta_{ij} + \sum_{k,l=1}^d \frac{\lambda_k^{-2}}{3} R_{ikjl} y^k y^l + \mathcal{O}(\lambda_k^{-3}|y|^3) = \delta_{ij} + \mathcal{O}(\lambda_k^{-2}) \text{ y}$$

$$\tilde{g}^{ij}(y) = \delta_{ij} - \sum_{k,l=1}^d \frac{\lambda_k^{-2}}{3} R_{ikjl} y^k y^l + \mathcal{O}(\lambda_k^{-3}|y|^3) = \delta_{ij} + \mathcal{O}(\lambda_k^{-2}).$$

También es inmediato que

$$\log |\tilde{g}|(y) = \sum_{k,l,i=1}^d \frac{\lambda_k^{-2}}{3} R_{ikil} y^k y^l + \mathcal{O}(\lambda_k^{-3}|y|^3) = \mathcal{O}(\lambda_k^{-2}). \quad (1.11)$$

Las conocidas fórmulas locales para el gradiente y el Laplaciano de una función (a saber,  $\nabla_g f = \sum_{i,j=1}^d g^{ij} \partial_j f \partial_i$  y  $\Delta_g f = \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left( \sum_{j=1}^d g^{ij} \sqrt{|g|} \partial_j f \right) = \sum_{i,j=1}^d g^{ij} \partial_{ij}^2 f + \sum_{i,j=1}^d \partial_i g^{ij} \partial_j f + \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i (\log |g|) \partial_j f$ , para toda función  $f$  regular en  $\mathbb{M}$ ), nos permiten afirmar que, si la primera derivada de  $f$  es acotada, tenemos

$$\|\nabla_g f - \nabla f\|_\infty \leq C \cdot r_0 \text{ en } \mathcal{B}_{r_0}^g(x), \quad (1.12)$$

donde  $\nabla_g$  es el gradiente en la métrica  $g$  y  $\nabla$  es el gradiente usual de la métrica euclídea. La constante  $C$  dependiendo solo de la cota para las primeras derivadas de  $f$  en  $\mathcal{B}_{r_0}^g(x)$ . De igual forma, si  $f$  es una función definida en  $\mathbb{M}$  con primeras y segundas derivadas acotadas, tenemos

$$\|\Delta_g f - \Delta f\|_\infty \leq C \cdot r_0 \text{ en } \mathcal{B}_{r_0}^g(x), \quad (1.13)$$

de nuevo  $C$  dependiendo solo de las cotas para las primeras y segundas derivadas.

1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

Estamos en condiciones de definir la sucesión de funciones

$$\tilde{u}_k: \sqrt{\lambda_k} \cdot \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.14)$$

$$y \mapsto \tilde{u}_k(y) := u_k \left( \exp_{x_k} \left( \lambda_k^{-1} \theta(y) \right) \right). \quad (1.15)$$

Cada una de ellas es una autofunción en escala  $1/\lambda_k$  cerca de  $x_k$ .

Veremos que, salvo tomar una subsucesión, esta converge uniformemente en cada compacto a una solución  $\tilde{u}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$  de la ecuación  $\Delta \tilde{u} + \tilde{u} = 0$  que además cumple  $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 1$ . Por como la hemos obtenido, esta  $\tilde{u}$  se llama límite *blow-up* de  $\tilde{u}_k$

Comenzamos notando que

$$\nabla_{\tilde{g}} \tilde{u}_k(y) = \lambda_k^{-1} \nabla_g \tilde{u}_k(y) \text{ y} \quad (1.16)$$

$$\Delta_{\tilde{g}} \tilde{u}_k(y) = \lambda_k^{-2} \Delta_g \tilde{u}_k(y). \quad (1.17)$$

Por tanto, satisfacen la ecuación uniformemente elíptica

$$\Delta_{\tilde{g}} \tilde{u}_k + \tilde{u}_k = 0, \quad (1.18)$$

en coordenadas normales centradas en el punto  $x_k \in \mathbb{M}$ . Por las cuentas anteriormente hechas, sabemos que en  $\mathcal{B}_{\sqrt{\lambda_k}}^g(x_k)$  la métrica en coordenadas normales coincide con la métrica euclídea salvo por términos del orden de  $\lambda_k^{-1}$ . Tomemos un  $R < \sqrt{\lambda_k}$ ; entonces  $\|\tilde{u}_k\|_{\infty, B_R} \leq 1$  y la sucesión está uniformemente acotada en  $B_R$ . Por el teorema de Ascoli-Arzelà, sabemos que (salvo tomar una subsucesión)  $\tilde{u}_k$  converge uniformemente a una función regular  $\tilde{u}$  en  $B_R$ . Como  $\lambda_k \rightarrow \infty$ , podemos aplicar un argumento de diagonalización y encontrar una subsucesión  $\{u_k^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a  $\tilde{u}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$  uniformemente en cada bola  $B_R(0)$  y, por ello, en cada conjunto compacto. Observamos que

$$\|\nabla_{\tilde{g}} \tilde{u}_k\|_{\infty, B_R(0)} \leq \lambda_k^{-1} \|\nabla_g \tilde{u}_k\|_{\infty, \mathcal{B}_{R, \lambda_k^{-1}}^g(x_0)}, \quad (1.19)$$

y, por (1.12), el gradiente euclídeo de  $\tilde{u}_k$  también está uniformemente acotado en  $B_R(0)$ . Además, por ser  $\tilde{u}_k$  solución de una ecuación elíptica (a saber, (1.18)) se pueden encontrar cotas similares para todas sus derivadas. Estas cotas, obtenidas por argumentos de acotación para ecuaciones elípticas, dependen del valor de la métrica  $\tilde{g}$  pero la relación (1.13) nos proporciona una cota uniforme de todas las derivadas.

Repitiendo el argumento utilizado con  $\tilde{u}_k$  para sus derivadas, afirmamos que todas ellas tienen una parcial convergente a  $\tilde{u}$  uniformemente en compactos, es decir, la convergencia de  $\tilde{u}_k$  a  $\tilde{u}$  es en norma  $C^l$  sobre compactos, para todo  $l \in \mathbb{N}$ : para todo  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  subconjunto compacto,  $\|\nabla^l \tilde{u} - \nabla^l \tilde{u}_k\|_{L^\infty(K)} \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_k\|_{L^\infty(K)} < \epsilon$ . Como consecuencia de la convergencia uniforme en compactos afirmamos que  $\tilde{u}$  es una solución regular de la ecuación buscada:  $\Delta \tilde{u} + \tilde{u} = 0$  en todo  $\mathbb{R}^d$ . Por último, por la normalización que hemos hecho,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{u}_k(0)| = |\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(0)| = |\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x_k)| = 1$ , así que no se trata de la solución trivial, y  $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 1$ , como buscábamos.  $\square$

La desventaja de este teorema reside en que no indica qué soluciones de Helmholtz pueden aparecer como límites locales de autofunciones. Sin embargo, el siguiente resultado de análisis microlocal es, en cierto sentido, un recíproco de este. Afirma que el comportamiento

local de cualquier onda monocromática se puede reproducir por autofunciones aproximadas para cualquier nivel de energía suficientemente alto, que determina la escala adecuada.

## 1.2. Autofunciones aproximadas y la función espectral

En esta sección introducimos un resultado de aproximación entre autofunciones y ondas monocromáticas que mejora al anterior en la libertad que ganamos sobre la ecuación de Helmholtz: podemos aproximar cualquier solución prefijada de la ecuación en  $\mathbb{R}^d$ . El precio a pagar es la necesidad de utilizar autofunciones aproximadas (en inglés, *quasimodes* en relación con el término *mode* utilizado en física para denotar las autofunciones), esto es, una generalización de las autofunciones propiamente dichas.

Se pueden encontrar en la literatura muchas definiciones distintas que generalicen el concepto de autofunción. Una definición clásica, utilizada por Keller, Babich y Guillemin-Weinstein entre otros autores de renombre, es la de que una autofunción aproximada  $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$  de orden cero es una sucesión de funciones normalizadas en norma  $L^2$  cumpliendo

$$\|(\Delta - \mu_k^2)\psi_k\|_{L^2} = \mathcal{O}(1), \quad (1.20)$$

para una sucesión de valores propios aproximados  $\{\mu_k^2\}_{k=0}^{\infty}$ . En el trabajo de autores como Lazutkin, Arnold y Ralston, las autofunciones se construyen habitualmente como una integral oscilatoria, a saber,

$$\psi_\lambda(x) = \int_{\mathbb{M}} e^{\lambda S(x,\xi)} a(x,\xi) d\xi, \quad (1.21)$$

con cierta fase  $S$  y amplitud  $a$  elegidas para que alguna norma de  $(\Delta + \lambda^2)\psi_\lambda$  sea pequeña. Esta definición nos permite, intuitivamente, controlar cuánto distan las funciones de la sucesión de ser funciones propias.

Otros autores, como Verdier, definen las autofunciones aproximadas por ser, esencialmente, las soluciones asintóticas de la ecuación

$$(\Delta + \tau_k^2)u(x, \tau_k) = \mathcal{O}(\tau_k^{-N}), \quad (1.22)$$

para  $N \geq 0$  y  $\tau_k \rightarrow \infty$ . Las funciones  $u(x, \tau_k)$  no son del todo buenas aproximaciones de las funciones propias pero los valores  $\tau_k$  definen una buena aproximación asintótica de una familia de valores propios. Esta definición se puede generalizar a la de solución aproximada de un operador pseudodiferencial. A una familia de soluciones aproximadas  $\{u(h)\}_{0 < h < h_0}$  de  $P(h)u(h) = 0$ , donde  $P(h)$  es un operador diferencial, se le suele exigir que cumpla las cotas:

$$P(h)u(h) = \mathcal{O}(h) \text{ y} \quad (1.23)$$

$$u(h) = \mathcal{O}(1). \quad (1.24)$$

En esta sección trabajaremos con una clase particular de autofunciones satisfaciendo estas cotas: los cúmulos o agrupamientos espectrales (más conocidos por su nomenclatura en inglés, *spectral cluster*).

**Definición 1.2.** Diremos que la función  $u : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es un *spectral cluster* del Laplaciano si es combinación lineal de una cantidad finita de autofunciones  $u_k$  con frecuencias  $\lambda_k$  en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Es decir,  $u(x) = \sum_{k=0}^N u_k(x)$  para todo  $x \in \mathbb{M}$  donde cada  $u_k$  es una autofunción asociada al valor propio  $\lambda_k^2$  con  $\lambda_k \in I$ .

1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

Debido a la dificultad que encierra el conocimiento directo de las autofunciones de forma individual, es habitual enfocar este estudio a través de funciones núcleo, i.e., núcleos Schwartz de autofunciones. Más concretamente, en esta sección trabajaremos, como es costumbre, con la función espectral del Laplaciano, que podemos definir gracias al siguiente teorema de Schwartz.

**Definición 1.3.** Dada una variedad diferenciable  $\mathbb{M}$  definimos el espacio de distribuciones en  $\mathbb{M}$  como el dual continuo del espacio de funciones regulares definidas en ella con soporte compacto,  $\mathcal{D}'(\mathbb{M}) = (C_c^\infty(\mathbb{M}))'$  dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos. Si  $M$  es una variedad compacta, este espacio no es más que  $\mathcal{D}'(\mathbb{M}) = (C^\infty(\mathbb{M}))'$ .

**Teorema 1.2.** *Schwartz, 1952.*

Sean  $X$  e  $Y$  variedades regulares. Para cada aplicación continua y lineal  $k : C_c^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ , existe una única distribución  $K \in \mathcal{D}'(Y \times X)$  tal que

$$\langle ku, v \rangle = \langle K, u \otimes v \rangle. \quad (1.25)$$

A  $K$  la llamamos «el núcleo» de  $k$ . El recíproco también es cierto. Toda distribución  $K \in \mathcal{D}'(Y \times X)$  define una aplicación continua y lineal  $k : C_c^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  de la que es núcleo, en el sentido ya mencionado.

Prevenimos al lector de que notaremos indistintamente el Laplaciano  $\Delta_g$  y su extensión autoadjunta a todo  $L^2(\mathbb{M})$  (sabemos que existe por el clásico teorema de extensión de Friedrichs). Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo, consideramos el proyector espectral del operador,

$$E_I : L^2(\mathbb{M}) \rightarrow \bigoplus_{\mu \in I} \ker(\Delta_g - \mu^2), \quad (1.26)$$

es decir, la proyección sobre el subespacio generado por las funciones propias asociadas a autovalores  $\mu^2 \in I$ .

Por el teorema mencionado y por la regularidad de las funciones propias, podemos definir su núcleo Schwartz como la función de  $C^\infty(\mathbb{M} \times \mathbb{M})$  dada por

$$E_I(x, y) = \sum_{\lambda_j \in I} u_j(x)u_j(y). \quad (1.27)$$

Estamos especialmente interesados en el caso en que  $I = [0, \lambda^2]$  para algún valor  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Entonces, el núcleo de la proyección sobre el espacio de funciones propios de energía menor o igual a  $\lambda^2$  recibe el nombre de función espectral (habitualmente, *spectral function*) y es

$$E_\lambda(x, y) := E_{[0, \lambda^2]}(x, y) = \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} u_j(x)u_j(y). \quad (1.28)$$

Son numerosos los resultados sobre estimaciones del resto en aproximaciones asintóticas de la función espectral. El siguiente resultado, conocido como Ley de Weyl puntual o local, se debe a Hörmander [Hö68] y será de utilidad en la demostración del teorema clave de esta sección.

**Teorema 1.3.** *Hörmander, 1968.*

Sea  $P$  un operador diferencial elíptico, positivo, autoadjunto, de orden  $m$  y con coeficientes  $C^\infty$  en  $\mathbb{M}$ . Sea  $\omega$  una carta coordenada donde la medida de Lebesgue definida en cada fibra de  $T^*\mathbb{M}$  por  $dx$

coincide con la densidad en  $\mathbb{M}$ . Para cada  $x$  e  $y$  en un subconjunto compacto de  $\omega$  y lo suficientemente cercanos, tenemos uniformemente

$$\left| E_{[0,\lambda^2]}(x, y) - (2\pi)^{-d} \int_{p(y, \xi) < \lambda} e^{i\psi(x, y, \xi)} d\xi \right| \leq C(1 + |\lambda|)^{(d-1)/m} \quad (1.29)$$

donde  $\psi$  es una función homogénea en  $\xi \in \mathbb{R}^d$  de grado uno que cumple

$$p(x, \nabla_x \psi) = p(y, \xi), \quad \psi(x, y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle + O(|x - y|^2 |\xi|) \quad \text{cuando } x \rightarrow y, \quad (1.30)$$

$p$  es el símbolo principal del operador  $P$  y  $E_{[0,\lambda]}$  es el núcleo de la proyección espectral para el susodicho operador.

Con estas herramientas podemos finalmente enunciar el teorema clave de esta sección.

**Teorema 1.4.** Para cualquier solución de la ecuación de Helmholtz  $\Delta v + v = 0$  en un conjunto acotado  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  con complemento  $\mathbb{R}^d \setminus S$  conexo, cualquier  $p \in \mathbb{M}$  y valores  $\eta, \delta > 0$  y  $l \in \mathbb{N}$ , existe una combinación lineal de autofunciones  $u$  con frecuencias en el intervalo  $[\Lambda, (1 + \eta)\Lambda]$ , para un cierto valor  $\Lambda$  lo suficientemente grande, tal que

$$\left\| u \left( \exp_p \left( \frac{\cdot}{\Lambda} \right) \right) - v \right\|_{C^l(S)} < \delta. \quad (1.31)$$

### 1.3. Demostración del teorema 1.4

*Demostración.* Nos disponemos a demostrar el teorema clave de esta sección. Por su extensión, dividiremos la prueba en varios pasos y no la atacaremos de forma directa, sino que intercalaremos observaciones oportunas durante su desarrollo.

#### 1.3.1. Aplicación del teorema 1.3 y algunos cálculos

Buscamos aplicar el teorema 1.3. El caso particular que nos atañe es el de  $P = \Delta$ , operador de orden  $m = 2$ . Consideramos la función espectral  $E_\lambda$  y restringimos nuestro estudio al caso de  $x, y \in \mathbb{M}$  lo suficientemente cercanos para que la distancia riemanniana entre ellos  $\text{dist}_g(x, y)$  sea menor que el radio de inyectividad de  $\mathbb{M}$ , de forma que la inversa de la aplicación exponencial  $\exp_y^{-1}(x)$  esté bien definida. En este caso, escribimos:

$$E_\lambda(x, y) = E_{[0,\lambda^2]} = (2\pi)^{-d} \int_{|\xi|_{g_y} < \lambda} e^{ig_y(\xi, \exp_y^{-1}(x))} \frac{d\xi}{(\det g_y)^{1/2}} + R(x, y, \lambda); \quad (1.32)$$

donde estamos integrando sobre la fibra del cotangente  $T_y^*\mathbb{M}$  y el valor de la integral es independiente del sistema de coordenadas elegido porque la medida de integración utilizada  $d\xi / \sqrt{(\det g_y)}$  es el cociente de la forma simpléctica natural  $d\xi dy$  en  $T^*\mathbb{M}$  por la forma de volumen riemanniana  $\sqrt{(\det g_y)} dy$ . El resto  $R(x, y, \lambda)$  es una función suave en  $x$  e  $y$  que vamos a estimar.

Cabe mencionarse que la hipótesis sobre  $\text{dist}_g(x, y) = |\exp_y^{-1}(x)|$  no es una suposición demasiado restrictiva porque si  $\text{dist}_g(x, y) > \delta$ , entonces  $E_\lambda = \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$ . Esto se debe a las propiedades de las integrales oscilatorias (véase, por ejemplo, [Ste93]).

1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

**Definición 1.4.** Dadas funciones regulares  $\phi$  y  $\psi$  real valuadas, la integral

$$I(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\Lambda\phi(x)}\psi(x)dx \quad (1.33)$$

decimos que es una integral oscilatoria de primer tipo en múltiples variables.

En nuestro caso

$$\int_{|\xi|_{g_y} < \lambda} e^{ig_y(\xi, \exp_y^{-1}(x))} \frac{d\xi}{(\det g_y)^{1/2}} = \frac{\lambda^d}{(\det g_y)^{1/2}} \int_{|v|_{g_y} < 1} e^{ig_y(v, \exp_y^{-1}(x))} dv \approx \quad (1.34)$$

$$\approx \frac{\lambda^d}{(\det g_y)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ig_y(v, \exp_y^{-1}(x))} \Theta_\epsilon(v) dv = C\lambda^d I(\lambda), \quad (1.35)$$

donde  $\Theta_\epsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de soporte (*cut-off function*) que vale 1 en la bola unidad, 0 fuera de una bola algo mayor,  $1 + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  pequeño, y que es regular de clase infinito. Recordemos una de las propiedades más características de estas integrales:

**Teorema 1.5.** Principio básico de la fase no estacionaria

Si  $\psi$  es suave y de soporte compacto y  $\phi$  es suave y no tiene puntos críticos en el soporte de  $\psi$ , entonces se tiene

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = \mathcal{O}(\lambda^{-N}), \quad (1.36)$$

cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , para todo  $N \geq 0$ .

La demostración, que es sencilla, se puede encontrar en la mayoría de libros de referencia como, por ejemplo, [Ste93] y se basa en la igualdad

$$e^{i\lambda\phi} = \nabla \left( e^{i\lambda\phi} \right) \cdot \frac{\nabla\phi}{i\lambda|\nabla\phi|^2}, \quad (1.37)$$

y la aplicación del teorema de integración por partes. Otra forma de proceder sería descomponer la integral en una suma finita

$$\sum_k \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x_1, \dots, x_n)} \psi_k(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_d; \quad (1.38)$$

y aplicar el Principio básico en el caso unidimensional a cada una de ellas. Para justificar este, notemos por  $\mathcal{D}$  al operador diferencial

$$\mathcal{D}f(x) = (i\lambda\phi'(x))^{-1} \frac{df}{dx} \quad (1.39)$$

y por  $\mathcal{D}^t$  su operador transpuesto,

$$\mathcal{D}^t f(x) = -\frac{d}{dx} \left( \frac{f}{i\lambda\phi'(x)} \right). \quad (1.40)$$

Entonces, para todo  $N \geq 0$ ,  $\mathcal{D}^N(e^{i\lambda\phi}) = e^{i\lambda\phi}$ , e integrando por partes y usando que  $\phi'(x) \neq 0$

en todo el soporte de  $\psi$ , notamos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi} \psi dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^N \left( e^{i\lambda\phi} \right) \psi dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi} (\mathcal{D}^t)^N \psi dx. \quad (1.41)$$

Entonces, claramente,  $|I(\lambda)| \leq A_N \lambda^{-N}$  para todo  $N \in \mathbb{N}$  y tenemos la cota buscada.

Volviendo al caso de nuestro interés, notemos que si  $\text{dist}_g(x, y) > \delta$ , entonces  $g_y \left( \cdot, \exp_y^{-1}(x) \right)$  no tiene puntos críticos y estamos en condiciones de aplicar el Principio básico de la fase no estacionaria. Afirmamos pues que  $I(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-N})$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  y para todo  $N \geq 0$ , es decir,  $I(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$  y, por tanto,

$$C\lambda^d I(\lambda) = \frac{\lambda^d}{(\det g_y)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda g_y(v, \exp_y^{-1}(x))} \Theta_\varepsilon(v) dv = \mathcal{O}(\lambda^{-\infty}), \quad (1.42)$$

cuando  $\text{dist}_g(x, y) > \delta$ . Así, este caso no suscita gran interés y podemos suponer sin gran pérdida que  $d(x, y)$  es tan pequeña como necesitamos.

Por otro lado, las propiedades de la métrica en coordenadas geodésicas vistas en la sección anterior nos permiten afirmar que  $\psi(x, y, \xi) = g_y \left( \xi, \exp_y^{-1}(x) \right)$  satisface las hipótesis del teorema 1.4. Como el símbolo principal del Laplaciano y la densidad en  $\mathbb{M}$  son conocidos, concluimos que

$$\left| E_\lambda(x, y) - (2\pi)^{-d} \int_{|\xi|_{g_y} < \lambda} e^{i g_y(\xi, \exp_y^{-1}(x))} \frac{d\xi}{(\det g_y)^{1/2}} \right| \leq C(1 + \lambda^2)^{(d-1)/2}, \quad (1.43)$$

luego  $R(x, y, \xi) = \mathcal{O}(\lambda^{d-1})$  y

$$E_\lambda(x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{|\xi|_{g_y} < \lambda} e^{i g_y(\xi, \exp_y^{-1}(x))} \frac{d\xi}{(\det g_y)^{1/2}} + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}). \quad (1.44)$$

A continuación detallamos algunos cálculos que, si bien no forman parte de la demostración, servirán para motivar los pasos venideros al dejar patente el comportamiento de la integral a estudiar.

Si  $I(\lambda) := \left[ (1-\eta)^2 \lambda^2, (1+\eta)^2 \lambda^2 \right]$  para algún  $\eta > 0$  pequeño pero fijo, entonces  $E_{I(\lambda)} = E_{[0, (1+\eta)^2 \lambda^2]} - E_{[0, (1-\eta)^2 \lambda^2]} = E_{(1+\eta)\lambda} - E_{(1-\eta)\lambda}$ . Luego

$$E_{I(\lambda)}(x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{1-\eta < \frac{|\xi|_{g_y}}{\lambda} < 1+\eta} e^{i g_y(\xi, \exp_y^{-1}(x))} \frac{d\xi}{(\det g_y)^{1/2}} + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}). \quad (1.45)$$

Sea ahora  $x = \exp_y \left( \frac{X}{\lambda} \right)$ , de forma que  $g_y = Id + \mathcal{O} \left( \frac{X}{\lambda} \right)$ , es decir, tomamos coordenadas normales geodésicas. Con  $\tilde{\xi} := \frac{\xi}{\lambda}$ , y usando que  $|X| = \text{dist}_g(x, y) \cdot \lambda$ ,

$$E_{I(\lambda)}(x, y) = (2\pi)^{-d} \lambda^d \int_{1-\eta < |\tilde{\xi}| < 1+\eta} e^{i \tilde{\xi} \cdot X} d\tilde{\xi} + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}). \quad (1.46)$$

1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

Calculemos de forma más explícita esta integral.

$$\int_{1-\eta < |\tilde{\zeta}| < 1+\eta} e^{i\tilde{\zeta} \cdot X} d\tilde{\zeta} = \int_{1-\eta}^{1+\eta} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{irX \cdot \omega} d\sigma(\omega) r^{d-1} dr. \quad (1.47)$$

Tomaremos coordenadas polares de forma que el eje polar sea el de la dirección de  $\frac{X}{|X|}$ :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{iX \cdot \omega} d\sigma(\omega) = \int_{\Omega} \int_0^{\pi} e^{i|X| \cos(\theta)} \sin^{d-2}(\theta) d\theta d^{d-2}\Omega, \quad (1.48)$$

donde  $\Omega$  recoge el resto de direcciones linealmente independientes a  $X$ . A continuación, calculamos una de las integrales y hacemos el cambio de variable  $\cos(\theta) = u$  en la otra. Obtenemos la expresión que sigue

$$\frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} e^{i|X| \cos(\theta)} \sin^{d-2}(\theta) d\theta = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{i|X|u} (1-u^2)^{\frac{d-3}{2}} du \quad (1.49)$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left[ \int_0^1 e^{i|X|u} (1-u^2)^{\frac{d-3}{2}} du + \int_{-1}^0 e^{i|X|u} (1-u^2)^{\frac{d-3}{2}} du \right] \quad (1.50)$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left[ \int_0^1 e^{i|X|u} (1-u^2)^{\frac{d-3}{2}} du + \int_0^1 e^{-i|X|u} (1-u^2)^{\frac{d-3}{2}} du \right]. \quad (1.51)$$

Aplicando la fórmula de Euler y la paridad de las funciones trigonométricas llegamos a

$$\frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{d-3}{2}} \cos(|X|u) du = \frac{2^{d/2} \pi^{d/2}}{|X|^{d/2-1}} J_{d/2-1}(|X|), \quad (1.52)$$

donde  $J_{\alpha}$  es la función de Bessel y hemos utilizado una de sus representaciones integrales que se puede encontrar en el apéndice B. Regresando a la integral que estábamos estudiando (1.47) tenemos que

$$\int_{1-\eta < |\tilde{\zeta}| < 1+\eta} e^{i\tilde{\zeta} \cdot X} d\tilde{\zeta} = \int_{1-\eta}^{1+\eta} \frac{J_{d/2-1}(r|X|)}{(r|X|)^{d/2-1}} r^{d-1} (2\pi)^{d/2} dr. \quad (1.53)$$

Volviendo ahora a (1.46),

$$E_{I(\lambda)}(x, y) = (2\pi)^{-d/2} \lambda^d \int_{1-\eta}^{1+\eta} J_{d/2-1}(r|X|) |X|^{1-d/2} r^{d/2} dr + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}). \quad (1.54)$$

Ahora usamos otra identidad del apéndice B, que afirma que

$$\int_{1-\eta}^{1+\eta} J_{d/2-1}(rz) r^{d/2} dr = \frac{(1+\eta)^{d/2} J_{d/2}((1+\eta)z) - (1-\eta)^{d/2} J_{d/2}((1+\eta)z)}{z}, \quad (1.55)$$

y conseguimos una fórmula explícita

$$E_{I(\lambda)} = (2\pi)^{-d/2} \lambda^d \frac{(1+\eta)^{d/2} J_{d/2}((1+\eta)|X|) - (1-\eta)^{d/2} J_{d/2}((1-\eta)|X|)}{|X|^{d/2}} + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}). \quad (1.56)$$

Utilizando la misma fórmula del apéndice B y el teorema del valor medio, conseguimos una aproximación para el término líder de  $E_I$ . Explícitamente, usamos que, para  $\eta \ll 1$ , i.e, muy pequeño y positivo,

$$((1+\eta)|X|)^{d/2} J_{d/2}((1+\eta)|X|) - ((1-\eta)|X|)^{d/2} J_{d/2}((1-\eta)|X|) = \quad (1.57)$$

$$2\eta |X| \cdot \left. \frac{d \left( z^{d/2} J_{d/2}(z) \right)}{dz} \right|_{\zeta \in ((1-\eta)|X|, (1+\eta)|X|)} = 2\eta |X|^{d/2+1} J_{d/2-1}(|X|) + \mathcal{O}(\eta). \quad (1.58)$$

Finalmente,

$$E_{\lambda(I)}(x, y) = 2\eta \lambda^d (2\pi)^{-d/2} \left[ \frac{J_{d/2-1}(|X|)}{|X|^{d/2-1}} + \mathcal{O}(\eta) \right] + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}). \quad (1.59)$$

Esta aproximación nos orienta hacia las soluciones que debemos elegir como aproximación: aquellas que podamos extender en serie con sumandos de esta forma. El siguiente paso será ver que eso es posible para las ondas monocromáticas.

### 1.3.2. G.A.T.: Teoría de aproximación global

Para continuar la demostración nos apoyaremos fuertemente en la teoría de aproximación global de ecuaciones diferenciales parciales. *Grosso modo*, un teorema de aproximación global para un operador diferencial  $P$  afirma que si una función  $v$  satisface la ecuación  $Pv = 0$  en un conjunto  $\Omega$ , bajo algunas consideraciones técnicas no demasiado restrictivas, podemos encontrar una solución global  $u$  de la ecuación  $Pu = 0$  en  $\mathbb{R}^d$  que aproxima a  $v$ ; en el sentido de que  $u - v$  se puede hacer arbitrariamente pequeño en alguna norma en  $\Omega$ . Decimos que son teorema de tipo Runge porque generalizan el resultado clásico de Runge (1884) para la aproximación de funciones holomorfas por polinomios en conjuntos compactos del plano complejo. En la década de 1950, Lax y Malgrange probaron que las soluciones de ciertas E.D.P.s elípticas y homogéneas en subconjuntos acotados con complemento conexo son el límite de soluciones de la misma ecuación en todo el espacio. Es lo que se conoce como resultados de aproximación global (de ahora en adelante, G.A.T., por sus siglas en inglés).

En los años 60s, Browder mejoró significativamente estos resultados y, posteriormente, se han conseguido importantes avances al incluir decaimiento en infinito. La teoría de aproximación global con decaimiento (en lo que sigue, G.A.D.) ha permitido, entre otras mejoras, la construcción de soluciones físicamente significativas y la aplicación de la misma a ecuaciones no lineales. En el capítulo 5 retomaremos este tema para proporcionar un resultado original, pero en esta ocasión haremos uso de teoremas de G.A.D. recientemente probados para continuar con nuestra demostración. En particular, vamos a seguir las técnicas desarrolladas en [nGF18, Teorema 1.6.] por M. A. Ferrero y en [EPS15b, Proposición 8.2.] por A. Enciso y D. Peralta-Salas para demostrar el siguiente lema:

1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

**Lema 1.1.** Podemos aproximar toda solución local de la ecuación de Helmholtz  $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta v + v = 0$  en un conjunto compacto  $S$  con complemento  $\mathbb{R}^d \setminus S$  conexo, por una serie finita como

$$V(x) = \sum_{l=0}^L c_l \cdot Y_l \left( \frac{x}{|x|} \right) \frac{J_{l+\frac{d}{2}-1}(|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}-1}}, \quad (1.60)$$

definida en todo  $\mathbb{R}^d$ . En (1.60),  $L$  es entero,  $c_l$  son coeficientes reales e  $Y_l$  y  $J_{l+\frac{d}{2}-1}$  son esféricos armónicos y funciones de Bessel (se pueden encontrar en el apéndice B), respectivamente.

La aproximación se consigue en norma  $C^k$  en  $S$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  fijo:

$$\|V - v\|_{C^k(S)} < \epsilon, \quad (1.61)$$

para cualquier constante positiva  $\epsilon$ .

*Demostración.* Como un paso intermedio antes de demostrar el resultado de aproximación global, establecemos la siguiente proposición que permite simular nuestra solución por una definida en una bola euclídea conteniendo al conjunto  $S$ . Su demostración se omitirá pues se puede encontrar en [EPS15b] y demostraremos una versión similar en el capítulo 5 en el contexto de un nuevo teorema de aproximación global con decaimiento en el espacio hiperbólico.

**Proposición 1.1.** Sea  $v$  una solución de la ecuación  $\Delta v + v = 0$  en un subconjunto compacto  $S$  de  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que su complemento  $\mathbb{R}^d \setminus S$  es conexo y que  $S$  está contenido en la bola  $B_R$ . Entonces para todo  $\delta > 0$  y todo entero positivo  $k$  existe una función  $w$  cumpliendo la ecuación  $\Delta w + w = 0$  en  $B_R$  que aproxima la función  $v$  en  $S$  como

$$\|v - w\|_{C^k(S)} < \delta. \quad (1.62)$$

Consideramos la bola euclídea de centro el origen y radio  $R$ ,  $B_R \subseteq \mathbb{R}^d$  donde está definida la solución local de Helmholtz  $w$  dada por la proposición anterior que satisface la cota  $\|v - w\|_{C^{k+2}(S)} < \delta/2$ . Tomaremos coordenadas esféricas (conocidas en ocasiones por «coordenadas hiperesféricas», al ser en dimensión  $d$ ), es decir:

$$x_1 = r \cos(\phi_1) \quad (1.63)$$

$$x_2 = r \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \quad (1.64)$$

$$x_3 = r \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos(\phi_3) \quad (1.65)$$

$$\vdots \quad (1.66)$$

$$x_{n-1} = r \sin(\phi_1) \dots \sin(\phi_{d-2}) \cos(\phi_{d-1}) \quad (1.67)$$

$$x_n = r \sin(\phi_1) \dots \sin(\phi_{d-2}) \sin(\phi_{d-1}), \quad (1.68)$$

donde  $r \in [0, \infty)$ ,  $\phi_1, \dots, \phi_{d-2} \in [0, \pi]$  y  $\phi_{d-1} \in [0, 2\pi)$ . Notaremos por  $\{Y_l(\omega)\}_{l=0}^{\infty}$  para  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  a los esféricos armónicos (no confundir con funciones de Bessel de segunda especie). Sabemos que los esféricos armónicos forman una base de  $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ ; por ello podemos expandir  $w$  en esta base ortonormal de esféricos armónicos en cada esfera de dimensión

$d - 1$  que forma  $B_R$ :

$$w(x) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(|x|) Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(r) Y_l(\omega), \quad (1.69)$$

donde  $r := |x|$  y  $\omega := \frac{x}{|x|}$ . Además ya sabemos que  $\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_l = -\mu_l Y_l$  con  $\mu_l := l(l + d - 2)$  (es decir, es un valor propio del Laplaciano). La convergencia de esta expansión es en norma  $C^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  y sus coeficientes se pueden calcular como

$$w_l(r) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} w(r\omega) Y_l(\omega) d\omega. \quad (1.70)$$

Una propiedad que será más importante para nosotros de los coeficientes es que satisfacen la ecuación de Bessel. Primero notamos que, gracias a la convergencia fuerte en norma,

$$\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} w(x) = \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} \left( \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(\omega) w_l(r) \right) = \sum_{l=0}^{\infty} (\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_l(\omega)) w_l(r) \quad (1.71)$$

$$= - \sum_{l=0}^{\infty} l(l + d - 2) Y_l(\omega) w_l(r). \quad (1.72)$$

Por tanto,

$$\Delta w(x) = \left( r^{1-d} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + r^{-2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} \right) w(r\omega) \quad (1.73)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(\omega) \cdot \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_l(r) + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_l(r) - \frac{l(l+d-1)}{r^2} w_l(r) \right]. \quad (1.74)$$

Como  $w$  era una solución de Helmholtz,  $\Delta w(x) + w(x) = 0$  en  $B_R$ , podemos afirmar que

$$\sum_{l=0}^{\infty} Y_l(\omega) \cdot \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_l(r) + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_l(r) - \frac{l(l+d-1)}{r^2} w_l(r) + w_l(r) \right] = 0, \quad (1.75)$$

de nuevo, en  $B_R$ . La independencia que la base de esféricos armónicos nos provee de una ecuación diferencial ordinaria para cada  $l$ :

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_l(r) + r(d-1) \frac{\partial}{\partial r} w_l(r) + \left( r^2 - l(l+d-1) \right) w_l(r) = 0. \quad (1.76)$$

Tras el cambio de variable  $v_l(r) = w_l(r)r^{d/2-1}$ , se convierte en la ecuación de Bessel:

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_l(r) + r \frac{\partial}{\partial r} v_l(r) + \left( r^2 - \left( l + \frac{d}{2} - 1 \right)^2 \right) v_l(r) = 0. \quad (1.77)$$

Las soluciones de esta ecuación son bien conocidas: se denotan funciones de Bessel de orden  $\alpha$  y las escribimos  $J_\alpha$ . En el apéndice B hemos reunido algunas de sus propiedades.

Estamos en condiciones de afirmar que para todo  $l \in \{0, 1, \dots\}$  se tiene, para alguna

### 1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

constante  $c_l \in \mathbb{R}$ ,  $w_l(r) = c_l \cdot J_{l+\frac{d}{2}-1}(r) \cdot r^{1-d/2}$ . Por tanto, la serie es de la forma:

$$w(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot Y_l \left( \frac{x}{|x|} \right) \frac{J_{l+\frac{d}{2}-1}(|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}-1}}. \quad (1.78)$$

Recordemos que esta suma converge en norma  $C^k$ . Sin más que tomar una cantidad finita  $L > 0$  de términos lo suficientemente grande, tenemos

$$\|w - V\|_{C^k(B_R)} < \delta, \quad (1.79)$$

donde  $\delta > 0$  es una constante positiva por fijar y

$$V(x) = \sum_{l=0}^L c_l \cdot Y_l \left( \frac{x}{|x|} \right) \frac{J_{l+\frac{d}{2}-1}(|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}-1}}, \quad (1.80)$$

para toda  $x \in \mathbb{R}^d$ . Tomando  $\delta = \epsilon/2$  concluimos el resultado:

$$\|v - V\|_{C^k(S)} \leq \|v - w\|_{C^k(S)} + \|w - V\|_{C^k(B_R)} < \epsilon. \quad (1.81)$$

□

### 1.3.3. Construimos la autofunción aproximada

Remitimos al lector al artículo de F. O. Goncharov [Gon17]. En él, se considera un tipo de integrales de armónicos esféricos (similares a operadores integrales de Fourier) y se obtienen fórmulas analíticas para estas integrales. Concretamente, para el valor

$$I_k^m(p, \rho) := \int_{S^d} Y_k^m(\theta) e^{i\rho(p, \theta)} d\theta, \quad p \in S^d, \rho \geq 0, d \geq 1, \quad (1.82)$$

obtiene la identidad

$$I_k^m(p, \rho) = c(m, k, d) Y_k^m(p) \rho^{(1-d)/2} J_{k+\frac{d-1}{2}}(\rho), \quad (1.83)$$

donde  $J_r(\cdot)$  es la función de Bessel de primer tipo y  $c(m, k, d)$  es una constante. Con este resultado en mente, podemos reescribir la aproximación construida como

$$V(x) = \sum_{l=0}^L c_l \cdot Y_l \left( \frac{x}{|x|} \right) \frac{J_{l+\frac{d}{2}-1}(|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}-1}} = \sum_{l=0}^L c_l \cdot \int_{S^{d-1}} Y_l(\omega) e^{ix \cdot \omega} d\sigma(\omega). \quad (1.84)$$

Si definimos la función  $\varphi \in C^\infty(S^{d-1})$  como  $\varphi(\omega) := \sum_{l=0}^L c_l \cdot Y_l(\omega)$ , podemos ver

$$V(x) = \int_{S^{d-1}} \varphi(\omega) e^{ix \cdot \omega} d\sigma(\omega). \quad (1.85)$$

Tomemos, a continuación, una cierta función  $C^\infty$

$$F(\xi) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < |\xi| < 2, \\ 0 & \text{si } |\xi| < \frac{1}{4} \text{ o } |\xi| > 4. \end{cases} \quad (1.86)$$

Notaremos como es costumbre a su transformada de Fourier inversa:

$$\hat{F}(Y) := \int_{\mathbb{R}^d} F(\xi) e^{iY \cdot \xi}, \text{ para todo } Y \in \mathbb{R}^d. \quad (1.87)$$

Fijamos un punto  $p \in \mathbb{M}$ , un intervalo  $I = [\Lambda^2, (1 + \eta)^2 \Lambda^2]$  para algún  $\Lambda$  suficientemente grande y definimos una función *cut-off*  $\chi$  en  $\mathbb{R}^d$  cumpliendo:

- $\chi$  toma el valor cero en  $\mathbb{R}^d \setminus B_{\Lambda \cdot i_p}(0)$ ,
- $\chi$  toma el valor uno en  $B_{\Lambda \cdot i_p/2}(0)$ ,
- $\chi$  está bien definida y es  $C^\infty$  en todo  $\mathbb{R}^d$ .

Entonces, podemos definir:

$$f: \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.88)$$

$$y \mapsto \begin{cases} \hat{F}\left(\exp_p^{-1}(y) \cdot \Lambda\right) \cdot \chi\left(\exp_p^{-1}(y) \cdot \Lambda\right) & \text{si } y \in \mathcal{B}_{i_p}^g(p) \\ 0 & \text{si } y \in \mathbb{M} \setminus \mathcal{B}_{i_p}^g(p). \end{cases} \quad (1.89)$$

Por como hemos tomado  $\chi$ , esta función es suave y está bien definida. Esto nos permite, a su vez, definir la función:

$$\tilde{u}: \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.90)$$

$$x \mapsto \tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{M}} E_I(x, y) f(y) dV(y), \quad (1.91)$$

Observemos que se trata de un *spectral cluster*. Para todo  $x \in \mathbb{M}$ ,

$$\tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{M}} E_I(x, y) f(y) dV(y) = \int_{\mathbb{M}} \sum_{\Lambda^2 \leq \lambda_j^2 \leq \Lambda^2(1+\eta)^2} u_j(x) u_j(y) f(y) dV(y) \quad (1.92)$$

$$= \sum_{\Lambda^2 \leq \lambda_j^2 \leq \Lambda^2(1+\eta)^2} u_j(x) \cdot \left( \int_{\mathbb{M}} u_j(y) f(y) dV(y) \right), \quad (1.93)$$

es claramente una combinación lineal de autofunciones con frecuencias en  $[\Lambda, \Lambda(1 + \eta)]$ . Además, tiene una cantidad finita de sumandos pues sabemos que los valores propios del Laplaciano solo se acumulan hacia infinito (luego la cantidad de ellos en un compacto ha de ser finita).

Notemos que la función

$$G: \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad (1.94)$$

$$y \mapsto \exp_p^{-1}(y) \cdot \Lambda \cdot \chi\left(\exp_p^{-1}(y) \cdot \Lambda\right), \quad (1.95)$$

### 1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

está bien definida en  $\mathbb{M}$ , es suave y coincide con la identidad en un entorno de  $p$ . Por tanto, podemos tomar coordenadas geodésicas normales cerca de  $p$  y escribir, para toda  $X \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\tilde{u} \left( \exp_p \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \right) = \int_{\mathbb{M}} E_I \left( \exp_p \left( \frac{X}{\Lambda} \right), y \right) f(y) dV(y) \quad (1.96)$$

$$= \Lambda^d \int_{\mathbb{R}^d} E_I \left( \exp_p \left( \frac{X}{\Lambda} \right), \exp_p \left( \frac{Y}{\Lambda} \right) \right) \hat{F}(Y) \chi(Y) dY. \quad (1.97)$$

Aplicando ahora el estudio realizado para la función espectral,

$$\tilde{u} \left( \exp_p \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \right) = (2\pi)^{-d} \Lambda^d \int_{1-\eta < |\tilde{\xi}| < 1+\eta} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\tilde{\xi} \cdot (X-Y)} \hat{F}(Y) \chi(Y) dY d\tilde{\xi} + \mathcal{O}(\Lambda^{d-1}) \quad (1.98)$$

$$= (2\pi)^{-d} \Lambda^d \int_{1-\eta < |\tilde{\xi}| < 1+\eta} e^{i\tilde{\xi} \cdot X} F(\tilde{\xi}) * \chi(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} + \mathcal{O}(\Lambda^{d-1}) \quad (1.99)$$

$$= (2\pi)^{-d} \Lambda^d 2\eta \left[ \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\tilde{\xi} \cdot X} F(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}) + \mathcal{O}(\eta) \right] + \mathcal{O}(\Lambda^{d-1}) \quad (1.100)$$

$$= (2\pi)^{-d} \Lambda^d 2\eta \left[ \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\tilde{\xi} \cdot X} \varphi(\tilde{\xi}) d\sigma(\tilde{\xi}) + \mathcal{O}(\eta) \right] + \mathcal{O}(\Lambda^{d-1}). \quad (1.101)$$

Finalmente, podemos definir la función

$$u: \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.102)$$

$$x \mapsto u(x) := (2\pi)^d \Lambda^{-d} (2\eta)^{-1} \tilde{u}(x). \quad (1.103)$$

Es claro, entonces, que

$$\left\| u \left( \exp_p \left( \frac{\cdot}{\Lambda} \right) \right) - V \right\|_{C^0(B)} = \sup_{X \in B} \left| u \left( \exp_p \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \right) - V(X) \right| = \mathcal{O}(\eta) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}\eta^{-1}) < \epsilon, \quad (1.104)$$

para algún valor  $\Lambda$  suficientemente grande. De igual forma, por la regularidad de  $\tilde{u}$  y  $v$  y el teorema de convergencia dominada,

$$\left\| u \left( \exp_p \left( \frac{\cdot}{\Lambda} \right) \right) - V \right\|_{C^l(B)} = \sup_{0 \leq k \leq l} \sup_{X \in B} \left| \nabla_k u \left( \exp_p \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \right) - \nabla_k V(X) \right| = \mathcal{O}(\eta) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}\eta^{-1}) < \epsilon, \quad (1.105)$$

para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Tomaremos  $\epsilon = \delta/2$  y aplicaremos el lema 1.1 para terminar la prueba:

$$\left\| u \left( \exp_p \left( \frac{\cdot}{\Lambda} \right) \right) - v \right\|_{C^l(S)} \leq \left\| u \left( \exp_p \left( \frac{\cdot}{\Lambda} \right) \right) - V \right\|_{C^l(B)} + \|V - v\|_{C^l(S)} < \delta, \quad (1.106)$$

para todo  $l \in \mathbb{N}$  y para cierto  $\Lambda \gg 1$  suficientemente grande.  $\square$

## 1.4. Algunos comentarios a posteriori

### Observación 1.2. Un cluster menos restrictivo

El argumento se puede repetir de forma totalmente análoga si tomamos  $I = (\Lambda, \Lambda + \Lambda^\delta]$  para cualquier  $\delta \in (0, 1)$  y obtener un resultado similar. De hecho, si exigimos a  $p \in \mathbb{M}$

que cumpla alguna propiedad extra, sirve incluso si  $I = (\Lambda, \Lambda + 1]$ . Esto se debe a las estimaciones para  $E_{(\Lambda, \Lambda + 1]}$  probadas por Y. Canzani y B. Haning en 2015 [CH15].

*Definición 1.5.* Un punto  $p \in \mathbb{M}$  se dice que no es un punto auto-focal (mejor conocido como *non-self-focal*) si el conjunto de covectores unitarios dado por

$$\mathcal{L}_p = \left\{ \xi \in S_p^* \mathbb{M} \mid \exp_p(t\xi) = p \text{ para algún } t > 0 \right\} \quad (1.107)$$

tiene medida nula con respecto a la medida de superficie inducida por  $g$  en  $S_p^* \mathbb{M}$ .

El siguiente teorema de Y. Canzani y B. Hanin supone una mejora con respecto a la estimación de Hörmander 1.4 ya vista.

*Teorema 1.6.* Sea  $(\mathbb{M}, g)$  una variedad riemanniana, compacta, diferenciable de dimensión  $d \geq 2$  sin borde. Supongamos que  $x_0 \in \mathbb{M}$  es un punto no auto-focal y sea  $r_\lambda$  una función no negativa con límite  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} r_\lambda = 0$ . Entonces

$$\sup_{x, y \in \mathcal{B}_{r_\lambda}^g(x_0)} |R(x, y, \lambda)| = o(\lambda^{d-1}), \quad (1.108)$$

cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . El ratio de convergencia dependerá de  $x_0$  y  $r_\lambda$ .

Esta estimación fue demostrada con anterioridad por Safarov [Saf89] y Sogge y Zelditch [SZ02] en el caso en que  $r_\lambda = 0$ , es decir,  $x = y$  un punto *non-self-focal*. Igualmente, Safarov [Saf89] obtuvo esta cota en el caso en que  $(x, y)$  pertenecen a un subconjunto compacto de  $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$  que no interseca a la diagonal. El teorema enunciado cierra el espacio entre ambos resultados permitiendo todos los escenarios posibles.

Considerando  $E_{(\lambda, \lambda + 1]}(x, y) = \sum_{\lambda^2 < \lambda_j^2 \leq (\lambda + 1)^2} u_j(x) u_j(y)$ , y aplicando esta nueva estimación a (1.101) podemos obtener como un corolario inmediato el siguiente teorema:

*Teorema 1.7.* Sea  $(\mathbb{M}, g)$  una variedad riemanniana, compacta y diferenciable de dimensión  $d \geq 2$  sin frontera. Sea  $p \in \mathbb{M}$  un punto no auto-focal. Considerando cualquier función no negativa  $r_\lambda$  y tal que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} r_\lambda = 0$ , obtenemos que

$$\sup_{x, y \in \mathcal{B}_{r_\lambda}^g(x_0)} \left| E_{(\lambda, \lambda + 1]}(x, y) - \frac{\lambda^{d-1}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{J_{(d-2)/2}(\lambda \operatorname{dist}_g(x, y))}{(\lambda \operatorname{dist}_g(x, y))^{(d-2)/2}} \right| = o(\lambda^{d-1}). \quad (1.109)$$

Por último, cabe comentar el hecho de que aún podemos mejorar este resultado un poco sin cambiar la prueba: sigue siendo cierto para  $E_{(\lambda, \lambda + \delta]}$  con  $\delta > 0$  cualquier valor positivo. La diferencia es que el término que contiene la función de Bessel aparece multiplicado por  $\delta$  y que el ratio de convergencia depende también de este valor.

**Observación 1.3. Ley de Weyl**

Como es habitual, nos referimos a la dimensión de cada espacio propio  $V_k$  (esto es, el espacio vectorial asociado a cada valor  $\lambda_k^2$ , expandido por los  $u_k$  correspondientes) como la «multiplicidad de  $\lambda_k$ ». Denotaremos por  $N(\lambda)$  al número de frecuencias  $\lambda_j$  satisfaciendo  $\lambda_j \leq \lambda$ , contadas con multiplicidades; es lo que se conoce como *spectral counting function* o función espectral de contar.

$$N(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j \leq \lambda\}. \quad (1.110)$$

El siguiente resultado se debe principalmente al matemático cuyo nombre lleva [Wey12], aunque otras versiones posteriores de atribuyen a Polya, Levitan, Hörmander, etc.

1. Autofunciones de alta energía y soluciones de Helmholtz

**Teorema 1.8. Ley de Weyl**

En una variedad  $d$  dimensional cerrada  $\mathbb{M}$  se cumple

$$N(\lambda) = \omega_d \text{Vol}(\mathbb{M}, g) \frac{\lambda^d}{(2\pi)^d} + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}) \text{ cuando } \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.111)$$

donde  $\omega_d = \pi^{d/2} / \Gamma(\frac{d}{2} + 1)$  es el volumen euclídeo de la bola unidad en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  es la función Gamma (remitimos al lector al apéndice B) y  $\text{Vol}(\mathbb{M}, g)$  es el volumen de la variedad  $\mathbb{M}$  con respecto a  $g$ , finito por ser cerrada.

Una consecuencia inmediata de este resultado es la siguiente estimación:

$$\#\{\lambda_j \mid \Lambda < \lambda_j < (1 + \eta)\Lambda\} = \mathcal{O}(\Lambda^d). \quad (1.112)$$

Para valores grandes de  $\Lambda^2 \gg 1$  la cantidad de autovalores en el intervalo  $(\Lambda^2, (1 + \eta)^2 \Lambda^2)$  es muy grande y tendremos una cantidad suficiente de autofunciones aproximadas. Esta propiedad será de gran importancia en los siguientes capítulos para aplicar la técnica de localización inversa.

**Observación 1.4. Un resultado cercano para funciones aleatorias**

F. Nazarov y M. Sodin, cuya motivación original fue entender los conjuntos nodales de esféricos armónicos aleatorios de orden alto [NS09], han desarrollado poderosas técnicas para obtener leyes asintóticas sobre el comportamiento de funciones gaussianas regulares de varias variables. Su teoría se ha utilizado para conocer la distribución de ceros de, principalmente, la restricción a grandes bolas de funciones gaussianas en el espacio Euclideo con un operador núcleo de covarianza invariante por traslaciones y agrupaciones gaussianas de polinomios de grado alto en la esfera y el toro con núcleos asintóticamente invariantes por traslaciones [NS16].

Siguiendo su teoría, introducimos aleatoriedad en nuestro problema y consideramos una combinación aleatoria de autofunciones con energía en  $[\Lambda, (1 + \eta)\Lambda]$  como sigue.

**Definición 1.6.** Sea  $\mathbb{M}$  una variedad y  $\mathcal{B}(\mathbb{M})$  el  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por todos los abiertos de  $\mathbb{M}$ ; sea  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{P})$  un espacio de probabilidad. Una función  $F : \mathbb{M} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función gaussiana continua si

- para cada  $x \in \mathbb{M}$ , la aplicación  $\omega \mapsto f(x, \omega)$  es medible como aplicación de  $(\Omega, \mathcal{G})$  a  $(\mathbb{M}, \mathcal{B}(\mathbb{M}))$ ;
- para cada conjunto finito de puntos  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{M}$  y para cada  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ , la suma  $\sum_{j=1}^m c_j f(x_j, \omega)$  es una variable aleatoria gaussiana (posiblemente degenerada);
- para casi todo  $\omega \in \Omega$ , la función  $x \mapsto f(x, \omega)$  es continua en  $\mathbb{M}$ .

**Definición 1.7.** Una agrupación paramétrica gaussiana  $(f_L)$  en una  $d$ -variedad  $\mathbb{M}$  cerrada es cualquier familia  $(f_L)$  de funciones gaussianas continuas en  $\mathbb{M}$  indexadas por un conjunto numerable de números  $L \geq 1$  que se acumula solo en  $+\infty$ .

Consideramos  $\mathcal{H}_L$  una sucesión de espacios de Hilbert reales y finito dimensionales de funciones continuas en  $\mathbb{M}$  indexados por un parámetro  $L \geq 1$  tal que  $\lim_{L \rightarrow \infty} \dim \mathcal{H}_L = \infty$  y sea  $\{e_k\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}_L$ ; consideramos la función gaussiana continua

$$f_L(x) = \sum_k \omega_k e_k(x), \quad x \in \mathbb{M}, \quad (1.113)$$

donde  $\omega_k$  son variables aleatorias gaussianas estándar (es decir, con esperanza nula y varian-za igual a uno).

En nuestro caso, tomando  $\mathcal{H}_\Lambda = \{u_j \mid \Lambda \leq \lambda_j \leq (1 + \eta)\Lambda\}$ , la función  $f_\Lambda = \sum_k \omega_k u_k$  es una combinación aleatoria de autofunciones con frecuencias en el intervalo  $[\Lambda, (1 + \eta)\Lambda]$ . El trabajo de Nazarov y Sodin permite demostrar un resultado más fuerte: salvo un reescalado de de orden  $\lambda_j^{-1}$  de  $v$ , la función  $f_\Lambda$  tiene probabilidad no nula de satisfacer la cota (1.106). Más aún,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ f_L \text{ cumpla (1.106) salvo un reescalado de orden } \lambda_j^{-1} \text{ en torno a algún punto} \right\} = 1, \quad (1.114)$$

donde Prob mide la probabilidad en un cierto espacio probabilista. La formulación rigurosa de este último hecho y las demostraciones se pueden consultar en [CS18].



## 2. El Principio de localización inversa

En el presente capítulo mostraremos algunos contextos particulares en los que podemos aproximar cualquier onda monocromática dada por una autofunción propiamente dicha del Laplaciano. A esta propiedad se la ha bautizado recientemente como «localización inversa» y, como veremos, está muy relacionada con la simetría del problema (y, consecuentemente, con la multiplicidad de los autovalores elevados).

En conocimiento de los resultados presentados en el capítulo anterior surge una importante pregunta en teoría espectral: ¿es posible reemplazar las autofunciones aproximadas por autofunciones propiamente dichas? *A priori*, no está claro que esto se pueda hacer, salvo en el caso clásico de los esféricos armónicos. Sin embargo, un importante avance en este sentido por Enciso y Peralta-Salas muestra que esto se puede hacer en ciertos contextos. La técnica se basa en el análisis asintótico de las autofunciones de un operador autoadjunto (habitualmente, el Laplaciano) a energías muy altas y a escalas muy pequeñas. Veámoslo en más detalle.

Sea  $\mathbb{M}$  una variedad riemanniana cerrada. Examinemos un entorno de un punto  $p$  considerando una bola pequeña de radio  $1/\lambda$  con centro en el punto  $p$ , y rescalemos las coordenadas geodésicas correspondientes por el factor  $\lambda$ , de forma que la bola en coordenadas reescaladas aparezca como la bola euclídea de radio 1, con origen de coordenadas en  $p$ . Acordemos que, en lo que sigue, todo difeomorfismo será de clase  $C^\infty$ , todas las curvas las tomaremos de forma que no se autointersequen y diremos que un entero es grande cuando sea grande en valor absoluto.

Una autofunción de un operador autoadjunto de segundo orden en la variedad  $\mathbb{M}$  (el ejemplo canónico será el Laplaciano), cuyo autovalor  $\lambda^2$  sea lo suficientemente grande, se parece en este «zoom» a una solución de una ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes en el espacio euclídeo (e.g., en el caso del Laplaciano, una solución de la ecuación de Helmholtz  $\Delta u + u = 0$ ). En el capítulo 1 hemos demostrado este hecho en el caso del Laplaciano.

No obstante, este razonamiento no nos permite concluir que, siempre que se consideren energías altas y se tomen escalas pequeñas, se van a poder encontrar autofunciones del operador cercanas a una solución dada de la EDP euclídea. En este capítulo tratamos precisamente de revertir la situación, es decir, de asegurarnos de que cualquier solución de la EDP euclídea es la aproximación a pequeña escala de alguna función propia de energía suficientemente elevada, al menos en algunas variedades cerradas. Visto de otro modo, si se analizan las autofunciones del operador a escalas cada vez más pequeñas y energías cada vez más altas, uno termina por ver, con tanta resolución como desee, cualquier solución con energía 1 del correspondiente operador en el espacio euclídeo. A los resultados de este tipo se les conoce como teoremas de localización inversa. En la demostración de estos resultados de localización inversa, una pieza clave es la dimensión creciente de los espacios propios del operador en la variedad. Esta multiplicidad creciente nos proporciona, conforme aumentamos la energía, una gama cada vez mayor de autofunciones que poder combinar. Es por este motivo, que los espacios concretos donde se han podido demostrar teoremas de este tipo son aquellos con

## 2. El Principio de localización inversa

métricas de alta simetría; a saber, el operador de la Laplace-Beltrami en la esfera y el toro, o bien el operador de Schrödinger en  $\mathbb{R}^d$  con ciertos potenciales que presentan simetría radial (concretamente, con el potencial de Coulomb y en el caso del oscilador armónico).

### 2.1. La esfera unidad $\mathbb{S}^d$ y el toro plano $\mathbb{T}^d$

Procedemos a enunciar y esbozar la demostración de los dos principales resultados de esta sección. Ambos teoremas se deben a los autores A. Enciso, D. Peralta-Salas y F. Torres De Lizaur [EPSdL21].

#### 2.1.1. Localización inversa para esféricos armónicos

A continuación demostramos un teorema de localización inversa para las autofunciones del Laplaciano en  $\mathbb{S}^d$  para  $d \geq 2$ . Recordemos que los autovalores del Laplaciano en la  $d$ -esfera son de la forma  $k(k+d-1)$ , donde  $k$  es un entero no negativo, y la correspondiente multiplicidad está dada por

$$M(k, d) := \binom{k+d-1}{k} \frac{2k+d-1}{k+d-1}. \quad (2.1)$$

Dada una función cualquiera  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$  satisfaciendo la ecuación  $\Delta\phi + \phi = 0$  (donde entendemos que el Laplaciano actúa componente a componente) veremos que existe un vector de  $q$  esféricos armónicos  $Y := (Y_1, \dots, Y_q)$  en  $\mathbb{S}^d$  (es decir, cada  $Y_i$  es un esférico armónico real), satisfaciendo  $\Delta_{\mathbb{S}^d} Y = k(d+k-1)Y$ , cuyo comportamiento en una pequeña bola de radio  $k^{-1}$  es muy próximo al de  $\phi$  en la bola unidad euclídea  $\mathbb{B}$ .

Para enunciar el teorema, fijemos un punto arbitrario  $p_0 \in \mathbb{S}^d$  y tomemos una carta de coordenadas geodésicas normales  $\Psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{B}$  centrada en  $p_0$ . Como en el capítulo anterior, y en lo que sigue,  $\mathcal{B}_\rho$  se refiere a la bola geodésica en  $\mathbb{S}^d$  centrada en  $p_0$  y de radio  $\rho$  y  $\mathbb{B}_\rho$  a la bola euclídea en  $\mathbb{R}^d$  centrada en el origen de igual radio. Cuando  $\rho = 1$ , omitimos el subíndice.

#### **Teorema 2.1.** Localización inversa en una bola pequeña

Sea  $\phi$  una onda monocromática con valores en  $\mathbb{R}^q$  y definida en  $\mathbb{R}^d$ , cumpliendo  $\Delta\phi + \phi = 0$ . Fijemos un entero positivo  $m$  y una constante positiva  $\delta$ . Para todo entero  $k$  suficientemente grande, existe una función esférica armónica con valores en  $\mathbb{R}^q$ ,  $Y := (Y_1, \dots, Y_q)$ , definida en  $\mathbb{S}^d$  y con energía  $k(d+k-1)$  tal que

$$\left\| \phi - Y \circ \Psi^{-1} \left( \frac{\cdot}{k} \right) \right\|_{C^{m+2}(\mathbb{B})} \leq \delta. \quad (2.2)$$

La demostración (que se puede leer en detalle en [EPSdL21] y cuyos pormenores omitimos aquí, se divide en tres pasos, en los que realizamos aproximaciones sucesivas:

- Será conveniente trabajar con funciones complejas así que definimos  $\tilde{\phi} := \phi + i\phi$ . En primer lugar, y dado que  $\tilde{\phi}$  es también una solución de la ecuación de Helmholtz, podemos expandirla en una bola  $\mathbb{B}$  como

$$\tilde{\phi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M(l,d-1)} b_{lkj_l}(r) Y_{lk}(\omega), \quad (2.3)$$

2.1. La esfera unidad  $\mathbb{S}^d$  y el toro plano  $\mathbb{T}^d$

donde  $r := |x| \in \mathbb{R}^+$  y  $\omega := x/r \in \mathbb{S}^{d-1}$  son coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^d$ ,  $Y_{lk}$  es una base de esféricos armónicos asociados al valor propio  $l(l+d-2)$ ,  $j_l$  son las funciones de Bessel esféricas y, finalmente,  $b_{lk} \in \mathbb{C}^q$  son coeficientes constantes.

La serie en 2.3 converge en norma  $L^2$ , por lo que para cada  $\delta' > 0$ , podemos truncar la suma en algún entero  $L$

$$\phi_1 := \sum_{l=0}^L \sum_{k=1}^{M(l,d-1)} b_{lk} j_l(r) Y_{lk}(\omega), \quad (2.4)$$

de forma que se asemeje a  $\tilde{\phi}$  en el sentido de  $L^2$ :

$$\|\phi_1 - \tilde{\phi}\|_{L^2(\mathbb{B})} < \delta'. \quad (2.5)$$

Por las propiedades de decaimiento de las funciones esféricas Bessel (que se pueden consultar apéndice B), sabemos que la función  $\mathbb{C}^m$ -valuada  $\phi_1$  decae como  $|\phi_1(x)| \leq C/|x|^{\frac{d-1}{2}}$  para  $|x|$  suficientemente grande. Estamos en posición de aplicar el teorema de Herglotz en este caso particular. Previamente, conviene recordar el siguiente hecho:

**Lema 2.1.** *Toda solución polinomialmente acotada  $u$  de la ecuación de Helmholtz  $\Delta u + u = 0$  en  $\mathbb{R}^d$  se puede escribir como la transformada de Fourier de una distribución con soporte en la esfera unidad. Concretamente,*

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi) e^{x \cdot \xi} d\sigma(\xi), \quad (2.6)$$

donde  $d\sigma$  es la medida de área en  $\mathbb{S}^{d-1}$  y  $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{S}^{d-1})$  para cierto  $s \in \mathbb{R}$  (es decir, es una distribución en  $\mathbb{S}^{d-1}$ ).

El teorema de Herglotz nos permite relacionar el decaimiento de  $u$  con la regularidad de  $f$ , su transformada de Fourier.

**Teorema 2.2.** *Notemos por*

$$|||u|||^2 = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{\mathbb{B}_R} |u(x)|^2 dx \quad (2.7)$$

a la seminorma de Agmon-Hörmander de la función  $u$  definida en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, una solución  $u$  de la ecuación de Helmholtz satisface la condición de decaimiento

$$|||u||| < \infty \quad (2.8)$$

si, y solo si, existe una función  $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$  de forma que  $u = \widehat{f} dS$ . Además, la estimación de decaimiento es óptima en el sentido de que existe una constante universal  $C$  de forma que

$$\frac{1}{C} |||u||| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C |||u|||. \quad (2.9)$$

La versión más general de este resultado se encuentra, por ejemplo, en [Hö03, Teorema

2. El Principio de localización inversa

7.1.27]. Podemos entonces escribir

$$\phi_1(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\sigma(\xi), \quad (2.10)$$

donde  $f$  es una función en  $L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{C}^q)$ , i.e.,  $q$  funciones en  $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$  con valores en  $\mathbb{C}$ .

- Aproximando adecuadamente la función integrando  $f$  y utilizando otras herramientas analíticas (v.g., transformada inversa de Fourier, aproximación por funciones *smooth*, decaimiento de funciones en la clase Schwarz, etc), conseguimos representar salvo un error arbitrariamente pequeño la función  $\phi$  en  $\mathbb{B}$  por una función  $\varphi$  con valores en  $\mathbb{R}^q$  que se puede escribir como una suma finita de términos de la forma

$$\frac{c_j}{|x - x_j|^{\frac{d}{2}-1}} J_{\frac{d}{2}-1}(|x - x_j|), \quad (2.11)$$

con  $c_j \in \mathbb{R}^q$  y  $x_j \in \mathbb{R}^d$  para  $j = 1, 2, \dots, N$  con  $N$  un entero no negativo lo suficientemente grande. Nótese que cada función con esta forma es una onda monocromática.

- A continuación, mostramos que existe una colección de  $q$  funciones propias  $Y = (Y_1, \dots, Y_q)$  en  $\mathbb{S}^d$  con valor propio  $k(k + d - 1)$  todas ellas de forma que, al observarlas en una bola de radio  $k^{-1}$  tras un reescalado adecuado, se aproximan a  $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$  en la bola unidad, siempre que  $k$  sea lo suficientemente grande. La prueba de este hecho se basa en conocidas expansiones asintóticas de los polinomios ultrasféricos o de Gegenbauer y utiliza la representación de  $\varphi$  como suma finita de funciones Bessel desplazadas que hemos obtenido en el paso anterior. La aparición de los polinomios ultrasféricos se debe a lo que se conoce como Teorema de adición (véase el apéndice B) que asegura que, para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{R}^{d+1}$ , se tiene

$$C_k^d(p \cdot q) = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{M(k, d)} \sum_{j=1}^{M(k, d)} Y_{kj}(p) Y_{kj}(q), \quad (2.12)$$

siento  $\{Y_{kj}\}_{j=1}^{M(k, d)}$  una base ortonormal arbitraria de esféricos armónicos con valor propio  $k(k + d - 1)$ . Recordemos que la función  $\varphi$  se expresaba como la suma finita

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^N c_j \frac{1}{|x - x_j|^{\frac{d}{2}-1}} J_{\frac{d}{2}-1}(|x - x_j|) \quad (2.13)$$

con coeficientes  $c_j \in \mathbb{R}^q$  y puntos  $x_j \in \mathbb{B}_R$ . Con estos mismos  $c_j$  y  $x_j$  definimos, para cada  $p \in \mathbb{S}^d$ , la función

$$Y(p) := \sum_{j=1}^N c_j \frac{1}{2^{\frac{d}{2}-1} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} C_k^d(p \cdot p_j) \quad (2.14)$$

donde  $p_j := \Psi^{-1}\left(\frac{x_j}{k}\right)$ . Siempre que  $k > R$ ,  $p_j$  estará bien definido. En vista de la ecuación (2.12),  $Y$  es un esférico armónico con valor propio  $k(d + k - 1)$ . El comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales aquí presentes (referimos al lector al

apéndice B) permite concluir el resultado buscado tomando  $k$  suficientemente grande y aplicando estimaciones de regularidad elíptica usuales.

### 2.1.2. El caso de $\mathbb{T}^d$

De forma completamente análoga, incluimos un teorema de localización inversa para autofunciones del Laplaciano en  $\mathbb{T}^d$  para  $d \geq 3$ . Recordemos que los autovalores del Laplaciano en el  $d$ -toro son los enteros de la forma

$$\lambda = |k|^2, \quad (2.15)$$

para algún  $k \in \mathbb{Z}^d$ . En particular, el espectro del Laplaciano en  $\mathbb{T}^d$  contiene el conjunto de los cuadrados de enteros. Como en el caso anterior, fijamos un punto arbitrario  $p_0 \in \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$  y tomamos una carta de coordenadas normales geodésicas  $\Psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{B}$  centrada en  $p_0$ .

#### Teorema 2.3. Localización inversa en un toro simétrico

Sea  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 3$ ,  $\phi$  una función  $\mathbb{R}^q$ -valuada en  $\mathbb{R}^d$ , cumpliendo  $\Delta\phi + \phi = 0$ . Fijemos un entero positivo  $m$  y una constante positiva  $\delta$ . Para cada entero impar  $k$  suficientemente grande, existe  $\psi$  una autofunción del Laplaciano en  $\mathbb{T}^d$  con valores en  $\mathbb{R}^q$  que está asociada al autovalor  $k^2$  y tal que

$$\left\| \phi - \psi \circ \Psi^{-1} \left( \frac{\cdot}{k} \right) \right\|_{C^{m+2}(\mathbb{B})} \leq \delta. \quad (2.16)$$

De nuevo, omitimos la demostración detallada (también se puede encontrar en [EPSdL21]) pero no queremos pasar sin hacer algunos comentarios pertinentes. Una vez más, creemos más sencillo pasar por la prueba si dividimos esta en tres etapas:

- El primer paso de la demostración es igual que en el teorema anterior 2.1 y nos permite probar que, para todo  $\delta' > 0$  existe una función  $\phi_1$  de  $\mathbb{R}^d$  a  $\mathbb{R}^q$  que aproxima a  $\phi$  en la bola  $\mathbb{B}$ , en el sentido de que

$$\|\phi_1 - \phi\|_{C^0(\mathbb{B})} < \delta', \quad (2.17)$$

y que se puede representar como la transformada de Fourier de una distribución con soporte en la esfera unidad:

$$\phi_1(x) = \int_{S^{d-1}} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\sigma(\xi), \quad (2.18)$$

donde  $f$  es una función regular en  $S^{d-1}$  con valores en  $\mathbb{C}^m$  y tal que  $f(\xi) = \bar{f}(-\xi)$ .

- El siguiente paso en la demostración es cubrir la esfera  $S^{d-1}$  por una cantidad finita de conjuntos cerrados  $\{U_j\}_{j=1}^{N'}$  que tengan frontera regular (al menos, a trozos), intersección de sus interiores vacía de dos en dos y diámetro menor que  $\epsilon$ . A continuación (de nuevo, de forma similar a la prueba del teorema anterior 2.1) se construye una función  $\tilde{\psi}$  con la forma de un polinomio trigonométrico

$$\tilde{\psi}(x) := \sum_{j=1}^{N'} c_j e^{i\xi_j \cdot x}, \quad (2.19)$$

## 2. El Principio de localización inversa

donde  $\xi_j$  es un punto cualquiera en  $U_j$  y  $c_j := f(\xi_j)|U_j|$ , siendo  $|U_j|$  el volumen de  $U_j$ . Se puede comprobar que  $\tilde{\psi}$  satisface la misma ecuación que  $\phi$  y se puede hacer tan cercana a ella como queramos.

- La prueba termina escogiendo los  $\xi_j$  de forma adecuada para que

$$\psi(x) := \sum_{j=1}^{N'} c_j e^{ik\xi_j \cdot x}, \quad (2.20)$$

sea  $2\pi$ -periódica (esto es, invariante bajo la traslación  $x \mapsto x + 2\pi a$  para todo vector  $a \in \mathbb{Z}^d$ ). De esta forma, tenemos una función en el toro (se entiende, en el cociente que lo define) que además es una función propia del Laplaciano en este. Haciendo los errores en cada aproximación suficientemente pequeños, concluimos el resultado.

¿Cuál es, pues, la forma correcta de tomar los puntos  $\xi_j$ ? Observemos que para cada  $k \in \mathbb{N}$  impar y suficientemente grande es posible escoger los puntos  $\xi_j \in U_j \subset \mathbb{S}^{d-1}$  de forma que tengan componentes racionales (i.e.,  $\xi_j \in \mathbb{Q}^d$ ) y los reescalados  $k\xi_j$  sean vectores de enteros (i.e.,  $k\xi_j \in \mathbb{Z}^d$ ). Esto se debe a que para  $d \geq 3$ , los puntos racionales  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1} \cap \mathbb{Q}^d$  de altura  $k$  (y, por ende, cumpliendo  $k\xi \in \mathbb{Z}^d$ ) están uniformemente distribuidos en la esfera al hacer tender  $k$  a  $\infty$  tomando solo valores impares [Duko3] (de hecho, la restricción de que  $k$  sea impar se vuelve innecesaria para  $d \geq 4$  [Duko3]). Es necesario recordar a qué nos referimos cuando hablamos de la altura del punto  $\xi \in \mathbb{Q}^d$ : es el mínimo común múltiplo (M.C.M.) de los denominadores de sus coordenadas en forma reducida.

Concluimos esta sección haciendo notar que la hipótesis de que  $d \geq 3$  es necesaria. La razón es que los puntos racionales  $\xi \in \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{Q}^2$  con  $k\xi \in \mathbb{Z}^2$  no están uniformemente distribuidos en la esfera unidad (ni si quiera forman un subconjunto denso) a medida que  $k \rightarrow \infty$  para cualquier sucesión de valores impares. En [Cil93] se pueden encontrar algunos contraejemplos. No obstante, usando [Cil93] se puede demostrar un enunciado similar:

**Teorema 2.4.** *Sea  $\phi$  una función  $\mathbb{R}^m$ -valuada de  $\mathbb{R}^2$  cumpliendo  $\Delta\phi + \phi = 0$ . Fijemos un entero positivo  $m$  y una constante  $\delta$ . Entonces existe una sucesión de enteros  $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$  creciendo a infinito y autofunciones del Laplaciano  $\psi_l$  en  $\mathbb{T}^2$  con valores en  $\mathbb{R}^m$  y autovalores  $k_l^2$  de forma que*

$$\left\| \phi - \psi_l \circ \Psi^{-1} \left( \frac{\cdot}{k_l} \right) \right\|_{C^m(\mathbb{B})} \leq \delta, \quad (2.21)$$

para  $l$  lo suficientemente grande.

### 2.1.3. Localización inversa en múltiples regiones

El teorema principal de la sección 2.1 se puede refinar para incluir localización inversa alrededor de diferentes puntos de la esfera y, de esta forma, conseguir esféricos armónicos que aproximan a la vez muchas soluciones dadas de la ecuación Helmholtz en diferentes regiones. Una herramienta clave en la demostración de esta localización múltiple es el rápido decaimiento de los polinomios ultrasféricos para grado alto fuera de las bolas donde se comportan como funciones de Bessel desplazadas. Cabe notar que, por el contrario, los polinomios trigonométricos no muestran este decaimiento. Por tanto, no existe un resultado análogo en el caso del toro.

2.1. La esfera unidad  $S^d$  y el toro plano  $\mathbb{T}^d$

Exijamos  $d \geq 2$ . Sea  $\{p_\alpha\}_{\alpha=1}^\Lambda$  un conjunto de puntos en  $S^d$ , con  $\Lambda$  un entero fijo y arbitrariamente grande. Notamos por  $\Psi_\alpha : \mathcal{B}_\rho(p_\alpha) \rightarrow \mathbb{B}_\rho$  a la correspondiente carta geodésica en bolas de radio  $\rho$  centradas en el punto  $p_\alpha$ . Fijamos un radio  $\rho$  de forma que estas bolas sean disjuntas dos a dos, por ejemplo, tomando

$$\rho := \frac{1}{2} \min_{\alpha \neq \beta} \text{dist}_{S^d}(p_\alpha, p_\beta). \quad (2.22)$$

También exigimos al conjunto  $\{p_\alpha\}_{\alpha=1}^\Lambda$  que no contenga un par de puntos antipodales en  $S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ , i.e.,  $p_\alpha \neq -p_\beta$  para todo  $\alpha, \beta$ . El motivo para hacer esta suposición son las conocidas propiedades de paridad de los esféricos armónicos. Más concretamente, cualquier esférico armónico de energía  $k(d+k+1)$  tiene paridad  $(-1)^k$ ,

$$Y(p_\alpha) = (-1)^k Y(-p_\alpha), \quad (2.23)$$

por ser la restricción a la esfera de polinomios reales, armónicos y homogéneos de grado  $k$ . Por tanto, prescribir el comportamiento de un esférico armónico en una bola  $\mathcal{B}$  alrededor del punto  $p_\alpha$  automáticamente determina su comportamiento en la bola antipodal,  $-\mathcal{B}$ . Bajo estas hipótesis se puede probar la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.** Sea  $\{\phi_\alpha\}_{\alpha=1}^\Lambda$  un conjunto de  $\Lambda$  funciones evaluadas en  $\mathbb{R}^d$  y definidas en  $\mathbb{R}^d$ , i.e.,

$$\phi_\alpha = (\phi_{\alpha 1}, \dots, \phi_{\alpha 2}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad (2.24)$$

satisfaciendo la ecuación  $\Delta \phi_\alpha + \phi_\alpha = 0$ . Fijemos un entero positivo  $m$  y una constante real positiva  $\delta$ . Para cada entero  $k$  suficientemente grande, existe una función armónica esférica  $Y$  definida en  $S^d$ , tomando valores en  $\mathbb{R}^q$  y con energía  $k(k+d-1)$  cumpliendo la cota

$$\left\| \phi_\alpha - Y \circ \Psi_\alpha^{-1} \left( \frac{\cdot}{k} \right) \right\|_{C^{m+2}(\mathbb{B}_\rho)} < \delta, \quad (2.25)$$

para todo  $1 \leq \alpha \leq \Lambda$ .

La demostración, que se puede leer con detalle en [EPSdL21], pasa por aplicar el teorema 2.1 a cada  $\alpha$  para obtener una familia de autofunciones del Laplaciano  $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^\Lambda$  cumpliendo la propiedad de acotación

$$\left\| \phi_\alpha - \psi_\alpha \circ \Psi_\alpha^{-1} \left( \frac{\cdot}{k} \right) \right\|_{C^{m+2}(\mathbb{B})} < \delta. \quad (2.26)$$

Para cada  $\alpha$ , la función  $\psi_\alpha$  es una combinación lineal (con coeficientes en  $\mathbb{R}^m$ ) de polinomios ultrasféricos  $C_k^d(p \cdot q_j)$ , con  $\{q_j\}$  un conjunto finito de puntos en  $S^d$  bajo ciertas condiciones. Examinando el comportamiento asintótico de estos polinomios y de los (estrechamente relacionados) polinomios de Jacobi  $P_d^{(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}-1)}$ , se demuestra que la autofunción con valores en  $\mathbb{R}^q$  dada por

$$\psi := \sum_{\alpha=1}^\Lambda \psi_\alpha \quad (2.27)$$

cumple con lo pedido en el teorema.

## 2.2. Campos de Beltrami

En esta sección introducimos, enunciados y comentamos dos teoremas de localización inversa para el operador rotacional (notado habitualmente como  $\text{rot}$  o  $\text{curl}$ ; nosotros adoptaremos esta última). Si bien este operador se puede definir en espacios de dimensión mayor, esta generalización no es sencilla (y no siempre es satisfactoria). Por lo tanto, a lo largo de esta sección tomaremos en todo momento  $q, d = 3$ . A los autovectores del operador rotacional (a saber,  $V = (V_1, V_2, V_3)$  tales que  $\text{curl } V = \lambda V$  para alguna constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) se les nombra en honor al matemático italiano del s.XIX Eugenio Beltrami. Recordemos algunos conceptos de análisis vectorial que nos conducirán de forma natural a esta definición.

**Definición 2.1.** Un campo de Beltrami generalizado es un campo vectorial en dimensión tres que es paralelo a su propio rotacional,  $\text{curl}$ , en todo su dominio definición. Es decir, un campo vectorial  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice de Beltrami si cumple

$$F \times \text{curl } F = F \times (\nabla \times F) = 0 \text{ en } \Omega. \quad (2.28)$$

Esta ecuación lineal se puede reformular como

$$\text{curl } F = f \cdot F, \quad (2.29)$$

donde  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar regular.

**Definición 2.2.** Un campo solenoidal (también llamado campo incompresible o de divergencia nula) en un dominio  $\Omega$  es un campo vectorial  $F$  con divergencia nula en todo  $\Omega$ :

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = 0 \text{ en } \Omega. \quad (2.30)$$

Es conocido que si  $F$  se deriva de un potencial vectorial  $A$ , es decir,  $F = \text{curl } A$  entonces es automáticamente solenoidal,  $0 = \text{div } \text{curl } A$  (su recíproco es cierto localmente).

Por otro lado, si  $F$  es al mismo tiempo un campo de Beltrami generalizado y de divergencia nula, esto es,  $\text{curl } F \times F = 0$  y  $\text{div } F = 0$ , se dice que es «libre de fuerza» (habitualmente, *force-free field*) y podemos aplicar la identidad

$$\text{curl}(\text{curl } F) = -\Delta F + \nabla(\text{div } F), \quad (2.31)$$

convertida en

$$\text{curl}(\text{curl } F) = -\Delta F, \quad (2.32)$$

para obtener la siguiente:

$$-\Delta F = \text{curl}(fF). \quad (2.33)$$

En (2.31), (2.32) y (2.33), la expresión  $\Delta F$  debe entenderse como el vector que en cada componente tiene el Laplaciano de la de partida, es decir, si  $F = (F_1, F_2, F_3)$ ,  $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$ .

Si, adicionalmente, asumimos que  $f \equiv \lambda \neq 0$  es una constante no nula, llegamos a la simple ecuación

$$\Delta F = -\lambda^2 F. \quad (2.34)$$

Es decir, los campos de Beltrami son, en particular, soluciones de la ecuación de Helmholtz (coordenada a coordenadas). La condición de que  $F$  sea incompresible es redundante cuando el factor de proporcionalidad  $f$  es una constante no nula.

**Definición 2.3.**  $F$  es un campo de Beltrami fuerte (más habitual es encontrarlo en inglés, *strong Beltrami field* u omitir el adjetivo) si es proporcional a su rotacional con factor de proporcionalidad constante:

$$\operatorname{curl} F = \lambda \cdot F, \quad (2.35)$$

donde  $\lambda \neq 0$  es una constante real no nula. Si tomamos  $\lambda = 0$ , diremos que la solución es un campo armónico.

Para nosotros, el factor de proporcionalidad será constante  $f = \lambda$  y los campos (fuertes) de Beltrami serán autofunciones (rigurosamente, autovectores) del operador rotacional

$$\operatorname{curl} u = \lambda u. \quad (2.36)$$

Todas estas definiciones se pueden hacer de forma análoga en el caso en que sustituimos un dominio  $\Omega$  del espacio por una variedad riemanniana  $\mathbb{M}^3$  cerrada. Analíticamente, los campos de Beltrami (fuertes) definidos en una variedad cerrada de dimensión 3 suponen los autovectores del operador curl. Este define un operador simétrico (pensemos en la fórmula de Green,  $\int_{\mathbb{M}} (v \cdot \operatorname{curl} w - \operatorname{curl} v \cdot w) dV = 0$ ) y no negativo que, por tanto, tiene una única extensión autoadjunta (la conocida extensión de Friedrich). Tomaremos esta extensión y pensaremos en curl como un operador autoadjunto con dominio denso en el espacio de los campos incompresibles con norma  $L^2(\mathbb{M})$  finita (es decir, campos de divergencia nula  $\operatorname{div} u = 0$ , ya que los preserva:  $\operatorname{div}(\operatorname{curl} u) = 0$ , como hemos visto). En este dominio podemos aplicar el operador curl dos veces y obtener la ecuación (2.34). Como el teorema espectral (véase el apéndice A) nos da mucha información sobre los valores propios del Laplaciano, en particular, obtenemos que el espectro de curl es numerable y discreto  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$

### 2.2.1. Teorema principal para campos de Beltrami

Como autofunciones del operador rotacional, los campos de Beltrami forman una base del espacio de todos los campos de divergencia cero, en  $L^2(\mathbb{M}, \mathbb{R}^3)$  y exactos. Recordemos que un campo de divergencia nula se dice exacto si se puede considerar el campo de vorticidad de un campo de velocidades. Tiene sentido entonces buscar teoremas de localización inversa para el operador rotacional en lugar del operador Laplaciano. De nuevo, para hacer uso de la creciente multiplicidad de los autovalores altos del operador curl, tomamos variedades con una alta simetría: el toro plano y la esfera, como en la sección anterior. Incluimos a continuación los resultados que han obtenido Enciso y Peralta-Salas en estos contextos.

Escribiremos  $\mathbb{M}^3$  cuando no tengamos intención de distinguir entre  $\mathbb{T}^3$  (el 3-toro plano estándar,  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ ) y  $\mathbb{S}^3$  (la esfera unidad en  $\mathbb{R}^4$ ). Se sabe [Fol89] que el espectro del operador rotacional en la esfera está formado por los enteros cuyo valor absoluto es mayor o igual que dos,

$$\sigma(\operatorname{curl}, \mathbb{S}^3) = \{\lambda \in \mathbb{Z} \mid |\lambda| \geq 2\}. \quad (2.37)$$

En el caso de  $\mathbb{T}^3$ , se puede comprobar usando series de Fourier (o leer en [Bä19]), que el espectro consiste en los números reales de la forma  $\lambda = \pm|k|$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}^3$ .

$$\sigma(\operatorname{curl}, \mathbb{T}^3) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda = \pm|k| \text{ con } k \in \mathbb{Z}^3\}.$$

Además  $\mathbb{Z} \subseteq \sigma(\operatorname{curl}, \mathbb{T}^3)$ . Suponemos, de ahora en adelante, que  $\lambda > 0$ ; el caso para  $\lambda$  negativo es completamente análogo.

El siguiente teorema muestra que un campo de Beltrami  $v$  en  $\mathbb{R}^3$  se puede aproximar,

## 2. El Principio de localización inversa

salvo un reescalado introducido *ad hoc*, por un campo de Beltrami de alta energía  $u$  en  $\mathbb{M}^3$ . Como ya hemos hecho en otras ocasiones, fijamos un punto arbitrario  $p \in \mathbb{M}^3$  y tomamos una carta de coordenadas normales geodésicas  $\Psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{B}$  centrada en  $p$ . Enunciaremos el teorema en términos del campo vectorial  $\Psi_* u$  en  $\mathbb{B}$ , que es tan solo la expresión del campo de Beltrami  $u$  en coordenadas locales normales. Si  $u^i(x)$  con  $i = 1, 2, 3$  son las tres componentes de  $\Psi_* u$  en la base cartesiana  $\{e_i\}_{i=1}^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , i.e.,

$$\Psi_* u(x) = \sum_{i=1}^3 u^i(x) e_i, \quad x \in \mathbb{B}, \quad (2.38)$$

haremos uso del campo reescalado

$$\Psi_* u \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right) = \sum_{i=1}^3 u^i \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right) e_i. \quad (2.39)$$

### Teorema 2.5. Localización inversa en campos de Beltrami

Sea  $v$  un campo de Beltrami en  $\mathbb{R}^3$  cumpliendo  $\text{curl } v = v$ , sean  $\epsilon$  y  $m$  números positivos. Entonces para cualquier entero impar lo suficientemente grande  $\lambda$  existe un campo de Beltrami  $u$  cumpliendo  $\text{curl } u = \lambda u$  en  $\mathbb{M}^3$  y tal que

$$\left\| \Psi_* u \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right) - v \right\|_{C^m(\mathbb{B})} < \epsilon. \quad (2.40)$$

La prueba es diferente para cada una de las dos variedades consideradas y se asemeja en gran parte a las de la sección anterior. Se pueden leer en detalle en [EPSdL17]. Incluimos aquí solo un esbozo de esta.

En el caso de la esfera, podemos dividir la prueba en tres etapas:

- En primer lugar, el campo de Beltrami  $v$  que, en particular, cumple la ecuación de Helmholtz

$$\Delta v + v = 0, \quad (2.41)$$

se aproxima en  $\mathbb{B}$  por un campo  $w$  que es suma finita de funciones esféricas de Bessel  $j_0(|x - x_n|)$  centradas en distintos puntos  $x_n \in \mathbb{R}^3$ . El campo  $w$  no es un campo de Beltrami, pero sí satisface la ecuación de Helmholtz. Llamamos la atención al lector de que este paso es un caso particular ( $n = q = 3$ ) del primer y segundo paso en la demostración del teorema 2.1. No hay más que tener en mente la estrecha relación entre funciones esféricas de Bessel y funciones de Bessel de primer tipo:

$$j_0(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} J_{\frac{1}{2}}(t). \quad (2.42)$$

- A continuación, se muestra que es posible tomar tres esféricos armónicos  $Y_1, Y_2, Y_3$  en  $S^3$  con energía  $\Lambda := \lambda(\lambda - 2)$  cuyos comportamientos en una bola de radio  $1/\lambda$  se asemejen a los de cada una de las tres componentes del campo  $w$  en una bola de radio 1 (siempre y cuando  $\Lambda$  sea suficientemente grande). Si escribimos el campo vectorial  $w$  en términos de sus componentes en la base  $\{e_i\}_{i=1}^3$  cartesiana de  $\mathbb{R}^3$ :

$$w = \sum_{i=1}^3 w^i e_i; \quad (2.43)$$

cada componente  $w^i$  es solución de  $\Delta w^i + w^i = 0$  en  $\mathbb{R}^3$  y, como un caso particular para  $q = 1$  y  $n = 3$  del tercer paso de la demostración del teorema 2.1, podemos encontrar un esférico armónico  $Y_i$  en  $S^3$  con energía  $\Lambda(\Lambda + 2)$  que aproxima en la bola  $\mathcal{B}_{1/\Lambda}$  el comportamiento del campo  $w^i$  en la bola unidad.

- Hasta este momento, la prueba se ha basado en aplicar el teorema 2.1 adecuadamente. Para finalizar, construimos un campo de Beltrami  $u$  en  $S^3$  con energía  $\lambda$ , utilizando como ingredientes los esféricos armónicos  $Y_k$  del paso anterior y una base de los campos de Hopf, y de forma que  $u$  aproxime a  $v$  en el sentido buscado:

$$\left\| \Psi_* u \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right) - v \right\|_{C^m(\mathbb{B})} < \epsilon. \quad (2.44)$$

Recordemos brevemente los campos vectoriales de Hopf en  $S^3$ : una base positivamente orientada de estos viene dada por los tres campos vectoriales ortonormales siguientes que, en términos de las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^4$ , están dado explícitamente por:

$$\begin{aligned} h_1(x) &:= (-x_4, x_3, -x_2, x_1), \\ h_2(x) &:= (-x_3, -x_4, x_1, x_2), \\ h_3(x) &:= (-x_2, x_1, x_4, -x_3). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Se sabe que son vectores propios del operador rotacional con valor propio 2, i.e.,

$$\text{curl } h_j = 2h_j, \text{ para } j = 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

Hemos tomado la base cartesiana  $\{e_i\}_{i=1}^3$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $\Psi_* h_i(0) = e_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . El campo de Beltrami que aproxima a  $v$  se puede construir explícitamente como

$$u := \frac{1}{\Lambda^2} \text{curl} (\text{curl} + \Lambda) (Y_1 h_1 + Y_2 h_2 + Y_3 h_3). \quad (2.47)$$

Un cálculo sencillo muestra que  $\text{curl } u = (\Lambda + 2)u$  y, por construcción, obtenemos las propiedades de aproximación buscadas ajustando adecuadamente cada paso.

El caso del toro presenta sus propias particularidades. La prueba se puede, de nuevo, encontrar con detalle en [EHPS18a]. Su demostración, como sucedía para la esfera, se sustenta en el teorema 2.3. Una aplicación de este teorema para el caso particular de  $q = d = 3$  nos da la existencia de un campo vectorial

$$\tilde{u}(x) := \sum_{j=1}^N c_j e^{i\Lambda \xi_j \cdot x}, \quad (2.48)$$

$2\pi$ -periódico (lo que nos permite definirlo en  $\mathbb{T}^3$ ), satisfaciendo la ecuación

$$\Delta \tilde{u} + \Lambda^2 \tilde{u} = 0 \quad (2.49)$$

y que, tras un reescalado, aproxima a  $v$  en la norma adecuada:

$$\left\| \tilde{u} \left( \frac{\cdot}{\Lambda} \right) - v \right\|_{C^{m+2}(\mathbb{B})} < \delta'. \quad (2.50)$$

La parte novedosa de esta prueba aparece en el paso final: definimos el campo vectorial  $u$

## 2. El Principio de localización inversa

en el toro como

$$u := \frac{\operatorname{curl} \operatorname{curl} \tilde{u} + \Lambda \operatorname{curl} \tilde{u}}{2\Lambda^2}. \quad (2.51)$$

Un calculo sencillo (aunque laborioso) permite ver que  $\operatorname{curl} u = \Lambda u$ , así que es un campo de Beltrami en  $\mathbb{T}^3$  con valor propio  $\lambda := \Lambda$ . Además, como  $\operatorname{curl} \tilde{u} \left(\frac{\cdot}{\Lambda}\right) = \Lambda \operatorname{curl} \tilde{u} \left(\frac{\cdot}{\Lambda}\right)$  y  $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \tilde{u} \left(\frac{\cdot}{\Lambda}\right) = \Lambda^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} \tilde{u} \left(\frac{\cdot}{\Lambda}\right)$ , se cumple que

$$\left\| u \left(\frac{\cdot}{\Lambda}\right) - v \right\|_{C^{m+2}(\mathbb{B})} < C\delta < \epsilon. \quad (2.52)$$

Así concluimos el resultado para  $\delta$  suficientemente pequeño.

### 2.2.2. Observaciones finales

Para cerrar esta sección añadimos algunos comentarios pertinentes sobre el teorema 2.5 y sobre su demostración.

#### Observación 2.1. Existen muchos campos de Beltrami que satisfacen la aproximación

De hecho, como el resultado funciona para cada entero  $\lambda$  impar lo suficientemente grande y los campos de Beltrami correspondientes a diferentes valores propios son ortogonales respecto de la norma de  $L^2(\mathbb{M})$ , hay infinitos campos de Beltrami no proporcionales que cumplen (2.40).

#### Observación 2.2. En la esfera, el resultado es cierto para cualquier entero $\lambda$ lo suficientemente grande

Es decir, el hecho de que  $\lambda$  sea impar nunca se usa en la demostración del teorema para el caso en que  $\mathbb{M}^3 = \mathbb{S}^3$ , por lo que el resultado es cierto igualmente para  $\lambda$  entero par. Esta restricción, sin embargo, sí es necesaria cuando tomamos como variedad el toro.

#### Observación 2.3. En el toro, la paridad de $\lambda$ y la distribución de los puntos racionales en la 2-esfera son piezas clave de la demostración

La prueba que hemos esbozado es cierta siempre que el valor propio  $\lambda$  sea un entero impar suficientemente grande en valor absoluto. No se dice nada sobre enteros pares, o incluso sobre otros valores propios no enteros. No obstante, podemos refinar levemente este resultado.

Como ya se comentó tras la demostración del teorema 2.3 en el desarrollo de la prueba se hace uso de que, si  $\Lambda := \lambda - 2$  es lo suficientemente grande, podemos tomar los valores  $\zeta_n \in \mathbb{S}^2$  de forma que

- tengan coeficientes racionales:  $\zeta_n \in \mathbb{Q}^3$  y
- sus reescalados sean vectores de enteros:  $\Lambda \zeta_n \in \mathbb{Z}^3$ .

Esto es posible ya que los puntos racionales  $\zeta \in \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$  con  $\Lambda \zeta \in \mathbb{Z}^3$  están uniformemente distribuidos en la esfera unidad a medida de  $\Lambda \rightarrow \infty$  solo si tomamos  $\lambda$  impar ( $d = 3$  en este caso). Este es un resultado que se debe a W. Duke [Duk03].

La primera de las condiciones: existe un conjunto  $\{\zeta_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{S}^2$  de forma que  $\lambda \zeta_n \in \mathbb{Z}^3$ , se obtiene sin mucho esfuerzo del hecho de que podemos escribir  $\lambda = |k|$  con  $k \in \mathbb{Z}^3$ . Por lo tanto, podemos sustituir la colección de los enteros impares  $\Lambda$  por cualquier conjunto de autovalores  $\lambda$  para los cuales existe un conjunto de puntos  $\{\zeta_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{S}^2$  dependiendo de  $\lambda$ , tal que el reescalado cumpla  $\lambda \zeta_n \in \mathbb{Z}^3$  y que se vuelva denso en la esfera a medida que

$|\lambda| \rightarrow \infty$  en el conjunto de estos valores propios. En particular, remplazando la condición de densidad por la más restrictiva de que  $\{\xi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{S}^2$  estén equidistribuidos en la esfera, resulta que la caracterización de los números  $\lambda$  cumpliendo esta propiedad está en cierto modo relacionada con el problema de Linnik en teoría de números. Por dar un ejemplo concreto, como la condición de equidistribución pedida se cumple para cualquier valor propio tal que el entero  $\lambda^2$  sea libre de cuadrados [Duk88], podemos afirmar que el teorema será cierto para cualquier autovalor suficientemente grande del operador curl (posiblemente par, racional o irracional) que cumpla que  $\lambda^2$  sea libre de cuadrados.

**Observación 2.4. ¿Podemos considerar otros retículos?**

Otra pregunta interesante que cabe hacerse es si podemos encontrar un resultado análogo al considerar toros de la forma  $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^3 := \mathbb{R}^3 / (2\pi\mathcal{L})$ , donde  $\mathcal{L}$  sea un retículo (más comúnmente, un *lattice*) general en  $\mathbb{R}^3$ . La clave ahora es disponer de un resultado de densidad o equidistribución como anteriormente pero, en este caso, no para puntos racionales de la esfera y autovalores enteros sino para un conjunto de puntos  $\{\xi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{S}^2$  y valores propios reales  $\lambda$  de forma que  $\lambda\xi_n \in \mathcal{L}'$ , donde  $\mathcal{L}'$  es lo que se conoce habitualmente como el retículo recíproco de  $\mathcal{L}$  (este se define como el conjunto de puntos  $k \in \mathbb{R}^3$  que cumplen  $k \cdot x \in \mathbb{Z}$  para todo  $x \in \mathcal{L}$ ). En algunos casos muy particulares, e.g. para retículos de la forma  $\mathcal{L} := a\mathbb{Z}^3$  con  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , podemos usar justo los mismos teoremas ya vistos para una sucesión de valores propios de la forma  $\lambda/a$  con  $\lambda$  un entero impar. El caso más general ha sido recientemente estudiado por A. Enciso, D. Peralta-Salas y la autora. Lo que se ha demostrado es que la posibilidad de realizar o no localización inversa depende únicamente de las propiedades aritméticas del espectro. En particular, el conjunto de retículos para los cuales se cumple esta propiedad tiene medida nula pero incluye todos los retículos racionales. Actualmente se está preparando un artículo que contiene estos resultados para su posible publicación [EGRPSb].

**Observación 2.5. Se puede conseguir localización inversa múltiple**

En la demostración del teorema para  $\mathbb{M}^3 = \mathbb{S}^3$  hacemos uso del teorema 2.1. Como ya hemos visto, este resultado se puede refinar para incluir localizaciones alrededor de diferentes puntos de la esfera (cf. proposición 2.1), en tanto en cuanto no sean antipodales ninguna pareja de entre ellos. Es claro, entonces, que podemos conseguir el siguiente resultado que generaliza al dado:

**Teorema 2.6.** Sean  $P_1, \dots, P_l$  en  $\mathbb{S}^3$ , no antipodales entre ellos, y sean  $\Psi_j : \mathcal{B}_{R_0}(P_j) \rightarrow \mathbb{B}_{R_0}$  cartas geodésicas normales centradas en  $P_j$  y, por ejemplo, con

$$R_0 := \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \text{dist}_{\mathbb{S}^3}(P_j, P_k). \quad (2.53)$$

Tomemos  $\{v_j\}_{j=1}^l$  campos de Beltrami cualesquiera en  $\mathbb{R}^3$  satisfaciendo  $\text{curl } v_j = v_j$  y tomemos también números positivos  $\epsilon, m > 0$  arbitrarios. Entonces para cada entero  $\lambda$  suficientemente grande se puede encontrar un campo de Beltrami, cumpliendo  $\text{curl } u = \lambda u$  en  $\mathbb{S}^3$ , de forma que

$$\left\| (\Psi_j)_* u \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right) - v_j \right\|_{C^{m+2}(\mathbb{B})} < \epsilon, \quad (2.54)$$

para todo  $1 \leq j \leq l$ .

Para la demostración, razonamos de forma exactamente igual a como lo hemos hecho en la prueba de 2.5 pero utilizando la proposición 2.1 en el lugar del teorema 2.1.

## 2. El Principio de localización inversa

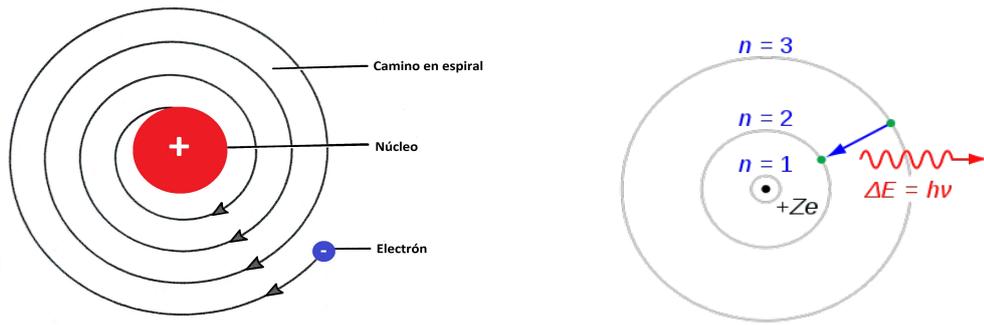


Figura 2.1.: El modelo de Bohr reemplazó a la concepción del átomo de hidrógeno como un sistema planetario de dos cuerpos. Este proponía que el electrón solo podía ocupar algunas órbitas estables caracterizadas por las condiciones de Bohr-Sommerfeld. La primera imagen ha sido generada por la autora mientras la segunda de ellas se ha extraído de [Wikipedia](#)

### 2.3. La ecuación de Schrödinger: potencial de Coulomb y oscilador armónico

Es habitual encontrar en la literatura una cierta relación entre las frecuencias el Laplaciano  $\lambda$  y la constante de Planck  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , un parámetro muy pequeño ( $h \sim 6.62607015 \times 10^{-34} m^2 kg / s$ ). Se utiliza en ocasiones la notación

$$h_j = \lambda_j^{-1}, \quad (2.55)$$

y, para la base ortonormal,  $u_{h,j}$  y la ecuación de autovalores se escribe como

$$\Delta u_h = -h^{-2} u_h \Leftrightarrow (h^2 \Delta - 1) u_h = 0, \quad (2.56)$$

donde el estudio asintótico de los autovalores de alta frecuencia corresponde con el límite semiclásico  $h \rightarrow 0$ .

Una gran parte de la mecánica cuántica está conectada con el problema de valores propios de la ecuación de Schrödinger:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V \right) \psi = E \psi. \quad (2.57)$$

Aquí,  $V$  denota la multiplicación por un potencial  $V: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  (posiblemente, con singularidades),  $E$  es la energía y  $\hbar$  la constante de Planck. Cuando  $V = 0$ ,  $E = 1$  y  $\hbar = \lambda^{-1} \sqrt{2}$  recuperamos la ecuación de autovalores  $(\Delta + \lambda^2) \psi_\lambda = 0$ .

El estudio de autovalores de Schrödinger en mecánica cuántica resuelve el problema de la estabilidad de los átomos. Antes de la mecánica cuántica, el átomo de hidrógeno se visualizaba como un sistema planetario de dos cuerpos, i.e., como un electrón orbitando el núcleo centrado en el origen  $0 \in \mathbb{R}^3$  de acuerdo a las leyes de Kepler. Pero este modelo no podía estar en lo cierto: el electrón radiaría energía y caería describiendo una espiral hasta el núcleo. Por el contrario, el modelo de Bohr (1913) de «teoría cuántica antigua» propone que el electrón solo puede ocupar ciertas órbitas estables (aquellas que cumplen las condiciones de Bohr-Sommerfeld). Sin embargo esta teoría está demasiado especializada: se basa en la

### 2.3. La ecuación de Schrödinger: potencial de Coulomb y oscilador armónico

estructura especial de las órbitas del problema de Coulomb (en particular en la simetría que hace que todas las órbitas sean periódicas) y no se puede extender de forma nada clara a átomos más complicados como el de Helio o, incluso, el de hidrógeno en un campo electromagnético.

En 1926, Erwin Schrödinger, un físico austriaco, llevo el modelo atómico de Bohr un paso más lejos al utilizar ecuaciones de autovectores para describir la probabilidad de encontrar un electrón en una determinada posición. En el artículo *Quantisierung als Eigenwertproblem*, Annalen der Physik (1926) [Scho3], Schrödinger propuso modelar el electrón por una función de ondas  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$  en la que los estados de energía  $E_j(\hbar)$  resuelven el problema de autovalores siguiente.

$$\tilde{H}\psi_{\hbar,j} := \left( -\frac{\hbar}{2}\Delta + V \right) \psi_{\hbar,j} = E_j(\hbar)\psi_{\hbar,j}, \quad (2.58)$$

donde  $\tilde{H}$  es el operador de Schrödinger (independiente del tiempo),  $V$  es el potencial, un operador de multiplicación en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $E_j(\hbar)$  es la energía y  $\{\psi_{\hbar,j}\}$  es una base ortonormal de autofunciones con valores propios  $E_j(\hbar)$  ordenados, como es costumbre, de forma no decreciente.

Por comodidad, en lo que sigue tomaremos las funciones normalizadas de forma que no aparezca el parámetro  $\hbar$ . Asumiendo que las autofunciones están normalizadas en  $L^2$ ,

$$\int |\psi_{\hbar,j}|^2 dV = 1, \quad (2.59)$$

las funciones  $\psi_{\hbar,j}$  se pueden interpretar como la amplitud de probabilidad, esto es, su módulo al cuadrado es una medida de probabilidad con

$$|\psi_{\hbar,j}|^2(x)dx = \text{densidad de probabilidad de encontrar la partícula en } x. \quad (2.60)$$

De esta forma, la mecánica cuántica resuelve el misterio de cómo el electrón puede estar moviéndose y estacionario al mismo tiempo; pero también reemplaza el modelo geométrico de Bohr (basado en la mecánica clásica) de órbitas clásicas por autofunciones, que no son objetos geométricos y son difíciles de visualizar. ¿Es posible reconciliar la idea clásica de las órbitas con la imagen cuántica de autofunciones como estados de energía estacionarios de los átomos? En el límite semiclásico  $\hbar \rightarrow 0$ , la física cuántica habría de tender a la física clásica, y las autofunciones deberían estar relacionadas con las órbitas clásicas. De ahí el interés en el estudio de grandes autovalores en el problema (2.3), correspondientes con valores pequeños del parámetro  $\hbar$ .

Como hemos visto, el potencial de Coulomb

$$V(x) = -\frac{c}{|x|}, \quad (2.61)$$

en  $\mathbb{R}^3$ , es especialmente importante por representar (de acuerdo con el modelo de Bohr) el electrón en el átomo de hidrógeno. Otro potencial que igualmente merece interés es el oscilador armónico:

$$V(x) = c|x|^2, \quad (2.62)$$

en  $\mathbb{R}^3$ . Esto se debe a su utilidad para describir aproximadamente una gran variedad de sistemas: vibración de átomos, moléculas e iones en un retículo. Además permite aproximar otros potenciales cerca de sus puntos de equilibrio.

### 2.3.1. El oscilador armónico

El oscilador armónico cuántico es el análogo en mecánica cuántica del oscilador armónico clásico. Es, como hemos comentado, uno de los sistemas modelos más importantes en mecánica cuántica ya que todo potencial se puede aproximar por uno armónico en las proximidades de un punto de equilibrio estable. El hamiltoniano de una partícula en el oscilador armónico isótropo  $d$ -dimensional es

$$\tilde{H} = \sum_{i=1}^d \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2 \right), \quad (2.63)$$

donde,  $x_i$  es cada una de las coordenadas de la partícula,  $p_i$ , su momento asociado,  $m$ , la masa de la misma,  $k$ , una fuerza constante y  $\omega := \sqrt{k/m}$  es la frecuencia angular del oscilador. Con el fin de obtener los resultados estacionarios (esto es, los autovalores y autofunciones del hamiltoniano, así como los niveles de energía permitidos), habremos de resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2.64)$$

Si nos restringimos al caso  $d = 3$ ,  $\mathbb{R}^3$ , normalizamos para deshacernos de todas las constantes e introducimos coordenadas, comprobamos que las autofunciones del oscilador armónico son las funciones  $\psi$  complejo-valuadas ( $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ) de cuadrado integrable satisfaciendo la ecuación  $-\Delta\psi + |x|^2\psi = \lambda\psi$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Este es un caso concreto de una partícula en un potencial con simetría esférica, es decir,  $V$  presenta simetría esférica. En estos casos, y debido precisamente a esta simetría, es conveniente usar coordenadas esféricas para buscar soluciones del sistema cuántico:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(r, \theta, \varphi) + V(r)\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi). \quad (2.65)$$

Una técnica común es la de separación de variables. Los autovectores entonces adoptan la forma

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (2.66)$$

donde  $\theta, \varphi$  son los ángulos polares esféricos y representan la colatitud y el ángulo azimutal, respectivamente; y  $r$  la variable radial. Los dos factores finales suelen considerarse agrupados como esféricos armónicos, quedando

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (2.67)$$

En coordenadas esféricas la ecuación de Schrödinger queda

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \psi + \frac{2}{\hbar^2} [E - V(r)] \psi = 0. \quad (2.68)$$

Prestando atención a las propiedades de los esféricos armónicos (en concreto,  $\Delta_{S^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ), obtenemos la ecuación unidimensional siguiente

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V(r)] R = 0. \quad (2.69)$$

Esta técnica es habitual y permite encontrar soluciones explícitas en algunos de los casos de

### 2.3. La ecuación de Schrödinger: potencial de Coulomb y oscilador armónico

mayor interés, a saber:

- $V(r) = 0$  es el caso de una partícula en el vacío. Como solución encontramos los esféricos armónicos, que sirven de base para otros casos.
- $V(r) = V_0$  finito para  $r < r_0$  e infinito en todo el resto del espacio; es útil para describir estados acotados en un núcleo.
- $V(r) = cr^2$  es el caso del oscilador armónico que estamos considerando.
- $V(r) = -c/r$  es el potencial de Coulomb del que hablaremos en breve, utilizado para describir estados acotados en el átomo de hidrógeno.

De vuelta al caso en consideración,

$$-\Delta\psi + |x|^2\psi = \lambda\psi, \quad (2.70)$$

en  $\mathbb{R}^3$  y aplicando este razonamiento podemos encontrar fácilmente una base ortogonal de autofunciones asociadas a este hamiltoniano. Específicamente, tomamos

$$\psi_{klm}(r, \theta, \varphi) := e^{-r^2/2} r^l L_k^{l+1/2}(r^2) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.71)$$

donde  $L_k^j$  son polinomios de Laguerre. Los índices se mueven en los conjuntos

$$k \geq 0, \quad l \geq 0, \quad -l \leq m \leq l; \quad (2.72)$$

el autovalor correspondiente a  $\psi_{klm}$  es

$$\lambda_{kl} := 4k + 2l + 3, \quad (2.73)$$

y es sencillo comprobar que la degeneración del correspondiente espacio propio es  $\frac{1}{2}(2k + l + 1)(2k + l + 2)$ . Nótese que el valor propio es independiente de  $m$ .

La relación de este problema con aquellos que estamos considerando en estas notas se debe al siguiente hecho: un análisis similar al hecho en el capítulo 1 (concretamente, en la prueba extraída de [EJNo7]), permite ver que, en bolas de radio  $\lambda^{-1/2}$ , el comportamiento asintótico de las autofunciones de energías altas viene determinado por la ecuación de Helmholtz,  $\Delta\phi + \phi = 0$ . Heurísticamente, se puede entender por qué esto es verdad introduciendo la variable reescalada  $\tilde{x} := \lambda^{-1/2}x$ , en términos de la cual la ec. de autovalores (2.70) se lee:

$$\Delta_{\tilde{x}}\psi + \psi = |\tilde{x}|^2\psi/\lambda^2. \quad (2.74)$$

El modo de hacer esto preciso es calculando el comportamiento asintótico de los polinomios de Laguerre, que gobiernan la parte real de las autofunciones del oscilador armónico. Concretamente, el siguiente lema permite describir el comportamiento de las autofunciones  $\psi_{klm}$  y su gradiente para valores grandes de  $k$ . Para enunciarlo utilizamos la siguiente notación:  $e_r := x/r$  es el vector unitario en la dirección radial y  $\nabla_{S^2}Y(\theta, \varphi)$  es el gradiente (en la esfera unidad) de una función  $Y(\theta, \varphi)$  de las variables angulares.

**Lema 2.2.** Sean enteros  $l \geq 0$  y  $-l \leq m \leq l$ . De forma uniforme para  $r \leq R$ , la autofunción  $\psi_{klm}$

## 2. El Principio de localización inversa

admite la expansión asintótica

$$\begin{aligned}\psi_{klm}(x) &= A_{kl} \left[ j_l \left( \sqrt{\lambda_{kl}} r \right) + O(1/k) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ \nabla \psi_{klm}(x) &= \sqrt{\lambda_{kl}} A_{kl} \left[ j'_l \left( \sqrt{\lambda_{kl}} r \right) + O(1/k) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) e_r \\ &\quad + A_{kl} \left[ j_l \left( \sqrt{\lambda_{kl}} r \right) + O(1/k) \right] \frac{\nabla_{S^2} Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r}\end{aligned}\tag{2.75}$$

a medida que  $k \rightarrow \infty$ . Aquí,  $j_l$  son las funciones esféricas de Bessel de orden  $l$  y  $A_{kl}$  es una constante no nula.

La demostración de este lema, que se puede encontrar en [EHPS18b] y se debe a Enciso, Hartley y Peralta-Salas, se sigue esencialmente de la fórmula asintótica de Hilb para los polinomios de Laguerre (se puede consultar en [Sze39], aunque también se comenta brevemente en el apéndice B):

$$\begin{aligned}e^{-r^2/2} r^l L_k^{l+1/2}(r^2) &= A_{kl} j_l \left( \sqrt{\lambda_{kl}} r \right) + O\left(k^{(l-1)/2}\right), \\ \frac{d}{dr} \left[ e^{-r^2/2} r^l L_k^{l+1/2}(r^2) \right] &= \sqrt{\lambda_{kl}} \left[ A_{kl} j'_l \left( \sqrt{\lambda_{kl}} r \right) + O\left(k^{(l-1)/2}\right) \right]\end{aligned}\tag{2.76}$$

con

$$A_{kl} := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\lambda_{kl}}}{2} \right)^{-l} \frac{\Gamma(k+l+3/2)}{k!}.\tag{2.77}$$

Esta fórmula se cumple de forma uniforme para  $r \leq R$  y el lema se sigue de ella usando (2.71) y la fórmula de Stirling sobre los coeficientes  $A_{kl}$ .

**Lema 2.3.** *Fórmula de Stirling*

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left( 1 + O\left( \frac{1}{n} \right) \right).\tag{2.78}$$

Es importante notar que las funciones de la forma  $c_{lm} j_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$  para  $c_{lm}$  constantes complejas son soluciones de la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^3$ .

En el artículo mencionado [EHPS18b], los autores prueban que la degeneración accidental (más usual es encontrar su término anglosajón, *accidental degeneracy*) de los autovalores del oscilador armónico se puede utilizar para demostrar un teorema de localización inversa en este escenario.

**Teorema 2.7.** *Sea  $\phi$  una solución par de la ecuación de Helmholtz  $\Delta\phi + \phi = 0$  con valores complejos, definida en un entorno abierto y acotado  $U$  de un conjunto  $S$  cerrado, simétrico y con complemento  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  conexo de  $\mathbb{R}^3$ , sea  $\epsilon$  un número positivo. Entonces, para cualquier entero  $N$  suficientemente grande existe una autofunción  $\psi$  del oscilador armónico  $-\Delta\psi + |x|^2\psi = \lambda\psi$  con  $\lambda = 2N + 3$  en  $\mathbb{R}^3$  cumpliendo*

$$\|\psi(\cdot/\sqrt{\lambda}) - \phi(\cdot)\|_{C^1(S)} < \epsilon.\tag{2.79}$$

La prueba de este resultado, como ya es costumbre por apartados anteriores, se dividirá en tres pasos:

- En un primer momento, dirigimos nuestros esfuerzos hacia la construcción de una onda monocromática  $\phi'$  en  $\mathbb{R}^3$  que aproxima a la solución local  $\phi$  en el conjunto  $S$ .

### 2.3. La ecuación de Schrödinger: potencial de Coulomb y oscilador armónico

Esto es lo que se conoce como un resultado de aproximación global (G.A.T.), como el ya utilizado en el capítulo 1, y que proporciona gran versatilidad a las ondas monocromáticas. La demostración, de naturaleza técnica y analítica, utiliza como herramienta esencial una función de Green del operador  $\Delta + 1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Denotada por

$$G(x) := \frac{\cos |x|}{4\pi|x|}, \quad (2.80)$$

esta función satisface la ecuación distribucional

$$\Delta G + G = -\delta_0, \quad (2.81)$$

donde  $\delta_0$  es la medida de Dirac con soporte en 0. Los pormenores de esta argumentación (que se pueden leer en [EHPS18b]) son omitidos en estas notas a causa de que se desarrollará en el capítulo 5 una prueba de estructura similar. Tan solo consideramos ineludible mostrar que la aproximación global construida será de la forma de una serie «Fourier-Bessel», i.e.,

$$\phi' := \sum_{l=0}^{l_0} \sum_{m=-l}^l c_{lm} j_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.82)$$

debido a que utilizaremos en su obtención la expansión sobre una bola  $B$  de una cierta función en serie de esféricos armónicos (de nuevo, similarmente al procedimiento seguido en la sección del capítulo 1 correspondiente). Las hipótesis topológicas sobre el conjunto  $S$  serán necesarias para desarrollar esta teoría de aproximación global con decaimiento. Además, por ser  $\phi$  una función par, podemos exigir a  $\phi'$  que cada  $c_{lm}$  sea nulo si  $l$  es impar.

- Tomamos un entero  $N$  suficientemente grande a determinar más adelante y al que pedimos que sea mucho mayor que  $l_0/2$ ; para cada  $l$  entero par menor que  $2N$  fijamos  $k_l = N - l/2$  y, a imagen de la suma (2.82), definimos la autofunción

$$\psi := \sum_{l=0}^{l_0} \sum_{m=-l}^l \frac{c_{lm}}{A_{k_l l}} \psi_{k_l l m}, \quad (2.83)$$

asociada al autovalor  $\lambda := \lambda_{k_l l} = 4N + 3$ . Notemos que el autovalor  $\lambda$  no depende de la elección de  $l$ , lo que hace de  $\psi$  una auténtica autofunción (y no solo una autofunción aproximada) compleja, diferenciable y con norma  $L^2(\mathbb{R}^3)$  finita. El ingrediente clave en este paso ha sido la elevada degeneración del autovalor  $\lambda$ , para  $N$  suficientemente grande, que asegura la existencia de una familia de autofunciones isoenergéticas muy rica en comportamiento de las variables angulares. La ley de Weyls, que ya comentamos en el capítulo 1, nos da esta propiedad para el Laplaciano por lo que, aún antes de haber observado explícitamente este crecimiento de la degeneración para el operador ahora considerado, se trata de una característica que cabría esperar. Recordemos que los coeficientes  $c_{lm} = 0$  para  $l$  impar. Esto nos permite que el valor  $k_l$  sea siempre un número entero.

- Para concluir, nos servimos del, ya mencionado, lema 2.2 para acotar

$$\left| \psi \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right) - \phi(x) \right|, \left| \nabla \psi \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right) - \nabla \phi(x) \right| \leq C/N, \quad (2.84)$$

## 2. El Principio de localización inversa

siempre que  $|x| < R$ , para un  $R$  fijado tal que  $S \subset \mathbb{B}_R$ . El resultado se sigue de tomar  $N$  suficientemente grande.

### Observación 2.6. Dimensiones más altas

A diferencia de lo que ocurría en la sección anterior, donde la definición del operador curl dependía esencialmente de la dimensión, la restricción al caso  $d = 3$  hecha en este apartado se debe solo a la aplicación de los resultados presentados en él que se expondrá en el capítulo próximo. Merece la pena mencionar que esencialmente el mismo argumento nos permite aproximar  $q$  soluciones de la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^d$  por  $q$  autofunciones real-valuadas del oscilador armónico  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_q)$  asociadas al mismo autovalor  $\lambda$  grande.

Notemos que cuando  $d \geq 3$  las autofunciones del oscilador armónico vienen dadas por

$$\psi_{klm} = e^{-r^2/2} r^l L_k^{l+(n-2)/2}(r^2) Y_{lm}(\omega), \quad (2.85)$$

donde  $\omega := x/r$  es un punto en  $\mathbb{S}^{d-1}$  e  $Y_{lm}$  son los esféricos armónicos en  $\mathbb{S}^{d-1}$  (también llamados hiperesféricos), con frecuencia  $l(l+d-2)$ . Aquí, los valores propios correspondientes a  $\psi_{klm}$  son  $\lambda_{kl} = 4k + 2l + d$  (con igual degeneración),  $l \geq 0$ ,  $m = (m_1, \dots, m_{n-2})$  y

$$|m_1| \leq m_2 \leq \dots \leq m_{d-2} \leq l. \quad (2.86)$$

Usando de nuevo la fórmula asintótica de Hilb para los polinomios de Laguerre [Sze39], obtenemos la expansión asintótica del lema 2.2 generalizada para  $d = 3$ :

$$\begin{aligned} \psi_{klm}(x) &= A_{kl}^d \left[ j_l^d(\sqrt{\lambda_{kl}r}) + O\left(k^{-\min\{(d+1)/4, 2\}}\right) \right] Y_{lm}(\omega), \\ \nabla \psi_{klm}(x) &= \sqrt{\lambda_{kl}} A_{kl}^d \left[ \left( j_l^d \right)'(\sqrt{\lambda_{kl}r}) + O\left(k^{-\min\{(d+1)/4, 2\}}\right) \right] Y_{lm}(\theta, \phi) e_r \\ &\quad + A_{kl}^d \left[ j_l^d(\sqrt{\lambda_{kl}r}) + O\left(k^{-\min\{(d+1)/4, 2\}}\right) \right] \frac{\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{lm}(\omega)}{r}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

donde  $j_l^d$  denota las funciones de Bessel hiperesféricas, que satisfacen la ecuación de Helmholtz radial en  $\mathbb{R}^d$  y las constantes  $A_{kl}^d$  son conocidas. Así mismo, cabe comentar que en este contexto más general la función de Green utilizada en el primer paso de la prueba adopta la forma

$$G(x) := -\beta |x|^{1-d/2} Y_{d/2-1}(|x|), \quad (2.88)$$

donde  $Y_{d/2-1}$  denota la función de Bessel de segundo tipo y  $\beta$  es una constante real que tomamos

$$\beta := \frac{2^{1-d/2} \pi}{|\mathbb{S}^{d-1}| \Gamma(d/2 - 1)}, \quad (2.89)$$

con  $|\mathbb{S}^{d-1}| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ , el área de la esfera unidad de dimensión  $d-1$  y  $\Gamma$ , la función Gamma presentada en el apéndice B. De esta forma se cumple  $\Delta G + G = 0$  en todo punto salvo en el origen y, gracias al comportamiento asintótico de las funciones de Bessel, podemos ver que

$$G(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}| |x|^{d-2}} + \mathcal{O}\left(|x|^{3-d}\right), \quad (2.90)$$

a medida que  $x \rightarrow 0$ .

El resto de la demostración permanece sin alterar.

**Observación 2.7. La hipótesis de paridad**

Merece la pena mencionar el hecho de que la paridad de la función  $\phi$  ha sido clave en la construcción del número cuántico radial  $k_l$ . Esta hipótesis extra sobre la paridad de  $u$  (que, como veremos, no aparece si consideramos otros potenciales en el lugar del oscilador) se debe a la forma de los autovalores:  $\lambda_{kl}$  depende, esencialmente, de un único «número cuántico»,  $2k + l$ . Es posible modificar el argumento para considerar el caso en que  $\phi$  sea impar. Como los esférico armónicos tienen paridad  $(-1)^l$ , notamos que

$$\psi_{klm}(-x) = (-1)^l \psi_{klm}(x) = (-1)^{(\lambda_{kl}-3)/2-2k} \psi_{klm}(x) = (-1)^{(\lambda_{kl}-3)/2} \psi_{klm}(x), \quad (2.91)$$

por lo que la paridad de las autofunciones de la base depende solo del valor  $\lambda_{kl}$  y, por tanto, todas las autofunciones del oscilador armónico tendrán paridad. Más concretamente, como el valor propio  $\lambda_{kl}$  tiene la forma  $2N + 3$  para algún entero no negativo  $N$ , la paridad de la autofunción  $\psi_{klm}$  es la misma que la paridad de  $N$ .

**2.3.2. El potencial de Coulomb**

Tras el estudio hecho en el apartado anterior del oscilador armónico, surge de forma ineludible el caso del potencial de coulomb. Como cabría esperar, en [EHPS18a] A. Enciso, D. Hartley y D. Peralta-Salas consiguieron demostrar un resultado análogo al teorema 2.7 para el caso del potencial de Coulomb. No se trata de un mero calco de este; al contrario, la singularidad del potencial y el hecho de que no dispongamos de estados acotados con energía arbitrariamente alta introducen algunas complicaciones técnicas con las que los autores lidiaron utilizando ideas novedosas.

Recordemos que las autofunciones del hamiltoniano de Coulomb son las funciones  $\psi$  complejo-valuadas y pertenecientes al espacio de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^3)$  que satisfacen la ecuación

$$\left( \Delta + \frac{2}{|x|} + \lambda \right) \psi = 0, \quad (2.92)$$

en  $\mathbb{R}^3$ . Sirviéndonos de nuevo del método de variables separadas, comprobamos inmediatamente que los autovalores están dados por

$$\lambda_n := -\frac{1}{n^2} \quad (2.93)$$

para  $n \in \mathbb{N}$  y que una base del espacio propio correspondiente a  $\lambda_n$  viene dada por

$$\begin{aligned} \psi_{nlm} &:= f_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ f_{nl} &:= A_{nl} e^{-r/n} r^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2r}{n} \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

donde  $0 \leq l \leq n - 1$  y  $-l \leq m \leq l$ . Aquí  $A_{nl}$  es un factor de normalización que definimos como

$$A_{nl} = \frac{2^{l-1} (n-l-1)!}{(n+l)!}, \quad (2.95)$$

$L_k^\alpha$  son los polinomios asociados de Laguerre e  $Y_{lm}$  son los esféricos armónicos en  $S^2$ . Automáticamente se comprueba que la degeneración del espacio de funciones propias del nivel de energía  $\lambda_n$  es  $n^2$ .

## 2. El Principio de localización inversa

Heurísticamente, a medida que los niveles de energía  $\lambda_n$  tienden a 0 para valores grandes de  $n$ , es claro que el límite formal de la ecuación (2.92) es el problema de Coulomb con energía nula:

$$\left(\Delta + \frac{2}{|x|}\right)\phi = 0. \quad (2.96)$$

Si bien, a diferencia de los apartados anteriores, no se trata de la ecuación de Helmholtz, su comportamiento es en cierto sentido similar. Concretamente, la existencia de teoremas de aproximación global con decaimiento que tienen a esta ecuación por protagonista (al igual que sucedía para la ecuación de Helmholtz) será vital en la demostración de este resultado de localización inversa.

La clave es que, dada una solución arbitraria  $\phi$  de (2.96), será posible encontrar una sucesión de autofunciones  $\psi_n$  con energía  $\lambda_n$  que aproxima a la solución dada en una bola  $\mathbb{B}_R$  de  $\mathbb{R}^3$ . Es interesante notar que, a diferencia del oscilador armónico, los autovalores del potencial de Coulomb no crecen a infinito. Esto puede ser visto como una evidencia de que la herramienta esencial en la prueba de los teoremas de localización inversa es solo la degeneración de las autofunciones, en lugar del gran tamaño de las energías asociadas.

Para estudiar el comportamiento de las autofunciones  $\psi_{nlm}$  para grandes valores de  $n$  podemos considerar su parte radial. En el siguiente lema calculamos el comportamiento asintótico de los polinomios de Laguerre de orden alto (que dominan dicha componente radial) y demostramos que se acercan (en norma  $C^1$ ) a soluciones continuas de (2.96).

**Lema 2.4.** *Para cada  $l$  y  $R$  fijos,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f_{nl} - \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} \right\|_{C^0(0,R)} = 0, \text{ e incluso,} \quad (2.97)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f_{nl} - \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} \right\|_{C^1(R_1,R_2)} = 0, \quad (2.98)$$

para  $0 < R_1 < R_2$  fijos.

Como las autofunciones cumplen la ecuación radial siguiente

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + \lambda_n\right) f_{nl}(r) = 0, \quad (2.99)$$

estimaciones habituales de elipticidad nos permiten mejorar estas cotas uniformes a espacios  $C^m(R_1, R_2)$  con  $m \geq 1$ , por lo que es teorema siguiente podría mejorarse en este sentido.

El teorema de localización inversa probado en este contexto por Enciso, Hartley y Peralta-Salas reza como sigue:

**Teorema 2.8.** *Sea  $\phi$  una solución de la ecuación (2.96),  $\Delta\phi + 2\phi/|x| = 0$  con valores complejos, definida en un conjunto compacto  $K$  contenido en la bola  $\mathbb{B}_{R_0} \subset \mathbb{R}^3$ , con  $R_0 := \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ , con  $0 \notin K$  y con complemento  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  conexo; sea  $\epsilon$  un número positivo. Entonces, para cualquier entero  $N$  suficientemente grande existe una autofunción  $\psi$  del potencial armónico  $\Delta\psi + \frac{2}{|x|}\psi + \lambda\psi = 0$  con  $\lambda = -\frac{1}{N^2}$  en  $\mathbb{R}^3$  cumpliendo*

$$\|\psi - \phi\|_{C^1(K)} < \epsilon. \quad (2.100)$$

### 2.3. La ecuación de Schrödinger: potencial de Coulomb y oscilador armónico

La hipótesis hecha sobre el conjunto  $K$  acerca de su acotación por la bola  $\mathbb{B}_{R_0}$ , que aparece por primera vez, se debe a una significativa diferencia técnica entre los dos operadores considerados: el operador de Coulomb, a diferencia del oscilador armónico, es no negativo. Esto nos fuerza a establecer el teorema de aproximación tipo Runge (que será necesario en el primer paso de la prueba) para subconjuntos de la bola de radio  $R_0 := \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ . Por otro lado, y debido a que en este contexto no tenemos valores arbitrariamente altos para la energía, la propiedad de localización inversa se cumple en bolas con diámetro de orden 1, en contraposición con aquellas arbitrariamente pequeñas (específicamente, con radio de orden  $N^{-1/2}$ ) que era necesario tomar en el caso del oscilador armónico. No muchas más sutilezas diferencian esta prueba de la dada para el teorema 2.7, como se puede comprobar comparándolas a grandes rasgos (la demostración con todos sus detalles se puede leer en [EHPS18a]):

- Comenzamos la demostración probando la existencia de una función de Green  $G$  para el Hamiltoniano de Coulomb. Por las particularidades ya comentadas del potencial de Coulomb, solo demostraremos que  $G$  está definida en  $\mathbb{B}_R \times \mathbb{B}_R$  para un radio  $R < R_0$ ; y será simétrica. Gracias a ella, seremos capaces de construir una función  $\phi'$  satisfaciendo la ecuación

$$\left(\Delta + \frac{2}{|x|}\right) \phi' = 0, \quad (2.101)$$

en todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ , que sea continua en el origen y que decaiga en infinito como  $|x|^{-3/4}$ . Esta función, que construimos similarmente a como hicimos en la prueba del teorema 2.7 (se pueden consultar los detalles en [EHPS18a]), será de la forma

$$\phi' := \sum_{l=0}^{l_0} \sum_{m=-l}^l c_{lm} \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.102)$$

donde  $c_{lm}$  son constantes complejas, y aproxima a  $\phi$  en el sentido de

$$\|\phi - \phi'\|_{C^k(K)} < \delta, \quad (2.103)$$

para todo  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeño.

- Este segundo paso es notablemente más sencillo que su análogo pues cuenta con menos detalles técnicos: basta con definir la función

$$\psi_n := \sum_{l=0}^{l_0} \sum_{m=-l}^l c_{lm} f_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.104)$$

para un cierto  $n \in \mathbb{N}$ , a determinar más adelante.

- Finalizamos la demostración notando que

$$\|\psi_n - \phi'\|_{C^1(K)} \leq C \sum_{l=0}^{l_0} \left\| f_{nl} - \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} \right\|_{C^1(K)}. \quad (2.105)$$

Al aplicar el lema 2.4 podemos acotar esta diferencia por un  $\delta > 0$  cualquiera sin más que tomar  $n$  suficientemente grande. Tomaremos  $\delta = \frac{\epsilon}{2(l_0+1)}$  aquí y en el primer

2. El Principio de localización inversa

paso de la prueba para acotar  $\|\phi - \psi_n\|_{C^1(K)} \leq \|\phi - \phi'\|_{C^1(K)} + \|\phi' - \psi_n\|_{C^1(K)} < \epsilon$ ; y concluir el resultado buscado.

*Observación 2.8.* De forma completamente análoga a lo que sucedía en el caso del oscilador armónico, también todos los resultados de esta sección se pueden generalizar a cualquier dimensión  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ . No buscamos aburrir al lector con todos los detalles técnicos de esta extensión que no dista de la versión dada aquí más allá de la elección de una base de autofunciones adecuada a la dimensión. Estas se pueden encontrar en cualquier libro de referencia y vienen dadas por

$$\psi_{nlm} = e^{-r/n} r^l L_{n-l-\frac{d-1}{2}}^{2l+d-2} (2r/n) Y_{lm}(\omega), \quad (2.106)$$

donde  $\omega := x/r$  es un punto en  $\mathbb{S}^{d-1}$  e  $Y_{lm}$  son los esféricos armónicos en  $\mathbb{S}^{d-1}$  (o hiperesféricos), con frecuencia  $l(l+d-2)$ . Aquí, los valores propios correspondientes a  $\psi_{nlm}$  son

$$\lambda_{nl} = -\frac{1}{n^2}, \quad (2.107)$$

(con igual degeneración),  $l \geq 0$ ,  $m = (m_1, \dots, m_{n-2})$  y

$$|m_1| \leq m_2 \leq \dots \leq m_{n-2} \leq l. \quad (2.108)$$

La demostración se desarrolla sin mayores diferencias con la ya comentada,  $d = 3$ .

*Observación 2.9.* El teorema 2.8 se distingue de otros de naturaleza similar estudiados en esta memoria en el hecho de que prescinde de la composición con un reescalado. Es decir, la autofunción que construimos está arbitrariamente cerca de una onda monocromática dada por sí misma, sin necesidad de precomponer con una función del tipo  $\Phi(x) = x/\lambda_n$ , con  $\lambda_n$  el valor propio correspondiente. Esto se puede entender como una prueba del hecho de que el ingrediente clave en la demostración es solo la alta degeneración de las autofunciones y no, como se podría llegar a pensar en vista de resultados anteriormente vistos, la presencia de energías altas.

### 3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados

En este capítulo nos serviremos de los teoremas de localización inversa presentados en el capítulo 2 para resolver algunos problemas de realización en variedades y en el espacio euclídeo en presencia de ciertos potenciales radialmente simétricos. Como sabemos el objetivo de estos problemas es realizar una determinada variedad como variedad invariante de la solución a una ecuación en derivada parciales dada. Veremos que las piezas clave serán la propiedad de localización inversa y las técnicas ya existentes para resolver estos problemas en el espacio euclídeo.

#### 3.1. Problemas de realización

Recientemente gracias a nuevas técnicas experimentales se han podido observar en el laboratorio estructuras topológicas que emergen en diversos procesos físicos: dinámica de fluidos, óptica, física de estado sólido, etc. Más concretamente, se manifiestan como torbellinos anudados en fluidos y plasmas o dislocaciones en superconductores. Además de su utilidad para estudiar sistemas complejos, estas estructuras presentan gran interés desde el punto de vista matemático. Estos fenómenos físicos vienen descritos por soluciones (bien vectoriales bien escalares) de sistemas de EDPs y las estructuras topológicas emergentes son variedades invariantes de estas soluciones. Por ejemplo, en la figura 3.1 vemos un «torbellino» anudado formando un nudo de trébol (más adelante en este capítulo definiremos rigurosamente a qué nos referimos por «torbellino»). En otros casos, como el estudio de la materia condensada, el estado del sistema viene dado por un campo escalar y las estructuras topológicas vienen dadas por regiones del conjunto nodal de este campo escalar. Cabe preguntarse, ¿cuán intrincadas (topológicamente hablando) pueden llegar a ser estas variedades invariantes para

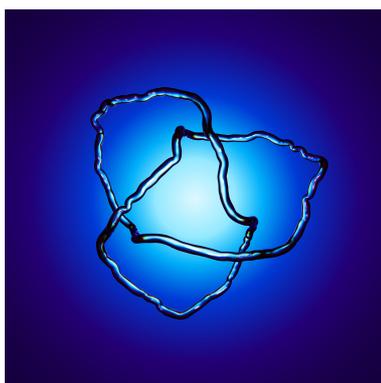


Figura 3.1.: Un tubo de vorticidad anudado obtenido en agua en el laboratorio Irvine Lab en Chicago. Imagen por cortesía de W. Irvine.

### 3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados

campos sujetos a ciertas restricciones analíticas impuestas por las ecuaciones?

Para ilustrar la clase de cuestiones matemáticas a las que nos referimos, considérense los siguientes problemas:

- **Caso escalar.** Encontrar una función compleja  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , que se avenga a la ecuación de Helmholtz

$$\Delta\psi + \psi = 0 \quad (3.1)$$

y cuyo conjunto nodal (que será en general una colección de curvas, siempre y cuando el cero sea un valor regular) tenga una componente difeomorfa a un nudo  $L$  dado.

- **Caso vectorial.** Encontrar una solución  $u$  de las ecuaciones de Euler estacionarias

$$u \times \omega = \nabla B, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad \omega := \operatorname{curl} u, \quad (3.2)$$

donde  $B := \frac{|u|^2}{2} + p$  es la función de Bernoulli y  $p$  es la presión; cuyo campo de vorticidad  $\omega$  tenga un toro invariante anudado como se desee.

A estos problemas se los denomina problemas de realización: el objetivo es realizar una determinada variedad como variedad invariante de la solución a una ecuación en derivadas parciales dada.

## 3.2. El caso euclídeo: una estrategia general.

Hace relativamente poco, Alberto Enciso y Daniel Peralta-Salas idearon una estrategia muy general para tratar problemas de realización como estos. De ella se sigue que estas cuestiones suelen exhibir una gran «flexibilidad»: la ecuación en derivadas parciales que rige el comportamiento de las soluciones no impone restricción alguna al tipo de variedad invariante que podemos encontrar. Es más, podemos conseguir cualquier subvariedad imaginable (que sea, claro está, topológicamente posible).

La estrategia introducida por Enciso y Peralta-Salas es muy maleable, y puede adaptarse a problemas muy variados (si bien la adaptación a cada contexto concreto dista en muchas ocasiones de ser trivial). Sin embargo, por variadas que sean, las aplicaciones de esta estrategia se limitan a ecuaciones en espacios abiertos. Al intentar implementarla en una variedad compacta topamos con una obstrucción fundamental. Para entender mejor de dónde nace esta obstrucción comentaremos brevemente el esquema general de la técnica.

Por concreción, pensemos en el primer problema presentado en la sección anterior: buscamos una función compleja  $\psi$  en  $\mathbb{R}^3$  que resuelva la ecuación  $\Delta\psi + \psi = 0$  y cuyo conjunto nodal  $\psi^{-1}(0)$  tenga una componente difeomorfa a un nudo prefijado  $L$ . En primer lugar, hemos de resolver el problema localmente: esto es, construir una solución  $\tilde{\psi}$  de la ecuación definida en un entorno tubular de  $L$  y que cumpla, además

- $\tilde{\psi}|_L = 0$ , de forma que realiza el nudo y
- la pareja de campos vectoriales  $(\mathcal{R}(\nabla\tilde{\psi}), \mathcal{I}(\nabla\tilde{\psi}))$  en  $L$  genere el fibrado normal de  $L$ . Aquí,  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{I}$  denotan respectivamente la parte real e imaginaria.

Esta última propiedad garantiza la robustez del conjunto y permite que sobreviva a perturbaciones de clase  $C^1$  de  $\tilde{\psi}$  (pensemos en el conjunto cero de una función real: si el gradiente de la función no se anula en ese conjunto, una perturbación de la misma seguirá teniendo

un conjunto cero difeomorfo al original). Si nuestro caso (como ocurre con  $\Delta\psi + \psi = 0$ ) es el de una EDP elíptica de segundo orden, bastará con disponer de un teorema de existencia local (como el teorema de Cauchy-Kovalevskaya, que se puede leer en cualquier libro de referencia como [Tao06]).

El siguiente paso consiste en encontrar una solución global  $\psi$  de la EDP que aproxime a la solución local  $\tilde{\psi}$  con una resolución tan fina como se desee. La clave aquí son los teoremas de aproximación de tipo Runge, como el Teorema de Lax- Malgrange y sus variantes de los que ya hablamos en el capítulo 1 y sobre los que volveremos en el capítulo 5. Como hemos pedido al conjunto cero de  $\tilde{\psi}$  que sea robusto ante perturbaciones, el nudo  $L$  no se disuelve en el proceso de aproximación, y una copia casi exacta de  $L$  (que se obtiene deformando el nudo mediante un difeomorfismo muy parecido a la identidad) se mantiene en el conjunto cero de la solución global. Así, el problema queda resuelto.

La obstrucción de la que hablábamos surge en el paso de la aproximación global. Es el mismo tipo de inconveniente con el que uno se topa al tratar de extender analíticamente a todo el plano complejo una función holomorfa definida en un anillo: es ineludible, en general, que aparezca una singularidad en el disco delimitado por la circunferencia interior. En efecto, el teorema de Lax-Malgrange requiere que la solución local esté definida en un abierto  $U$  cuyo complemento no tenga componentes compactas. Esta es la situación en la que nos encontramos al intentar reproducir el método en una variedad cerrada: el complemento  $\mathbb{M} \setminus U$  será un cerrado acotado, luego compacto.

En lo que resta de capítulo, presentamos una estrategia para abordar problemas de realización en variedades compactas, superando así la obstrucción que acabamos de exponer. La idea principal que nos permite soslayar la obstrucción de la implementación de la estrategia previa en variedades compactas se basa, precisamente, en la teoría de localización inversa. Hemos visto que, en algunas variedades compactas, existen autofunciones de un operador autoadjunto de segundo orden (en el caso más sencillo, el Laplaciano) asociadas a un autovalor  $\lambda$  grande y que se comportan, a escalas pequeñas adecuadamente escogidas, como cualquier solución prefijada de una EDP euclídea concreta (pensemos en la ecuación de Helmholtz). Los resultados de localización inversa implican que cualquier propiedad que las soluciones de la EDP euclídea presenten en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^d$  es extensible a las autofunciones de alta energía del operador (al menos, en ciertos casos con mucha simetría) siempre y cuando tal propiedad sea robusta ante perturbaciones. La cuestión se reduce, por tanto, al caso euclídeo, en el que uno puede esperar resolver el problema de realización con las técnicas de Enciso y Peralta-Salas. Pasamos a exponer algunos resultados que se han obtenido recientemente gracias a esta técnica.

### 3.3. Realización de torbellinos enlazados en campos de Beltrami de altas energías

A lo largo de esta sección trabajaremos constantemente con curvas cerradas y tubos en la esfera  $S^3$  o el toro plano  $\mathbb{T}^3$  por lo que es coherente comenzar precisando estos conceptos. Notaremos  $\mathbb{M}^3$  cuando no tratemos de distinguir entre las dos variedades que estamos considerando, como hemos hecho en el capítulo anterior.

**Definición 3.1.**  $L$  es una curva cerrada o nudo en  $\mathbb{M}^3$  si es la imagen por un embedding diferenciable del círculo  $S^1$ . Un enlace es una unión de nudos disjuntos. Por otro lado,  $L$  es

### 3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados

un tubo si es un dominio  $L \subset \mathbb{M}^3$  acotado y tal que  $\partial L$  es difeomorfo a  $\mathbb{T}^2$ . Usaremos el término torbellino para referirnos indistintamente a nudos, enlaces y tubos.

Un fluido incompresible (de densidad constante y no sometido a fuerzas exteriores) en  $\mathbb{R}^3$  viene descrito matemáticamente por su campo de velocidades

$$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)), \quad (3.3)$$

que es un campo vectorial dependiente del tiempo satisfaciendo las ecuaciones de Euler:

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla P, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (3.4)$$

para una cierta función  $P(x, t)$  (escalar) que representa la presión interna del fluido y no se prescribe de antemano, sino que es una incógnita más del problema. De forma que estamos ante un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cuatro incógnitas  $u = (u_1, u_2, u_3)$  y  $P$ .

El enfoque lagrangiano de la ecuación de Euler considera las trayectorias  $x(t)$  determinadas por el campo de velocidades, es decir, las soluciones de la ecuación  $x'(t) = u(x(t), t)$ . Físicamente, la trayectoria  $x(t)$  con condición inicial  $x(t_0) = x_0$  representa la evolución temporal de una partícula de fluido que se encuentra en la posición  $x_0$  a tiempo  $t_0$ . En dinámica de fluidos estas trayectorias se denominan líneas de corriente. Otro campo vectorial que desempeña un papel muy relevante en el análisis de la ecuación de Euler es la vorticidad  $\omega(x, t)$ , que se define como  $\omega := \operatorname{curl} u$ . Las trayectorias del campo  $\omega$  se denominan líneas de vorticidad y, por motivos físicos, resultan aún más interesantes que las líneas de corriente. Una tercera estructura de interés son los tubos de vorticidad.

**Definición 3.2.** Un tubo de vorticidad es un dominio acotado  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$  de forma que  $\partial\mathcal{T}$  es difeomorfo a  $\mathbb{T}^2$  (esto es, es un tubo) y  $\omega$  es paralelo en todo punto a  $\partial\mathcal{T}$ . Otra forma de verlo es decir que  $\partial\mathcal{T}$  es un toro invariante de la vorticidad, con lo que un tubo de vorticidad es el dominio interior acotado por un toro invariante de la vorticidad.

Cuando el campo de velocidades no depende del tiempo, el fluido se dice que está en estado «estacionario» o, simplemente, que es estacionario. En lo que sigue solo consideraremos soluciones estacionarias de las ecuaciones de Euler, que describen configuraciones de equilibrio en el fluido. Un simple cálculo muestra que en el caso estacionario la ecuación de Euler puede escribirse como

$$u \times \operatorname{curl} u = \nabla B, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (3.5)$$

donde  $B := P + \frac{1}{2}|u|^2$  es la función de Bernoulli.

Un tema central de la hidrodinámica topológica, que se remonta al trabajo de Lord Kelvin en torno al tercer cuarto del siglo XIX [Kel69], es la existencia de líneas de corriente, líneas de vorticidad y tubos de vorticidad anudados en flujos de fluidos estacionarios. William Thomson, mejor conocido como Lord Kelvin, no estaba considerando torbellinos anudados en el agua, sino en el (por entonces ubicuo) eter. Un extracto de las notas del curso de Física Matemática impartido por José de Echegaray en el Ateneo de Madrid [Rono4] nos dan una idea más precisa de este estudio: “Así el ilustre Lord Kelvin ha buscado en los movimientos de los torbellinos una explicación mecánica del Universo. El Universo está lleno, según opinión de muchos sabios, por una materia continua, y lo que nosotros llamamos materia, materia propiamente dicha, no es más que un conjunto de torbellinos: átomos-torbellinos les llama el ilustre autor, átomos que, según Helmholtz son indestructibles y eternos.”

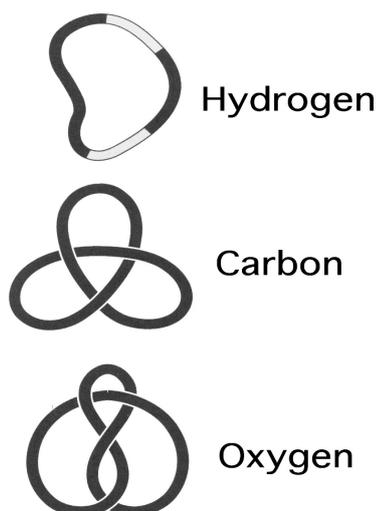


Figura 3.2.: Torbellinos anudados representando algunos elementos según la teoría de Lord Kelvin. Imagen cedida por David Poyato.

Según Lord Kelvin, los átomos serían torbellinos anudados, y a cada tipo de nudo correspondería una especie de átomo (lo que hoy llamaríamos un elemento químico). Aunque la motivación física de Lord Kelvin acabó por mostrarse errónea no mucho después, el problema matemático sugerido estimuló el desarrollo de la teoría de nudos, y permaneció sin resolver durante más de un siglo. Tanto es así que solo recientemente se ha demostrado la existencia de soluciones estacionarias en  $\mathbb{R}^3$  que presentan líneas de corriente y vorticidad y tubos de vorticidad anudados y enlazados de forma tan complicada como queramos [EPS12].

En virtud del teorema de estructura de Arnold [Arn65] y [Arn66], resulta natural buscar soluciones estacionarias a la ecuación de Euler con trayectorias complejas entre aquellas para las que la velocidad y la vorticidad son colineales (y así lo hicieron en [EPS12] y [EPS13b] Enciso y Peralta-Salas). Esto nos lleva a considerar las soluciones del sistema

$$\operatorname{curl} u = fu, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (3.6)$$

siendo  $f$  una función suave en  $\mathbb{R}^3$ . Dado que  $f$  es una integral primera del campo (basta tomar la divergencia de la primera ecuación para ver que  $\nabla f \cdot u = 0$ ), con vistas a obtener soluciones con dinámica compleja habremos de centrar nuestra atención en los campos que verifican  $\operatorname{curl} u = \lambda u$ , con  $\lambda$  una constante no nula. Estos son, precisamente, los campos de Beltrami estudiados en el capítulo anterior. Nótese que en este caso las líneas de vorticidad y las líneas de corriente coinciden.

Las soluciones estacionarias en  $\mathbb{R}^3$  que se pueden construir usando estas técnicas [EPS15b] decaen en infinito como  $1/|x|$ , siendo este el óptimo para campos de Beltrami pero no suficientemente rápido para que el campo esté en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Por el contrario, los campos de Beltrami en una 3-variedad riemanniana cerrada son soluciones estacionarias de la ecuación de Euler que sí tienen energía finita (es decir, están en el espacio de energía  $L^2(\mathbb{M})$ ). Es gracias a la teoría de localización inversa que Enciso y Peralta-Salas han sido capaz de establecer la existencia de estructuras de vorticidad (líneas y tubos) anudadas y enlazadas a placer en campos de Beltrami sobre ciertas variedades compactas con una métrica riemanniana fija.

3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados

Más concretamente, el teorema principal de [EPSdL17] afirma lo siguiente.

**Teorema 3.1.** *Teorema de realización para campos de Beltrami en  $S^3$  y  $\mathbb{T}^3$*

*Sea  $S$  una unión finita de curvas cerradas y tubos, disjuntos dos a dos pero posiblemente anudados y enlazados, contenidos en  $S^3$  o  $\mathbb{T}^3$ . En el caso del toro, asumimos además que  $S$  esté contenido en un subconjunto contráctil de  $\mathbb{T}^3$ . Entonces, para cada entero impar  $\lambda$  suficientemente grande, existe un campo de Beltrami  $u$  satisfaciendo la ecuación  $\text{curl } u = \lambda u$  y un difeomorfismo  $\Phi$  de  $S^3$  o  $\mathbb{T}^3$  de forma que  $\Phi(S)$  es una unión de líneas de vorticidad y tubos de vorticidad de  $u$ . Además, este conjunto es estructuralmente estable.*

Recordemos que con «estructuralmente estable» nos referimos a la propiedad de que cualquier campo vectorial en el toro o en la esfera que sea suficientemente cercano a  $u$  en norma  $C^4$  y que preserve cierta medida de volumen tendrá también esta colección de trayectorias periódicas y de toros invariantes (salvo, posiblemente, componer con un difeomorfismo).

Como ya comentamos en el capítulo anterior, un campo de Beltrami  $u$  en  $\mathbb{M}^3$  cumple la ecuación

$$\text{curl } u = \lambda u, \quad (3.7)$$

para una constante no nula  $\lambda$  que sabemos la forma que adopta en cada caso:

- Si  $\mathbb{M}^3 = S^3$ ,  $\lambda$  es un entero con valor absoluto mayor o igual a 2.
- Si  $\mathbb{M}^3 = \mathbb{T}^3$ ,  $\lambda = \pm|k|$  para algún  $k \in \mathbb{Z}^3$ .

A continuación veamos, a grandes rasgos, cómo proceder para demostrar este resultado.

*Demostración.* Comenzamos tomando  $\Phi'$ , un difeomorfismo de  $\mathbb{M}^3$  que lleva el conjunto  $S$  dentro de la bola  $\mathcal{B}_{1/2}$  y la bola  $\mathcal{B}_{1/2}$  dentro de sí misma. En el caso de la esfera, la existencia de un tal difeomorfismo es trivial pero en el caso del toro necesitamos la hipótesis extra hecha sobre la contractibilidad de  $S$ . Entonces podemos definir un conjunto  $S'$  con una cantidad finita de curvas cerradas y tubos en la esfera  $\mathbb{B}_{1/2}$  como

$$S' := (\Psi \circ \Phi')(S), \quad (3.8)$$

donde  $\Psi$  es la función coordenada de una carta de coordenadas geodésicas normales como la utilizada en la sección 2.1,  $\Psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{B}$ , centrada en un punto arbitrario pero fijo  $p_0 \in \mathbb{M}^3$ . De esta forma  $\Psi_* u$  es simplemente la expresión del campo de Beltrami  $u$  en coordenadas locales normales.

Como cabría esperar, las dos herramientas claves en la demostración son el teorema 2.5 y la técnica general para enfrentar problemas de realización en el euclídeo ideada por Enciso y Peralta-Salas. Concretamente, el siguiente lema es consecuencia del teorema principal de [EPS15b].

**Lema 3.1.** *Existe un campo de Beltrami  $v$  en  $\mathbb{R}^3$  cumpliendo la ecuación  $\text{curl } v = v$  y un difeomorfismo  $\Phi_0$  de  $\mathbb{R}^3$  que preserva la orientación y que coincide con la identidad en  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_{1/2}$ , de forma que  $\Phi_0(S')$  es una unión de líneas de vorticidad y tubos de vorticidad de  $v$ . Además, este conjunto es estructuralmente estable.*

Para concluir la demostración combinaremos este lema con el teorema 2.5. El teorema 2.5 garantiza que, para todo entero impar suficientemente grande  $\lambda$ , el campo de Beltrami  $v$  construido en el lema 3.1 se puede aproximar en el sentido de que

$$\left| \Psi_* u \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right) - v \right|_{C^m(\mathcal{B})} < \epsilon, \quad (3.9)$$

por un campo de Beltrami  $u$  definido en  $\mathbb{M}^3$ . Entonces no es difícil comprobar que la estabilidad estructural del conjunto  $\Phi_0(S')$  implica la existencia de un difeomorfismo  $\Phi_1$  de  $\mathbb{R}^3$ , que coincide con la identidad en el complemento de  $\mathbb{B}_{1/2}$  y de forma que  $\Phi_1(S') \subset \mathbb{B}_{1/2}$  es un conjunto de líneas de vorticidad cerradas y tubos de vorticidad estructuralmente estables del campo reescalado

$$\Psi_* u \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right). \quad (3.10)$$

De hecho, en el caso de las líneas de vorticidad cerradas, se sigue de forma inmediata de la propiedad de elipticidad de las trayectorias [MZ05, Sección 2.1] si tomamos  $m \geq 1$  en 3.1. Para los tubos de vorticidad es necesario usar el hecho de que los campos de Beltrami son libres de divergencia en  $\mathbb{M}^3$ , lo que asegura que el campo  $\Psi_* u \left( \frac{\cdot}{\lambda} \right)$  preserva una cierta 3-forma de volumen en  $\mathbb{M}^3$ . Sin entrar en detalles (que se pueden consultar en [EPS15b, Sección 7.4]), podemos afirmar que, tomando  $m \geq 4$ , podemos aplicar un teorema de tipo K.A.M. para campos que preserven el volumen en  $\mathbb{R}^3$  y deducir la existencia de dicho difeomorfismo  $\Phi_1$ .

Por tanto, podemos definir el difeomorfismo de  $\mathbb{M}^3$

$$\Phi(x) := \begin{cases} \Phi'(x) & \text{if } x \notin \Phi'^{-1}(\mathcal{B}) \\ (\Psi^{-1} \circ \tilde{\Theta}_{1/\lambda} \circ \Phi_1 \circ \Psi \circ \Phi')(x) & \text{if } x \in \Phi'^{-1}(\mathcal{B}), \end{cases} \quad (3.11)$$

donde  $\tilde{\Theta}_{1/\lambda}$  es un difeomorfismo suave de  $\mathbb{R}^3$  que coincide con el reescalado  $\Theta_{1/\lambda}(x) := \frac{x}{\lambda}$  en la bola  $\mathbb{B}_{1/2}$  y es la identidad en el complemento de  $\mathbb{B}_{3/4}$ . Esto asegura que  $\Phi$  es un difeomorfismo diferenciable de  $\mathbb{M}^3$  de forma que el conjunto  $\Phi(S)$  es una unión de curvas cerradas de vorticidad y tubos de vorticidad del campo de Beltrami  $u$ , estructuralmente estables. Por tanto, hemos concluido la prueba del teorema.  $\square$

Algunos comentarios pertinentes son los siguientes:

**Observación 3.1. Conocemos el difeomorfismo  $\Phi$**

La demostración del teorema proporciona un entendimiento bastante completo del comportamiento del difeomorfismo  $\Phi$ . Como hemos visto, el efecto de  $\Phi$  es el de reescalar uniformemente un subconjunto contráctil de la variedad que contenga a  $S$  hasta que tenga diámetro del orden de  $1/|\lambda|$ . Nótese también que no podemos garantizar que  $\Phi(S)$  contenga todos los tubos de vorticidad y líneas de vorticidad del campo de Beltrami.

**Observación 3.2. Si solo tenemos curvas de vorticidad, es sensiblemente más sencillo**

Si  $S$  contiene únicamente curvas, la condición de estabilidad estructural que necesitamos en mucho menos restrictiva: podemos cambiar la norma  $C^4$  por norma  $C^1$ .

**Observación 3.3. Estos campos tiene una helicidad muy elevada**

La helicidad de la vorticidad, i.e., la cantidad

$$\mathfrak{H}(\text{curl } u) := \int_{\mathbb{M}^3} u \cdot \text{curl } u, \quad (3.12)$$

es, en estos casos, proporcional a su valor propio  $\lambda$ ; por lo que el campo de Beltrami construido en el teorema 3.1 tiene una helicidad muy alta. Más concretamente, la cantidad invariante

$$\frac{\mathfrak{H}(\text{curl } u)}{\|u\|_{L^2(\mathbb{M})}^2}, \quad (3.13)$$

### 3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados

que para campos de Beltrami vale exactamente  $\lambda$ , se vuelve arbitrariamente grande. Esto es consistente con la interpretación debida a Moffat [Mof14] de la helicidad como una medida del grado de anudamiento de las líneas de vorticidad en el fluido.

**Observación 3.4. ¿Por qué buscamos estos torbellinos en variedades compactas?**

Tomando  $\mathbb{M}^3$  como  $\mathbb{S}^3$  o  $\mathbb{T}^3$ , el teorema 3.1 prueba una conjetura de Arnold [Arn65] que afirma que deben existir campos de Beltrami con líneas de vorticidad topológicamente complicadas. Pero el interés por abordar problemas de realización para fluidos en el caso compacto va más allá de lo puramente técnico: un fluido en el 3–toro o la 3–esfera describe mucho mejor el comportamiento de los fluidos reales que un fluido en el espacio euclídeo. Esto se debe a que los fluidos reales tienen una cantidad finita de energía (i.e., tienen una norma  $L^2$  acotada) y este es también el caso de los fluidos en espacios compactos (no así aquellos de infinita extensión).

Otras propiedades se siguen inmediatamente de aquellas comentadas en la sección 2.2.2.

**Observación 3.5. Existen muchos campos de Beltrami con líneas de vorticidad cerradas y tubos de vorticidad anudados como queremos**

Ya que podemos construir un tal campo para cualquier  $\lambda$  entero impar suficientemente grande.

**Observación 3.6. Para la esfera, la hipótesis sobre la paridad de  $\lambda$  no es necesaria**

Puesto que solo es utilizada en el teorema de localización inversa (y ya comentamos este caso en la sección 2.2.2.)

**Observación 3.7. En nuestros campos de Beltrami, los nudos y enlaces aparecen por parejas**

Esto se sigue del siguiente hecho conocido: todo campo de Beltrami  $u$  en  $\mathbb{S}^3$  con valor propio  $\lambda + 2$  se puede escribir como

$$u = F_1 h_1 + F_2 h_2 + F_3 h_3, \quad (3.14)$$

donde los  $F_i$  son esféricos armónicos de energía  $\lambda \cdot (\lambda + 2)$  y los  $h_i$  forman la base Hopf introducida en la prueba de 2.5. Por la paridad de los esféricos armónicos

$$F_i(-p) = (-1)^\lambda F_i(p), \quad (3.15)$$

y por ser los campos de Hopf impares, concluimos que todo campo de Beltrami en la esfera con valor propio  $\lambda$  tiene paridad  $(-1)^{\lambda+1}$ . Por tanto es o par o impar y, en cualquier caso, el hecho de que  $\Phi(S)$  sea un conjunto de líneas y tubos de vorticidad del campo de Beltrami  $u$  implica que  $-\Phi(S)$  también lo es. Claramente,  $-\Phi(S)$  y  $\Phi(S)$  presentan el mismo tipo topológico.

**Observación 3.8. El resultado es cierto sobre espacio lenticulares**

Recordemos que un espacio lenticular tridimensional  $L(p, q)$  es un cociente de  $\mathbb{S}^3$  por una  $\mathbb{Z}/p$ –acción. Más precisamente, si tomamos  $p$  y  $q$  enteros coprimos y consideramos  $\mathbb{S}^3$  como la esfera unidad en  $\mathbb{C}^2$ , entonces la  $\mathbb{Z}/p$ –acción en  $\mathbb{S}^3$  generada por el homomorfismo

$$(z_1, z_2) \mapsto \left( e^{2\pi i/p} \cdot z_1, e^{2\pi i q/p} \cdot z_2 \right) \quad (3.16)$$

es libre. El espacio cociente resultante se conoce como espacio lenticular  $L(p, q)$ . El teorema 2.6 permite, de forma natural, probar el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.** *Sea  $S$  una unión finita de curvas cerradas y tubos, disjuntos dos a dos pero posiblemente anudados o enlazados, contenida en un subconjunto contráctil del espacio lenticular tridimensional*

### 3.4. Una conjetura de Berry sobre conjuntos nodales anudados para operadores de Schrödinger

$L(p, q)$ . Entonces, para cada entero impar  $\lambda$  suficientemente grande existe un campo de Beltrami  $u$  satisfaciendo la ecuación  $\text{curl } u = \lambda u$  y un difeomorfismo  $\Phi$  de  $L(p, q)$  de forma que  $\Phi(S)$  es una unión de líneas de vorticidad y tubos de vorticidad de  $u$  que, además, es estructuralmente estable.

### 3.4. Una conjetura de Berry sobre conjuntos nodales anudados para operadores de Schrödinger

Las dislocaciones fueron introducidas en mecánica cuántica por Berry y Nye en 1974 por analogía con las dislocaciones clásicas de frente de onda estudiadas en óptica, y han encontrado numerosas aplicaciones en áreas muy diversas de la ciencia incluyendo química, ondas en agua y la teoría de cristales líquidos [NWoo]. Si uno escribe la ecuación de onda de la mecánica cuántica en términos de su amplitud y fase como  $\psi = \rho e^{i\chi}$ , recordemos que una dislocación es una componente conexa del conjunto de ceros  $\{\rho = 0\}$  tal que la fase varía por un múltiplo de  $2\pi$  en un circuito cerrado alrededor de este. Visto de otro modo, son los puntos donde coinciden un cero de  $\rho$  y una singularidad de  $\chi$ .

Motivado por problemas de teoría de dislocaciones, en [Ber01] Berry construyó autofunciones del hamiltoniano de Coulomb en  $\mathbb{R}^3$  cuyo conjunto nodal contiene un nudo de trébol o un enlace de Hopf como unión de componentes conexas. Entonces conjeturó acerca de la existencia de autofunciones de un sistema cuántico cuyo conjunto nodal tuviera componentes con enlaces de mayor orden. Una motivación física para estudiar el conjunto nodal de un sistema cuántico es que se trata del lugar de interferencia destructiva de la función de ondas. Además de estar relacionado con las singularidades de la fase (dislocaciones), lo está con los vórtices en el campo de corriente. La existencia de estructuras anudadas, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado, han atraído recientemente la atención, de forma especial en óptica y mecánica de fluidos. En particular, Berry conjeturó en el mismo artículo sobre la existencia de autofunciones complejo valuadas del oscilador armónico en  $\mathbb{R}^3$  y del potencial de Coulomb en  $\mathbb{R}^3$  cuyo conjunto nodal tuviera componentes anudadas. Además, observó que debería ser posible construir esos conjuntos de forma que sean estructuralmente estables, en el sentido de que toda perturbación suficientemente pequeña de la correspondiente autofunción (en norma  $C^k$  con  $k \geq 1$ ) aún tenga componentes conexas en su conjunto nodal que sean difeomorfas al nudo o enlace considerado.

**Definición 3.3.** El conjunto nodal de  $\psi$  es estructuralmente estable si toda función  $\phi$  tal que  $\|\phi - \psi\|_{C^k(\mathbb{R}^3)} < \epsilon$ , para algún  $k \geq 1$  fijo, tiene un conjunto nodal que es una pequeña deformación (es decir, la imagen por un difeomorfismo próximo a la identidad) del conjunto nodal de  $\psi$ .

Esta pregunta ha sido recientemente respondida de forma afirmativa por A. Enciso, D. Hartley y D. Peralta-Salas: en [EHPS18b] cuando el sistema cuántico considerado es el oscilador armónico y en [EHPS18a] cuando, volviendo al contexto original de Berry, tomamos el potencial de Coulomb. Concretamente, en ellos demuestran que todo enlace finito se puede realizar como una colección de componentes conexas del conjunto nodal de alguna autofunción (del potencial considerado en cada caso). A pesar de las evidentes similitudes entre ambos resultados, las particulares de cada potencial hacen que las demostraciones difieran en varios puntos de forma no trivial.

Como sucedía en la sección anterior, la demostración de estos hechos se basa principalmente en dos herramientas ya vistas: un teorema de realización local para la ecuación de

3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados

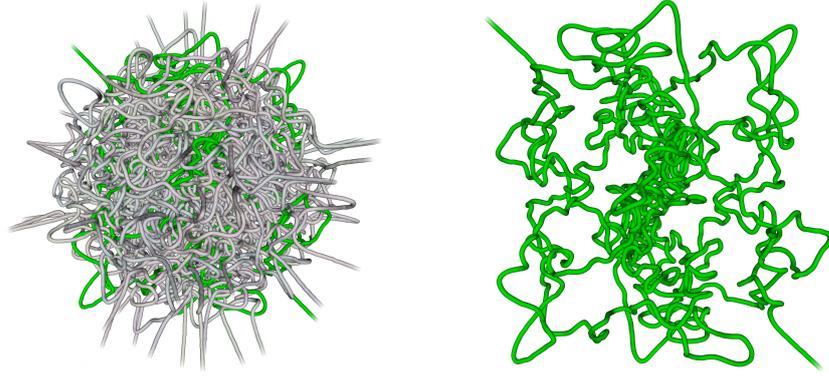


Figura 3.3.: Los conjuntos nodales de una autofunción del oscilador armónico tridimensional para  $k = 21$  y una de sus componente conexas anudadas. Imagen por cortesía de Mark Dennis.

Helmholtz y un teorema de localización inversa, como los vistos en el capítulo anterior. Notemos que, como estamos tomando autofunciones complejo-valuadas  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ , su conjunto nodal

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : \psi(x) = 0\} \quad (3.17)$$

es típicamente una unión de curvas (no necesariamente compacta) en  $\mathbb{R}^3$ . Los teoremas principales de esta sección son:

**Teorema 3.3.** *Teorema de realización para el oscilador armónico*

Sea  $L$  cualquier enlace finito en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces existen una constante positiva  $E = E(L)$  tal que para cualquier autovalor del oscilador armónico  $\lambda$  cumpliendo  $\lambda > E \geq 0$ , existen una función propia  $\psi_\lambda$  (correspondiente a dicho autovalor) y un difeomorfismo  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de forma que  $\Phi(L)$  es una unión de componentes conexas del conjunto nodal de  $\psi_\lambda$ . Además, el enlace  $\Phi(L)$  es estructuralmente estable para la función  $\psi_\lambda$ .

Y, similarmente,

**Teorema 3.4.** *Teorema de realización para el potencial de Coulomb*

Sea  $L$  cualquier enlace finito en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces existen una constante positiva  $E = E(L)$  tal que para cualquier autovalor del potencial de Coulomb  $\lambda$  cumpliendo  $0 > \lambda > -E \geq -1$ , una función propia  $\psi_\lambda$  (correspondiente a dicho autovalor) y un difeomorfismo  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de forma que  $\Phi(L)$  es una unión de componentes conexas del conjunto nodal de  $\psi_\lambda$ . Además, el enlace  $\Phi(L)$  es estructuralmente estable para la función  $\psi_\lambda$ .

Se puede observar una de las principales diferencias entre ambos resultados: mientras para el oscilador armónico tenemos estados con energía arbitrariamente alta, los correspondientes valores para el potencial de Coulomb están acotados (y son negativos). Así, mientras la primera constante  $E$  es habitualmente un valor positivo muy grande, en el segundo caso se trata de un número cercano a cero.

Esto trae importantes consecuencias sobre el comportamiento del difeomorfismo  $\Phi$ . *Grosso modo*, en el caso del oscilador armónico, el difeomorfismo  $\Phi$  se encarga de «encoger»  $L$  hasta que quede dentro de una bola de radio  $\lambda^{-1/2}$ . Como el autovalor  $\lambda$  de  $\psi$  es grande, solo podremos realizar enlaces si están contenidos en bolas de radio muy pequeño. Por el

3.4. Una conjetura de Berry sobre conjuntos nodales anudados para operadores de Schrödinger

contrario, en el caso del potencial de Coulomb, la acotación de los autovalores nos permite realizar cualquier enlace con diámetro de orden 1.

Veamos un esquema de cómo afrontar la demostración de estos teoremas:

- Caso del oscilador armónico. Sea  $B$  la bola euclídea centrada en el origen que contiene al enlace (existente por ser acotado). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $L$  está contenido en el octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ , esto es,

$$L \subseteq B \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}. \quad (3.18)$$

A continuación construimos una estructura alrededor de  $L$  que nos permite aplicar el teorema de Cauchy-Kowalewski para encontrar una función compleja  $\hat{\phi}$  definida en un entorno tubular de  $L$ , digamos  $U$ , que cumple la ecuación  $\Delta \hat{\phi} + \hat{\phi} = 0$  en dicho entorno tubular de  $L$ . Los detalles de este argumento los posponemos hasta el capítulo 4, donde será necesario de nuevo en la prueba de un teorema de realización en  $\mathbb{H} := \mathcal{H}^3(\kappa)$ , el espacio hiperbólico. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $U$  está contenido también en  $B \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$ , como el enlace  $L$ . Además, achicando  $U$  podemos suponer que el conjunto nodal de  $\hat{\phi}$  es precisamente  $L$ ,  $\hat{\phi}^{-1}(0) = L$ .

Recordemos que un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  es simétrico si es invariante bajo la inversión  $x \mapsto -x$ , y notemos por  $-U$  a la imagen del conjunto  $U$  por esta aplicación. Como  $U$  está contenido en el octante positivo,  $U \cap (-U) = \emptyset$ . Definimos la función par  $\phi$  en el conjunto simétrico  $U' = U \cup (-U)$  como

$$\phi(x) := \begin{cases} \hat{\phi}(x) & \text{si } x \in U \\ \hat{\phi}(-x) & \text{si } x \in -U \end{cases} \quad (3.19)$$

Sea  $S$  un subconjunto simétrico, acotado y cerrado de  $U'$  cuyo interior contiene al enlace  $L$ . Por ser  $U$  un entorno tubular, es claro que podemos tomar  $S$  de forma que su complemento sea conexo, por lo tanto estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.7 y aproximar  $\phi$  por una autofunción  $\psi$  del oscilador armónico asociada a un autovalor suficientemente grande.

Por otro lado, debemos comentar que al obtener la función  $\hat{\phi}$  imponemos condiciones para que la intersección de los conjuntos de ceros de su parte real e imaginaria sean transversos sobre  $L$ , esto es,

$$\text{rank}(\nabla \mathcal{R}(\hat{\phi}(x)), \nabla \mathcal{I}(\hat{\phi}(x))) = 2, \quad (3.20)$$

para todo  $x \in L$ . Esta condición de transversalidad junto al teorema de isotopía de Thom [AR67, Teorema 20.2] y la estimación del teorema 2.7, permiten deducir que existe un difeomorfismo  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $\Phi(L)$  sea una unión de componentes del conjunto de ceros  $\psi^{-1}(0)$ . Una vez más, omitimos los detalles de esta construcción.

- Caso del potencial de Coulomb. Comenzamos tomando un difeomorfismo  $\Phi_0$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que el enlace transformado  $L_0 := \Phi_0(L)$  esté contenido en  $\mathbb{B}_R \setminus \{0\}$  para algún  $R < R_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ . Como en el caso anterior, podemos proceder de forma que obtengamos un problema de Cauchy resoluble por medio del teorema de Cauchy-Kowalewski. Sea  $\phi$  la solución (compleja) que nos proporciona este teorema, que suponemos definida en un entorno  $U$  de  $L_0$ . Sin pérdida de generalidad, tomamos  $U$  suficientemente pequeño para que se cumpla  $U \subset \mathbb{B}_R \setminus \{0\}$ . Para todo  $K \subset U$  compacto conteniendo a  $L_0$  y cuyo complemento  $\mathbb{B}_R \setminus K$  sea conexo, podemos aplicar el teorema 2.8 y obtener una autofunción aproximante.

Como sucedía en el caso del oscilador armónico, la solución local que hemos construido cumple una condición de transversalidad: la intersección de los conjuntos de ceros de la

3. Algunas aplicaciones de los teoremas de localización inversa estudiados

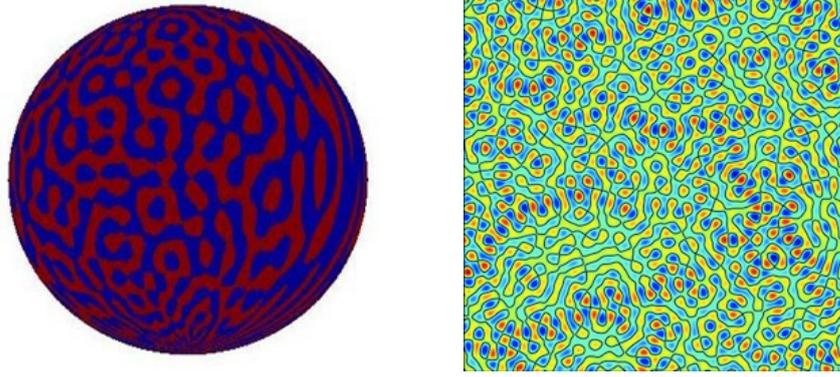


Figura 3.4.: Dominios nodales de autofunciones de alta energía del laplaciano en la esfera (a la izquierda) y en el toro (a la derecha). Imágenes extraídas de [dL18], cortesía de Francisco Javier Torres de Lizaur

parte real e imaginaria de  $\phi$  en  $L_0$  es transversa. Esta propiedad junto con el teorema de isotropía de Thom nos permite, de nuevo, deducir la estabilidad estructural de  $L_0$  y, con ello, encontrar el difeomorfismo  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^3$  nos da el resultado. La última implicación no es nada trivial pero de nuevo remitimos al lector interesado en los detalles al artículo ya mencionado.

### 3.5. Autofunciones del Laplaciano en el toro y la esfera con conjuntos nodales de topología complicada

Los teoremas de realización que se pueden probar con estas técnicas no se restringen solo al caso de nudos y enlaces; subvariedades con dimensión mayor que uno también pueden ser objeto de esta clase de problema. En [EPSdL21] Enciso, Peralta-Salas y Torres de Lizaur han establecido la existencia de autofunciones con alta energía del Laplaciano en la esfera  $S^d$  o el toro plano  $\mathbb{T}^d$  (donde exigimos  $d \geq 3$ ) con conjuntos nodales difeomorfos a una subvariedad dada (no necesariamente un enlace). Más concretamente, muestran que para una sucesión de autovalores suficientemente grandes, existen  $m$  autofunciones del Laplaciano en  $S^d$  o  $\mathbb{T}^d$  con un conjunto nodal difeomorfo a una subvariedad  $\Sigma$  de codimensión  $m$  prescrita. Para esta construcción necesitamos suponer que el fibrado normal de  $\Sigma$  es trivial. Esto significa que un pequeño entorno tubular de la subvariedad  $\Sigma$  debe ser difeomorfo a  $\Sigma \times \mathbb{R}^m$ .

**Teorema 3.5.** *Sea  $\Sigma$  una unión finita de subvariedades compactas, disjuntas pero posiblemente anuladas o enlazadas, con codimensión  $m \geq 1$  de  $S^d$  o  $\mathbb{T}^d$ ,  $d \geq 3$ , y con fibrado normal trivial. En el caso del toro, además asumimos que  $\Sigma$  está contenida en un subconjunto contráctil. Si  $m = 1$ , también suponemos que  $\Sigma$  es conexa. Entonces, para cada entero impar  $N$  suficientemente grande hay  $m$  autofunciones  $\psi_1, \dots, \psi_m$  del Laplaciano con autovalor  $\lambda = N(N + d - 2)$  en el caso de la esfera o  $\lambda = N^2$  en el caso del toro, y un difeomorfismo  $\Phi$  de forma que  $\Phi(\Sigma)$  sea la unión de componentes conexas del conjunto nodal  $\psi_1^{-1}(0) \cap \dots \cap \psi_m^{-1}(0)$ . Además,  $\Phi(\Sigma)$  es estructuralmente estable.*

Como es conocido [Mas59] que toda subvariedad orientada de codimensión uno o dos en  $S^d$  o  $\mathbb{T}^d$  tiene fibrado normal trivial, los dos siguientes corolarios son inmediatos.

**Corolario 3.1.** *Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie en  $S^d$  o  $\mathbb{T}^d$ ,  $d \geq 3$ , compacta, orientada y conexa. En el caso del toro, además asumimos que  $\Sigma$  está contenida en un subconjunto contráctil. Entonces, para*

### 3.5. Autofunciones del Laplaciano en el toro y la esfera con conjuntos nodales de topología complicada

cada entero impar  $N$  suficientemente grande existe una autofunción  $\psi$  del Laplaciano con autovalor  $\lambda = N(N + d - 2)$  en el caso de la esfera o  $\lambda = N^2$  en el caso del toro, y un difeomorfismo  $\Phi$  de forma que  $\Phi(\Sigma)$  es una componente conexa del conjunto nodal conjunto  $\psi^{-1}(0)$ . Además,  $\Phi(\Sigma)$  es estructuralmente estable.

**Corolario 3.2.** *Sea  $\Sigma$  una unión finita de subvariedades compactas, disjuntas pero posiblemente anuladas o enlazadas, con codimensión  $m = 2$  de  $\mathbb{S}^d$  o  $\mathbb{T}^d$ ,  $d \geq 3$ . En el caso del toro, además asumimos que  $\Sigma$  está contenida en un subconjunto contráctil. Entonces, para cada entero impar  $N$  suficientemente grande existe una autofunción  $\psi$  complejo-valuada del Laplaciano con autovalor  $\lambda = N(N + d - 2)$  en el caso de la esfera o  $\lambda = N^2$  en el caso del toro, y un difeomorfismo  $\Phi$  de forma que  $\Phi(\Sigma)$  es una componente conexa del conjunto nodal conjunto  $\psi^{-1}(0)$ . Además,  $\Phi(\Sigma)$  es estructuralmente estable.*

La prueba del más general de estos teoremas es tal y como esperaríamos (en vista de los teoremas estudiados en este capítulo): tras tomar  $\Sigma'$  la representación en coordenadas normales de un reescalado adecuado de  $\Sigma$ , nos apoyamos en un resultado de realización para la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^m$  y el teorema de localización inversa 2.1 o 2.3, respectivamente. Más concretamente, se demostró en [EPS13a, Teorema 1.3] si  $m \geq 2$  y en [EPS13a, Observación A.2] si  $m = 1$ , que existe una onda monocromática  $\mathbb{R}^m$ -valuada  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ , cumpliendo  $\Delta\phi + \phi = 0$  en  $\mathbb{R}^d$ , y un difeomorfismo  $\Phi_1$  (cercano a la identidad) de forma que  $\Phi_1(\Sigma')$  es una unión de componentes conexas del conjunto nodal  $\phi_1^{-1}(0) \cap \dots \cap \phi_m^{-1}(0)$ . Las hipótesis adicionales son meras «correcciones» técnicas para asegurar la estabilidad estructural; además, la construcción en [EPS13a] también asegura que se cumple la condición de regularidad  $\text{rank}(\nabla\phi_1, \dots, \nabla\phi_m) = m$  en cada punto de  $\Phi_1(\Sigma')$ , de forma que es un conjunto nodal estructuralmente estable de  $\phi$  por el teorema de isotopía de Thoms [AR67]. De esta forma, emulando los pasos ya comentados en secciones previas, probamos el resultado.



## 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

En el capítulo que comienza recogeremos algunos resultados muy recientes que se deben a A. Enciso, D. Peralta-Salas y la autora y que emulan a aquellos comentados en las secciones 2.3 y 3.4 situados, en esta ocasión, en el contexto del espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  con curvatura  $-\kappa^2$  muy pequeña. Concretamente, demostraremos teoremas de localización inversa para la ecuación de Schrödinger en este espacio de curvatura constante negativa con los potenciales de Coulomb y del oscilador armónico; a continuación aplicaremos estos resultados a sendos problemas de realización. La teoría recogida en este capítulo se encuentra en preparación para su posible publicación.

### 4.1. El espacio hiperbólico $\mathcal{H}^n(\kappa)$

El átomo de hidrógeno en la geometría esférica de  $\mathbb{S}^3$  fue estudiado por primera vez por Schrödinger [Sch40] en 1940 y analizado por Infeld [Inf41] y Stevenson [Ste41]; algunos años después, Infeld y Schild [IS45] obtuvieron el espectro de este sistema en un «universo abierto de curvatura constante negativa» (el espacio hiperbólico  $\mathbb{H} := \mathcal{H}^3(\kappa)$ ). Por otro lado, el oscilador en la esfera o en un espacio hiperbólico se puede ver como una generalización del conocido oscilador clásico unidimensional no lineal de Mathews y Lakshmanan [ML74]. Recientemente, las características de los dos potenciales centrales fundamentales (el problema del oscilador y el de Kepler, también llamado de Kepler-Coulomb) en espacios curvados han atraído gran cantidad de interés. Aunque principalmente utilizados en espacios euclídeos, estos sistemas también tienen una longeva historia en espacios curvos, especialmente aquellos de curvatura constante como el que vamos a considerar en este capítulo.

En lo que sigue nos vamos a centrar en una de las variedades riemannianas clásicas con curvatura seccional constante (negativa, en este caso): el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  con curvatura igual a  $-\kappa^2$  para  $\kappa > 0$ . Consideramos un sistema no lineal de dimensión  $d$  descrito por un hamiltoniano del tipo

$$H = \sum_{i=1}^d p_i^2 + \kappa^2 \left( \sum_{i=1}^d x_i p_i \right)^2 + V(r) = (1 + \kappa^2 r^2) \sum_{i=1}^d p_i^2 - \kappa^2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} J_{ij}^2 + V(r), \quad (4.1)$$

donde estamos tomando las unidades de forma que  $2m = 1$ ,  $J_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$  denota una componente del momento angular y  $r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$  variando entre  $(0, +\infty)$ . Para el potencial  $V(r)$  elegiremos a veces el potencial de Kepler-Coulomb en el espacio hiperbólico (en ocasiones abreviado como KCH),

$$V_K(r) = c\sqrt{\kappa^2 + r^{-2}}, \quad (4.2)$$

y en otras ocasiones el oscilador armónico en el espacio hiperbólico (abreviado como OAH),

$$V_0(r) = \frac{c(1 + \kappa^2)r^2}{1 + \kappa^2 r^2}. \quad (4.3)$$

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

El Hamiltoniano resultante se puede interpretar como el correspondiente a un oscilador armónico o a un problema de Kepler-Coulomb en  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ .

Se sabe que las coordenadas apropiadas para el estudio de potenciales centrales son las coordenadas hiperesféricas; desde el punto de vista intrínseco la coordenada radial  $\rho$  mide la distancia a lo largo de las geodésicas que parten de un punto arbitrariamente elegido  $O$ , el origen, mientras que las coordenadas angulares miden el ángulo entre esta geodésica y una de referencia fijada que pasa por  $O$ . En lo que sigue, y para facilitar los cálculos, haremos el cambio de variable  $r = \frac{\sinh(\kappa\rho)}{\kappa}$ . La ecuación de Schrödinger correspondiente es separable en estas coordenadas y da lugar a la ecuación radial

$$\left( -(1 + \kappa^2 r^2) \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(d-1 + d\kappa^2 r^2)}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l(l+d-2)}{r^2} + V(r) - E \right) R(r) = 0, \quad (4.4)$$

donde  $l = 0, 1, 2, \dots$

Tanto por su facilidad como por los resultado que probaremos a continuación nos interesará especialmente el caso de dimensión  $d = 3$ , en el que la métrica de  $\mathcal{H}^3(\kappa) = \mathbb{H}$  se puede escribir en coordenadas polares geodésicas  $(\rho, \theta, \phi)$  como

$$g_{\mathbb{H}} = d\rho^2 + \frac{\sinh^2(\kappa\rho)}{\kappa^2} g_{\mathbb{S}^2}, \quad (4.5)$$

donde  $g_{\mathbb{S}^2}$  denota la métrica estándar en  $\mathbb{S}^2$ . Notemos que ahora  $\rho$  es la distancia a lo largo de una geodésica que une la partícula y el origen de nuestro espacio hiperbólico 3-dimensional. Mediante el cambio de variable  $r = \sinh(\kappa\rho)\kappa^{-1}$ , podemos rescribir la métrica en una forma alternativa que coincide con la comentada para el caso general y que utilizaremos en lo que sigue:

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{dr^2}{1 + \kappa^2 r^2} + r^2 g_{\mathbb{S}^2}. \quad (4.6)$$

Se sigue inmediatamente que

$$\Delta_g u = \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 r^2}}{r^2} \partial_r \left( r^2 \sqrt{1 + \kappa^2 r^2} \partial_r u \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2} u, \quad (4.7)$$

donde  $\Delta_{\mathbb{S}^2}$  denota el operador de Laplace-Beltrami usual en la esfera (y  $\Delta$ , el Laplaciano en  $\mathbb{R}^3$ ). Notamos entonces que la ecuación de Schrödinger  $(\Delta_g + E - V(r)) u = 0$ , adopta la forma

$$(1 + \kappa^2 r^2) \partial_{rr} u + \frac{2 + 3\kappa^2 r^2}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2} u + Eu - V(r)u = 0. \quad (4.8)$$

y reemplazando  $\Delta_{\mathbb{S}^2}$  por sus valores propios, obtenemos el caso particular de 4.4 siguiente:

$$(1 + \kappa^2 r^2) R''(r) + \frac{2 + 3\kappa^2 r^2}{r} R'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r)u + ER(r) - V(r)R(r) = 0. \quad (4.9)$$

Merece la pena mencionar que los problemas en espacios curvados se pueden ver de forma alternativa como problemas que surgen de la presencia de una masa dependiente de la posición (en inglés, *position-dependent mass* o P.D.M.) en la ecuación de Schrödinger. En términos de geometría diferencial, el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^d$  es de hecho un caso muy particular de los espacios de curvatura constante; análogamente, en términos dinámicos, los potenciales clásicos bien conocidos (el problema de Kepler, el oscilador armónico y otros sistemas

relacionados con ellos) se pueden considerar también como casos particulares de sistemas «curvos» más generales. Si la curvatura  $\kappa$  es introducida como un parámetro, entonces el problema es el análisis de ciertos potenciales en un espacio de curvatura constante  $\kappa$  con límite «plano» apropiado. Como muchas funciones diferentes dependientes de  $\kappa$  pueden tener el mismo límite cuando  $\kappa \rightarrow 0$  debemos exigir que ciertas propiedades fundamentales del sistema euclídeo continúen siendo verdaderas para el sistema «curvado». Por propiedades fundamentales nos referimos a aquellas relacionadas con separabilidad e integrabilidad. La clave es que los potenciales a considerar se pueden entender como  $\kappa$ -deformaciones del conocido sistema euclídeo y, por ende, el problema euclídeo aparece como caso particular cuando  $\kappa = 0$  en el sistema «curvado».

Esta concepción de los nuevos potenciales presentados como deformaciones de sus análogos clásicos conduce de forma natural a cuestionarse acerca de problemas de localización inversa similares a los estudiados en la sección 2.3 planteados, ahora, en este nuevo contexto. En lo que resta de capítulo enunciamos, demostramos y obtenemos algunas consecuencias de dos teoremas de localización inversa en el ambiente del espacio hiperbólico: para autofunciones de la ecuación de Schrödinger con los potenciales KCH y OAH. Los teoremas presentados en las secciones sucesivas han sido probados por Alberto Enciso, Daniel Peralta-Salas y la autora; y se encuentran en preparación para su publicación [EGRPSa].

## 4.2. Localización inversa en el caso del KCH

El siguiente teorema de localización inversa extiende al teorema 2.8 y su demostración se sirve en varias ocasiones de los resultados previos que se pueden encontrar en el artículo [EHPS18a].

### 4.2.1. Teorema principal

**Teorema 4.1.** *Consideremos un radio  $R < \sqrt{\pi}/4$  y fijemos una constante positiva real  $\epsilon$ . Supongamos que  $K$  es un subconjunto compacto de la bola  $B_R$ , que no contiene al origen y cuyo complemento  $B_R \setminus K$  es conexo. Si  $u$  satisface la ecuación*

$$\left( \Delta + \frac{2}{|x|} \right) u = 0 \quad (4.10)$$

*en un entorno  $U$  de  $K$ , entonces para todo  $n$  suficientemente grande y todo  $\kappa > 0$  suficientemente pequeño (dependiente, en particular, del valor de  $n$ ) existe una autofunción complejo-valuada  $\psi$  del problema de Kepler-Coulomb*

$$(1 + \kappa^2 r^2) \partial_{rr} \psi + \frac{2 + 3\kappa^2 r^2}{r} \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \psi + E\psi + 2\sqrt{\kappa^2 + r^{-2}} \psi = 0. \quad (4.11)$$

*en el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  asociada a una energía  $E_n^K$  tal que*

$$\| \psi - u \|_{C^1(K)} < \epsilon. \quad (4.12)$$

Antes de entrar de lleno en la demostración del teorema, recogemos algunos hechos conocidos sobre los autovalores del potencial KCH. Comenzamos tomando  $\kappa > 0$  pequeño a determinar más adelante. Se ha dedicado gran cantidad de atención a los autovalores de esta

4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

ecuación. Es conocido [Que16] que disponemos de una cantidad finita de niveles de energía dados por

$$E_n^\kappa = -\frac{1}{n^2} - \kappa^2(n^2 - 1), \quad (4.13)$$

para  $n = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$  donde  $n_{\text{máx}}$  es el mayor entero satisfaciendo la cota  $n_{\text{máx}} < \kappa^{-1/2}$ . Como  $E_n^\kappa < 0$  para todo  $n \leq n_{\text{máx}}$ , son todos ellos autovalores asociados a estados de energía acotados. El rango de valores admisibles para  $n$  viene dado por la normalizabilidad de  $R$ , la parte radial de la autofunción, con respecto a la medida  $r^2 \sqrt{1 + \kappa^2 r^2} dr$  en el intervalo de integración dado por  $(0, +\infty)$ . De esta forma, el espectro queda dividido en dos tramos:

$$\begin{aligned} \text{Autovalores} &\subset (-\infty, \kappa^2 - 2\kappa), \\ \text{Espectro continuo} &= [\kappa^2 - 2\kappa, \infty). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Usando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , las autofunciones correspondientes a la energía  $E_n^\kappa$  pueden venir dadas por

$$\begin{aligned} \psi_{nlm}^\kappa(r, \theta, \phi) &:= f_{nl}^\kappa(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \\ f_{nl}^\kappa(r) &:= A_{nl} r^l (c^\kappa(r) + \kappa r)^{1-n+l-(n\kappa)^{-1}} P_{n-l-1}^{(2l+1; -n-(n\kappa)^{-1})} \left( 2(c^\kappa(r) + \kappa r)^2 - 1 \right), \\ c^\kappa(r) &:= \sqrt{1 + \kappa^2 r^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aquí  $A_{nl}$  es un factor de normalización que tomamos de la forma

$$A_{nl} = \frac{2^{l-1}(n-l-1)!}{(n+l)!}, \quad (4.16)$$

y los índices se mueven en el conjunto

$$0 \leq l \leq n-1, \quad -l \leq m \leq l. \quad (4.17)$$

$Y_{lm}$  son los esféricos armónicos en  $\mathbb{S}^2$  y  $P_k^{(\alpha, \beta)}$  son los polinomios de Jacobi (también denominados, polinomios hipergeométricos). Nótese que la degeneración del espacio propio de cada nivel de energía  $E_n^\kappa$  es, al igual que ocurría en el caso euclídeo,  $n^2$  (puesto que  $0 \leq l \leq n-1$  y  $-l \leq m \leq l$ , de modo que tenemos  $\sum_{l=0}^{n-1} 2l+1 = n^2$  autofunciones linealmente independientes). Como ya sucedía en otras ocasiones, este será un ingrediente clave en la demostración.

*Demostración.* Trataremos de llegar al resultado buscado en diferentes etapas de aproximación. Para esto, un primer paso es utilizar un teorema de aproximación global en  $\mathbb{R}^3$  para la ecuación  $\Delta \tilde{\varphi} + 2/|x| \tilde{\varphi} = 0$ , buscando una tal  $\tilde{\varphi}$  arbitrariamente cercana a  $u$  en  $K$ . Concretamente, el resultado necesario es [EHPS18a, Teorema 3.2.].

**Teorema 4.2.** *Consideremos una bola de radio  $R < \sqrt{\pi}/4$  y fijemos un entero  $k$  y una constante real y positiva  $\epsilon$ . Supongamos que  $K$  es un subconjunto compacto de la bola  $B_R$  que no contiene al origen y cuyo complemento  $B_R \setminus K$  es conexo. Si una función  $\varphi$  satisface la ecuación*

$$\left( \Delta + \frac{2}{|x|} \right) \varphi = 0, \quad (4.18)$$

en un entorno  $U$  de  $K$ , entonces para todo  $N$  entero suficientemente grande existe una serie finita de la forma

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, \phi) := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.19)$$

donde  $c_{lm}$  son constantes y que aproxima a  $\varphi$  en el sentido de que

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^k(K)} < \epsilon. \quad (4.20)$$

Merece la pena comentar que, al igual que ocurría en el teorema 2.8, la restricción existente sobre el radio  $R < \sqrt{\pi}/4$  se debe al hecho de que el operador  $\Delta + 2/|x|$  es no negativo. Utilizando el teorema citado tomamos la función

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, \phi) := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.21)$$

que aproxime a  $u$ , con constantes complejas  $c_{lm}$  y un número natural  $N$  arbitrariamente elegido bajo la restricción  $N > N_0$  para un  $N_0$  fijo y grande. Sabemos automáticamente que

$$\|u - \tilde{\varphi}\|_{C^1(K)} < \epsilon/4. \quad (4.22)$$

Para continuar con la prueba centramos nuestra atención en el hamiltoniano de Coulomb en el caso euclídeo:

$$\left(\Delta + \frac{2}{|x|} + \lambda\right) \varphi = 0. \quad (4.23)$$

Como hacíamos en el capítulo 2, denotamos sus valores propios por  $\lambda_n$  que, como ya vimos son,  $\lambda_n := -n^{-2}$ , y recordamos que las autofunciones venían dadas por

$$\begin{aligned} \psi_{nlm} &:= f_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ f_{nl} &:= A_{nl} e^{-r/n} r^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{n}\right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $0 \leq l \leq n-1$ ,  $-l \leq m \leq l$  y  $A_{nl}$  es el mismo valor de antes. Notamos por  $L_k^\alpha$  a los polinomios de Laguerre asociados y recordamos que la degeneración de cada espacio propio con valor propio  $\lambda_n$  es  $n^2$ .

Estamos en condiciones de definir la función

$$\varphi_n := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} f_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.25)$$

donde  $n$  es un entero grande que fijaremos más adelante y  $c_{lm}$  son constantes complejas. Nótese que

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{C^1(K)} \leq \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l |c_{lm}| \left\| \left( f_{nl} - \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} \right) Y_{lm} \right\|_{C^1(K)} \quad (4.26)$$

$$\leq C \sum_{l=0}^N \left\| f_{nl} - \frac{J_{2l+1}(\sqrt{8r})}{\sqrt{8r}} \right\|_{C^1(K)}. \quad (4.27)$$

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

Sin más que aplicar el lema 2.4 del capítulo 2, podemos afirmar que existe un natural  $N' \in \mathbb{N}$  de forma que para todo  $n \geq N'$  se cumpla

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{C^1(K)} < \epsilon/4 \quad (4.28)$$

y combinando esto con la ecuación (4.22) obtenemos

$$\|\varphi_n - u\|_{C^1(K)} < \epsilon/2 \quad (4.29)$$

para todo  $n \geq N'$ . Llamamos la atención del lector sobre el hecho de que, hasta el momento, la demostración del teorema no se aleja del resultado euclídeo análogo 2.8. Para concluir la demostración tan solo necesitamos encontrar una autofunción del problema KCH que aproxime a  $\varphi_n$ . Para hacer esto, necesitamos un resultado previo.

En el siguiente lema, estudiaremos el límite las autofunciones del problema KCH cuando la curvatura  $\kappa$  se aproxima a cero. Lo que vemos es que las autofunciones del problema KCH se reducen a las funciones de onda mucho más simples del problema de Coulomb convencional. Por la simetría radial presente en ambas es suficiente con calcular la aproximación de sus partes radiales.

**Lema 4.1.** *Para cualesquiera naturales  $n$  y  $l$  y  $0 < R$  fijos,*

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \|f_{nl} - f_{nl}^\kappa\|_{C^0(0,R)} = 0. \quad (4.30)$$

*Además, esta cota se puede promocionar fácilmente a una acotación  $C^1$  y obtener*

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \|f_{nl} - f_{nl}^\kappa\|_{C^1(0,R)} = 0. \quad (4.31)$$

Posponemos su demostración para más adelante. Equipados con el lema 4.1, nos disponemos a construir una cierta función  $\psi$  que reúna los requisitos del teorema. Notemos por  $\varphi_n^\kappa$  la serie dada por

$$\varphi_n^\kappa := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} f_{nl}^\kappa(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} \psi_{nlm}^\kappa(r, \theta, \phi), \quad (4.32)$$

donde  $N, c_{lm}$  y  $n$  son como antes. Para que esta expresión tenga sentido necesitamos asegurar la existencia de las funciones  $f_{nl}^\kappa$  ya que no tenemos, en este caso, una cantidad infinita de niveles de energía. Por tanto imponemos que  $\kappa < n^{-2}$ .

Como  $K \subseteq B_R$  para cierto  $R > 0$ , podemos ver

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_n^\kappa\|_{C^1(K)} &\leq \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l |c_{lm}| \|(f_{nl} - f_{nl}^\kappa) Y_{lm}\|_{C^1(K)} \\ &\leq C \sum_{l=0}^N \|f_{nl} - f_{nl}^\kappa\|_{C^1(K)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Por el lema 4.1, podemos acotar cada sumando y, al aparecer en cantidad finita, afirmamos

$$\|\varphi_n - \varphi_n^\kappa\|_{C^1(K)} < \epsilon/2, \quad (4.34)$$

para cada  $\kappa > 0$  suficientemente pequeño. Junto con (4.29), llegamos a la estimación

$$\|u - \varphi_n^\kappa\|_{C^1(K)} < \epsilon. \quad (4.35)$$

El teorema se sigue sin más que notar que  $\psi := \varphi_n^\kappa$  es una autofunción del problema KCH con energía  $E_n^\kappa$  y con  $\kappa > 0$  tomado lo suficientemente pequeño. Esto se debe al hecho de que, como ocurría en el caso euclídeo,  $\psi_{nlm}^\kappa$  tiene el mismo valor propio que  $\psi_{n'l'm'}^\kappa$ , por la dependencia de  $n$  (y ningún otro parámetro) de los niveles de energía. Es decir, esencialmente es como si tuviéramos «un único número cuántico».  $\square$

#### 4.2.2. Demostración del lema 4.1

*Demostración.* El lema se sigue esencialmente de la relación asintótica entre polinomios de Laguerre y Jacobi (se puede leer en [Sze39, Formula 5.3.4] o en el apéndice B):

$$L_n^{(\alpha)}(r) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha; \beta)}(1 - 2\beta^{-1}r). \quad (4.36)$$

Recordemos que podemos describir los polinomios de Jacobi y Laguerre como funciones hipergeométricas y funciones hipergeométricas confluyentes (también llamadas en ocasiones funciones de Kummer), respectivamente.

$$P_n^{(\alpha; \beta)}(z) = \binom{n + \alpha}{n} {}_2F_1\left(-n, 1 + \alpha + \beta + n; \alpha + 1; \frac{1}{2}(1 - z)\right), \quad (4.37)$$

$$L_n^{(\alpha)}(z) := \binom{n + \alpha}{n} M(-n, \alpha + 1, z) = {}_1F_1(-n, \alpha + 1, z). \quad (4.38)$$

Como el primer argumento de ambas es un entero no positivo, la serie que define las funciones hipergeométricas es tan solo una suma finita (consúltese el apéndice B). Este hecho nos permite acotar el error de manera uniforme para  $0 \leq r \leq R$  a medida que  $\beta \rightarrow \infty$ .

$$\left| {}_2F_1\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) - {}_2F_1(a, c; z) \right| = \left| \frac{a(a-1)z^2}{c(c+1)2} \frac{1}{b} \right| = \mathcal{O}(b^{-1}), \quad (4.39)$$

uniformemente en  $\mathbb{B}_R$ ; de donde se sigue:

$$P_n^{(\alpha; \beta)}(1 - 2\beta^{-1}r) = L_n^{(\alpha)}(r) + \mathcal{O}(\beta^{-1}), \quad (4.40)$$

uniformemente en  $\mathbb{B}_R$ . Si tomamos  $\beta = -n - \frac{1}{n\kappa}$  y hacemos notar al lector que  $\mathcal{O}(\beta^{-1}) = \mathcal{O}(\kappa)$ , entonces estamos en condiciones de obtener

$$\begin{aligned} & P_{n-l-1}^{(2l+1; -n-(n\kappa)^{-1})} \left( 2(c^\kappa(r) + \kappa r)^2 - 1 \right) \\ &= P_{n-l-1}^{(2l+1; \beta)} \left( 1 + 4\kappa r + \mathcal{O}(\kappa^2) \right) \\ &= P_{n-l-1}^{(2l+1; \beta)} \left( 1 - \frac{4r}{n\beta} + \mathcal{O}(\kappa^2) \right) \\ &= L_{n-l-1}^{(2l+1)} \left( \frac{2r}{n} \right) + \mathcal{O}(\kappa). \end{aligned} \quad (4.41)$$

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

Esta cota siendo cierta de forma uniforme en  $0 \leq r \leq R$  para cualquier  $R > 0$  fija. Ha sido clave en el cálculo anterior, el desarrollo en serie de Taylor  $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ . Ahora nos centramos en los términos restantes. Son suficientes algunos cálculos elementales para obtener la convergencia uniforme siguiente.

$$\left(\sqrt{1+\kappa^2 r^2} + \kappa r\right)^{-n+1+l} = 1 + \mathcal{O}(\kappa) \text{ y} \quad (4.42)$$

$$\left(\sqrt{1+\kappa^2 r^2} + r\kappa\right)^{-1/n\kappa} = \left(1 + \frac{r}{n} \cdot n\kappa + \mathcal{O}(\kappa^2)\right)^{-1/n\kappa} = e^{-r/n} + \mathcal{O}(\kappa). \quad (4.43)$$

Efectivamente, de nuevo por el desarrollo en serie de Taylor  $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ , obtenemos

$$\left(\sqrt{1+\kappa^2 r^2} + \kappa r\right)^{-n+1+l} = \left(1 + \kappa r + \mathcal{O}(\kappa^2)\right)^{-n+1+l} = \frac{1}{(1 + \mathcal{O}(\kappa))^{n-l-1}} = 1 + \mathcal{O}(\kappa), \quad (4.44)$$

donde hemos utilizado el desarrollo del binomio de Newton; y por otro lado,

$$\left(\sqrt{1+\kappa^2 r^2} + r\kappa\right)^{-1/n\kappa} = \left(1 + \frac{r}{n} \cdot n\kappa + \mathcal{O}(\kappa^2)\right)^{-1/n\kappa} = e^{-r/n} + \mathcal{O}(\kappa), \quad (4.45)$$

donde nos hemos servido de la definición como límite de la función exponencial.

Llegados a este punto, (4.30) se sigue automáticamente:

$$\begin{aligned} f_{nl}^\kappa(r) &= A_{nl} r^l (c^\kappa(r) + \kappa r)^{1-n+l-(n\kappa)^{-1}} P_{n-l-1}^{(2l+1; -n-(n\kappa)^{-1})} \left(2(c^\kappa(r) - \kappa r)^2 - 1\right) \\ &= A_{nl} r^l e^{-r/n} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{n}\right) + \mathcal{O}(\kappa) = f_{nl}(r) + \mathcal{O}(\kappa), \end{aligned} \quad (4.46)$$

uniformemente en  $0 \leq r \leq R$ .

Finalmente, nos servimos de conocidas fórmulas de derivación para los polinomios protagonistas ([Sze39, Formula 4.21.7] y [ASR88, Formula 22.8.6]) y las reglas habituales de derivación para mostrar que

$$\frac{d}{dr} f_{nl}^\kappa(r) = \frac{d}{dr} f_{nl}(r) + \mathcal{O}(\kappa), \quad (4.47)$$

de nuevo, uniformemente para  $0 \leq r \leq R$ . Uniendo esto a la aproximación que ya teníamos, inmediatamente se sigue 4.31 y concluimos la prueba.  $\square$

#### 4.2.3. Un corolario de realización

Como sucedía en otros ambientes, la propiedad de localización inversa demostrada permite resolver un problema de realización, en esta ocasión, en  $\mathcal{H}^3(\kappa)$ . Para enunciar y demostrar el siguiente resultado conviene considerar el espacio  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  como una variedad difeomorfa a  $\mathbb{R}^3$  que se diferencia de esta en la métrica considerada. De este modo, al embeber  $S^1$  en  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  y en  $\mathbb{R}^3$  no obtenemos clases de nudos diferentes.

**Corolario 4.1.** *Sea  $L$  cualquier enlace finito en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces para todo  $n$  suficientemente grande y todo  $\kappa > 0$  suficientemente pequeño (dependiendo también del valor de  $n$ ) existe una autofunción*



Figura 4.1.: Cada una de las componentes  $L_{0,a}$ , junto con una de las superficies construidas  $\Sigma_a^j$  ( $j = 1$  o  $j = 2$ ) y el entorno tubular  $W_a$ . Imágenes creadas y cedidas por Irene Ramiro López.

compleja  $\psi$  del problema de Kepler-Coulomb

$$(1 + \kappa^2 r^2) \partial_{rr} \psi + \frac{2 + 3\kappa^2 r^2}{r} \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \psi + E\psi + 2\sqrt{\kappa^2 + r^{-2}} \psi = 0. \quad (4.48)$$

en el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  asociada a una energía  $E_n^\kappa$  y un difeomorfismo  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $\Phi(L)$  sea una unión de componentes conexas del conjunto de ceros de  $\psi$ .

*Demostración.* Comenzamos tomando un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Phi_0$  de forma que el enlace transformado  $L_0 := \Phi_0(L)$  esté contenido en  $\mathbb{B}_R \setminus \{0\}$  para algún  $R < \sqrt{\pi}/4$ . Por el teorema de aproximación de Whitney podemos perturbar ligeramente si es necesario y suponer, sin pérdida de generalidad, que  $L_0$  es una subvariedad analítica real de  $\mathbb{R}^3$ .

Sean  $L_{0,a}$  para  $a = 1, 2, \dots, M$ , las componentes conexas de  $L_0$  (que no son más que curvas cerradas embebidas en  $\mathbb{R}^3$ ). Construimos superficies  $\Sigma_a^1 \subset \mathbb{B}_R \setminus \{0\}$  y  $\Sigma_a^2 \subset \mathbb{B}_R \setminus \{0\}$  que se intersecan transversalmente en  $L_{0,a}$ . Esto se puede conseguir considerando una submersión analítica  $\Theta_a : W_a \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $W_a$  es un pequeño entorno tubular de  $L_{0,a}$  y  $\Theta_a^{-1}(0) = L_{0,a}$ . Recordemos que la aplicación  $\Theta_a$  se dice que es una submersión si el rango de la diferencial  $(D\Theta_a)_x$  es igual a 2 para todo  $x \in W_a$ . La existencia de una tal submersión está garantizada porque toda curva cerrada en  $\mathbb{R}^3$  tiene fibrado normal trivial. En este contexto, las superficies se pueden tomar como  $\Sigma_a^1 := \Theta_a^{-1}((-1, 1) \times \{0\})$  y  $\Sigma_a^2 := \Theta_a^{-1}(\{0\} \times (-1, 1))$ , por lo que son pequeños cilindros embebidos en  $W_a$ . En 4.2.3 se puede ver un esquema de las construcciones comentadas en este párrafo.

Para  $b = 1, 2$ , consideramos ahora el problema de Cauchy

$$\Delta \varphi_a^b + \frac{2}{|x|} \varphi_a^b = 0, \quad \varphi_a^b|_{\Sigma_a^b} = 0, \quad \partial_\nu \varphi_a^b|_{\Sigma_a^b} = 1 \quad (4.49)$$

donde  $\partial_\nu$  denota una derivada normal en la superficie relevante. Dado que las ecuaciones son analíticas en el interior de  $\mathbb{B}_R \setminus \{0\}$  podemos aplicar el teorema de Cauchy-Kowalewski [Tao06] para obtener soluciones en la clausura de pequeños entornos de cada superficie  $\Sigma_a^b \subset U_a^b$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $U_a^b \subset \mathbb{B}_R \setminus \{0\}$  y que los entornos tubulares  $U_a^1 \cap U_a^2$  de  $L_{0,a}$  son disjuntos.

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

Ahora tomamos la unión de esos entornos tubulares,

$$U := \bigcup_{a=1}^M U_a^1 \cap U_a^2, \quad (4.50)$$

y definimos una función compleja  $\phi$  en el conjunto  $U$  como

$$\phi|_{U_a^1 \cap U_a^2} := \phi_a^1 + i\phi_a^2. \quad (4.51)$$

Por construcción  $\phi$  tiene las propiedades siguientes:

1. Satisface la ecuación  $\Delta\phi + \frac{2}{|x|}\phi = 0$  en el entorno tubular  $U$  de  $L_0$ ,
2. tomando  $U$  lo suficientemente pequeño, su conjunto nodal es precisamente  $L_0$  (es decir,  $\phi^{-1}(0) = L_0$ ), y
3. la intersección de los conjuntos de ceros de la parte real e imaginaria de  $\phi$  en  $L_0$  es transversa, i.e.  $\text{rank}(\nabla\mathcal{R}(\phi)(x), \nabla\mathcal{I}(\phi)(x)) = 2$  para todo  $x \in L_0$ . Esta es una consecuencia inmediata de los datos de Cauchy utilizados para construir  $\phi_a^b$  y del hecho de que  $\Sigma_a^1$  y  $\Sigma_a^2$  tienen intersección transversa.

Si denotamos por  $K \subset U$  a un conjunto compacto conteniendo a  $L_0$  y cuyo complemento  $\mathbb{B}_R \setminus K$  sea conexo, podemos utilizar el teorema 4.1 (tomando como  $u$  la función  $\phi$  que hemos definido en  $K \subset U$ ) para obtener una autofunción del problema KCH  $\psi$  que cumpla

$$\|\psi - \phi\|_{C^1(K)} < \epsilon. \quad (4.52)$$

El punto 3. y el teorema de isotopía de Thom [AR67] aseguran que el enlace  $L_0$  es estructuralmente estable. Podemos, por tanto, escoger  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño para que exista un difeomorfismo  $\Phi_1$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $\Phi_1(L_0)$  sea una unión de componentes conexas del conjunto  $\psi^{-1}(0)$ . Además, podemos suponer que  $\Phi_1(L_0) \subset \mathbb{B}_R \setminus \{0\}$  y este es estructuralmente estable porque la proximidad en norma  $C^1(K)$  entre  $\psi$  y  $\phi$  implica que  $\text{rank}(\nabla\mathcal{R}(\psi)(x), \nabla\mathcal{I}(\psi)(x)) = 2$  para todo  $x \in \Phi_1(L_0)$ . El resultado se sigue de tomar  $\Phi := \Phi_1 \circ \Phi_0$ . Por ser  $\mathbb{R}^3$  difeomorfo a  $\mathcal{H}^3(\kappa)$ , sin más que componer con un nuevo difeomorfismo  $\Phi_2$  podemos encontrar el enlace realizado en  $\mathcal{H}^3(\kappa)$ , la clase de nudo de  $\Phi_2(\Phi(L))$  en  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  será la misma que la de  $\Phi(L)$  en  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

### 4.3. Localización inversa en el caso del OAH

Tras todo el camino recorrido no es de extrañar que exista una propiedad de localización inversa análoga en el caso del OAH. Este resultado ha sido de igual forma probado recientemente por Alberto Enciso, Daniel Peralta-Salas y la autora, y se encuentra en preparación para su posible publicación [EGRPSa]. Como hemos hecho en la sección anterior, comenzamos recordando qué forma adoptan las autofunciones de este operador, las cuales son bien conocidas [Que16]. El hamiltoniano del oscilador armónico es  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  para  $\kappa > 0$  pequeño y fijo es

$$(1 + \kappa^2 r^2)\partial_{rr}\psi + \frac{2 + 3\kappa^2 r^2}{r}\partial_r\psi + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}\psi + E\psi + \frac{(1 + \kappa^2)r^2}{1 + \kappa^2 r^2}\psi = 0. \quad (4.53)$$

De nuevo, nos encontramos con una cantidad finita de niveles de energía dados por

$$E_{nl}^\kappa = (4n + 2l + 3) - \kappa^2(2n + l + 1)^2 \quad (4.54)$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$  y  $l = 0, 1, 2, \dots, l_{\text{máx}}$  donde  $n_{\text{máx}}$  y  $l_{\text{máx}}$  son los mayores enteros satisfaciendo  $n_{\text{máx}} + \frac{l_{\text{máx}}+1}{2} < \frac{1}{2\kappa^2}$ . De nuevo, la cantidad finita de autovalores aumenta a medida que hacemos tender  $\kappa$  a cero y el rango de valores admisibles viene dado por la normalización de la parte radial de  $\psi$  con respecto a la medida  $r^2\sqrt{1+r^2\kappa^2}dr$  en  $(0, +\infty)$ . En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  las autofunciones correspondientes a la energía  $E_{nl}^\kappa$  son

$$\begin{aligned} \psi_{nlm}^\kappa(r, \theta, \phi) &:= f_{nl}^\kappa(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \\ f_{nl}^\kappa(r) &:= A_{nl} r^l (c^\kappa(r))^{-\kappa^{-2}} P_n^{(l+1/2; -\kappa^{-2}-1/2)}(1 + 2\kappa^2 r^2), \\ c^\kappa(r) &:= \sqrt{1 + \kappa^2 r^2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Aquí  $A_{nl}$  es un factor de normalización que tomamos de la forma

$$A_{nl} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{4n + 2l + 3}}{2} \right)^{-l} \frac{\Gamma(n + l + 3/2)}{n!}, \quad (4.56)$$

y, fijado  $l$ , tomamos  $-l \leq m \leq l$ .

$Y_{lm}$  son los esféricos armónicos en  $S^2$  y  $P_k^{(\alpha, \beta)}$  son los polinomios de Jacobi. La degeneración del espacio propio asociado a  $E_{nl}^\kappa$  es al menos del orden de

$$\frac{(2n + l + 1)(2n + l + 2)}{2}. \quad (4.57)$$

Para comprobar esto basta recordar que así era en el ambiente euclídeo y observar que, siguiendo la notación del capítulo 2, si  $\lambda_{nl} := 4n + 2l + 3 = \lambda_{n'l'} = 4n' + 2l' + 3$ , entonces se tiene que  $2n + l = 2n' + l'$  y, como consecuencia inmediata,  $E_{nl}^\kappa = E_{n'l'}^\kappa$ . Así, para valores grandes de  $n$  y  $l$ , los espacios propios tendrán dimensión suficientemente alta. Esto, como ya sabemos, es clave en la demostración de resultados de localización inversa como el que enunciamos a continuación.

### 4.3.1. Teorema principal

**Teorema 4.3.** Consideremos un número real positivo  $\epsilon$ ,  $U$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^3$  y  $S \subset U$  cualquier subconjunto cerrado y simétrico de  $U$  con complemento  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  conexo. Si  $u$  es par y satisface la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + u = 0 \quad (4.58)$$

en  $U$ , entonces para cualquier natural  $n$  suficientemente grande y cualquier  $\kappa > 0$  suficientemente pequeño (dependiente, en particular, del valor de  $n$ ) existe una autofunción complejo-valuada  $\psi$  del problema de OAH

$$(1 + \kappa^2 r^2) \partial_{rr} \psi + \frac{2 + 3\kappa^2 r^2}{r} \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \psi + E\psi + \frac{(1 + \kappa^2) r^2}{1 + \kappa^2 r^2} \psi = 0. \quad (4.59)$$

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

en el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  asociada a una energía  $E_{nl}^\kappa = (4n + 2l + 3) - \kappa^2(2n + l + 1)^2 = \lambda_{nl} - \kappa^2(2n + l + 1)^2$  tal que

$$\| \psi(\cdot / \sqrt{\lambda_{nl}}) - u(\cdot) \|_{C^1(S)} < \epsilon. \quad (4.60)$$

*Observación 4.1.* Comparando este enunciado con su análogo euclídeo 2.7 puede llamar la atención del lector el hecho de que el factor de reescalado no es ya la frecuencia de la autofunción. Esta peculiaridad es únicamente un detalle técnico que facilita la demostración del resultado. Como el orden de  $E_{nl}^\kappa / \lambda_{nl} = 1 + \mathcal{O}(\kappa^2)$ , estaríamos introduciendo una modificación despreciable en caso de considerar  $\psi(\cdot / \sqrt{E_{nl}^\kappa})$  en lugar de  $\psi(\cdot / \sqrt{\lambda_{nl}})$  que no afectaría a la veracidad del enunciado (si bien sí a su prueba).

*Demostración.* El primer paso en la demostración es construir una solución global  $\phi$  de la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^3$  que aproxime a la solución  $u$  dada por hipótesis en el conjunto  $S$  y que siga siendo par. Este teorema de aproximación global se podría enunciar como sigue.

**Lema 4.2.** Consideremos un abierto acotado  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  cualquiera y fijemos un entero  $k$ , una constante real y positiva  $\epsilon$  y un subconjunto  $S \subset U$  cerrado, simétrico y con complemento  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  conexo. Si una función  $\varphi$  satisface la ecuación

$$(\Delta + 1)\varphi = 0, \quad (4.61)$$

en  $U$  y es par, entonces para todo  $N$  entero suficientemente grande existe una serie finita de la forma

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, \phi) := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} j_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.62)$$

donde  $c_{lm}$  son constantes con  $c_{lm} = 0$  para todos los  $l$  impares (en particular,  $\tilde{\varphi}$  es par) y que aproxima a  $\varphi$  en el sentido de que

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \|_{C^k(S)} < \epsilon. \quad (4.63)$$

La argumentación para demostrar este lema se puede leer en detalle en [EHPS18b]. Así mismo, referenciamos al lector al capítulo 5 de esta misma memoria, donde se demuestra un resultado de aproximación global similar en el contexto del espacio  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  siguiendo los mismos pasos (claro está, con algunas diferencias técnicas). Gracias a este lema, construimos la función

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, \phi) := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} j_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.64)$$

aproximando  $u$  en  $S$ , definida en todo  $\mathbb{R}^3$  y con los coeficientes elegidos de tal forma que sea par ( $c_{lm} = 0$  para  $l$  impar). Aquí  $N$  es un número natural arbitrariamente elegido siempre que se tenga  $N > N_0$  para un  $N_0$  fijo y grande. Tomaremos esta  $\tilde{\varphi}$  de forma que

$$\| u - \tilde{\varphi} \|_{C^1(S)} < \epsilon/4. \quad (4.65)$$

A continuación, desviamos nuestra atención hacia la ecuación del oscilador armónico en el espacio euclídeo  $\kappa = 0$ . Como ya vimos en el capítulo 2, esta adopta la forma

$$-\Delta\phi + |x|^2\phi = \lambda\phi \quad (4.66)$$

en  $\mathbb{R}^3$ . Tomaremos una base formada por las funciones

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) := e^{-r^2/2} r^l L_n^{l+1/2}(r^2) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.67)$$

donde  $L_n^j$  son polinomios de Laguerre, los índices se mueven en los conjuntos

$$n \geq 0, \quad l \geq 0, \quad -l \leq m \leq l, \quad (4.68)$$

y el autovalor correspondiente a  $\psi_{nlm}$  es

$$\lambda_{nl} := 4n + 2l + 3. \quad (4.69)$$

La degeneración del correspondiente espacio propio es  $\frac{1}{2}(2n + l + 1)(2n + l + 2)$ . Tomamos  $\hat{n}$  un entero grande que será fijado más adelante y al que, en particular, le pedimos que sea mayor que  $N/2$ . Para cada entero par  $l$  menor que  $2\hat{n}$  definimos

$$\hat{n}_l := \hat{n} - l/2, \quad (4.70)$$

de forma que el autovalor del hamiltoniano euclídeo

$$\lambda_{\hat{n}} := \lambda_{\hat{n}_l} = 4\hat{n} + 3 \quad (4.71)$$

no dependa de la elección de  $l$ . El siguiente paso para alcanzar nuestro objetivo es definir la función

$$\varphi_{\hat{n}} := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \frac{c_{lm}}{A_{\hat{n}_l}} \psi_{\hat{n}_l m} = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \frac{c_{lm}}{A_{\hat{n}_l}} e^{-r^2/2} r^l L_{\hat{n}_l}^{l+1/2}(r^2) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.72)$$

para un entero  $\hat{n}$  suficientemente grande y para  $c_{nl}$  las constantes complejas de que disponíamos. Aquí, de nuevo,

$$A_{\hat{n}_l} := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\lambda_{\hat{n}_l}}}{2} \right)^{-l} \frac{\Gamma(\hat{n}_l + l + 3/2)}{\hat{n}_l!}. \quad (4.73)$$

Llamamos la atención del lector sobre el hecho de que, por construcción,  $\varphi_{\hat{n}}$  es una función complejo-valuada, diferenciable y que pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Además, es una autofunción del oscilador armónico (es decir, satisface (4.66)) con autovalor  $\lambda_{\hat{n}} = \lambda_{\hat{n}_l} = 4\hat{n} + 3$ . Para dar este paso ha sido clave la paridad de  $\tilde{\varphi}$  que nos permitía tomar  $c_{lm} = 0$  para todos los  $l$  impares (imprescindible puesto que el número  $\hat{n}_l$  solo es entero cuando  $l$  es par).

El lema 2.2 enunciado en el capítulo 2 (que se puede encontrar demostrado en [EHPS18b]) nos permite estudiar el comportamiento asintótico de las autofunciones del problema euclídeo y proporcionar la estimación

$$\left\| \varphi_{\hat{n}}(\cdot / \sqrt{\lambda_{\hat{n}}}) - \tilde{\varphi}(\cdot) \right\|_{C^1(S)} < \epsilon/4 \quad (4.74)$$

para todo  $\hat{n} \geq N'$  para un cierto  $N' \in \mathbb{N}$  suficientemente grande; y combinando esto con la

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

ecuación (4.65) obtenemos

$$\left\| \varphi_{\hat{n}}(\cdot/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}}) - u(\cdot) \right\|_{C^1(K)} < \epsilon/2 \quad (4.75)$$

para todo  $\hat{n} \geq N'$ . Como sucedía en el caso del problema de KCH, de momento la demostración del teorema no se aleja del resultado euclídeo análogo 2.7. Para terminar, tan solo necesitamos encontrar una autofunción del problema OAH que aproxime a  $\varphi_{\hat{n}}$ . Esto lo conseguiremos por medio del siguiente lema de aproximación para curvatura casi nula.

**Lema 4.3.** *Para cualesquiera naturales  $n$  y  $l$  y  $0 < R$  fijos,*

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left\| A_{nl} e^{-r^2/2} r^l L_n^{l+1/2}(r^2) - f_{nl}^\kappa \right\|_{C^0(0,R)} = 0. \quad (4.76)$$

Además, esta cota se puede promocionar fácilmente a una acotación  $C^1$  y obtener

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left\| A_{nl} e^{-r^2/2} r^l L_n^{l+1/2}(r^2) - f_{nl}^\kappa \right\|_{C^1(0,R)} = 0. \quad (4.77)$$

Su demostración queda relegada a la siguiente sección, mas lo utilizaremos para construir una cierta función  $\psi$  que reúna los requisitos del teorema. Notemos por  $\varphi_{\hat{n}}^\kappa$  la serie finita dada por

$$\varphi_{\hat{n}}^\kappa(r, \theta, \phi) := \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \frac{c_{lm}}{A_{\hat{n}l}} f_{\hat{n}l}^\kappa(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \frac{c_{lm}}{A_{\hat{n}l}} \psi_{\hat{n}lm}^\kappa(r, \theta, \phi), \quad (4.78)$$

donde  $N$ ,  $c_{lm}$ ,  $A_{\hat{n}l}$  y  $\hat{n}$  son como antes. Para que esta expresión tenga sentido necesitamos asegurar la existencia de las funciones  $f_{\hat{n}l}^\kappa$  ya que no tenemos, al tomar curvatura  $\kappa > 0$ , una cantidad infinita de niveles de energía. Por tanto imponemos una restricción sobre el tamaño de  $\kappa$ , concretamente,  $\hat{n} + \frac{N+1}{2} < \frac{1}{2\kappa^2}$ . Es decir,  $\kappa^2 < (2\hat{n} + N + 1)^{-1}$ .

Es importante el hecho de que la función  $\psi_{\hat{n}lm}^\kappa$  es una autofunción del hamiltoniano del OAH asociada a la energía  $E_{\hat{n}l}^\kappa = (4\hat{n}_l + 2l + 3) - \kappa^2(2\hat{n}_l + l + 1)^2 = (4\hat{n} + 3) - \kappa(2\hat{n} + 1)^2$  que es independiente de  $l$  una vez más. Por ello, la función  $\varphi_{\hat{n}}^\kappa$  es una autofunción propiamente hablando del oscilador generalizado (y no solo un *spectral cluster*) asociada a la energía  $E_{\hat{n}}^\kappa := (4\hat{n} + 3) - \kappa(2\hat{n} + 1)^2 = \lambda_{\hat{n}} - \kappa(2\hat{n} + 1)^2$ .

Como  $S \subseteq \mathbb{B}_R$  para cierto  $R > 0$  por ser acotado,  $S/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}} := \{x/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}} : x \in S\}$  está contenido en  $\mathbb{B}_{R/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}}}$  y podemos ver que

$$\begin{aligned} & \left\| \varphi_{\hat{n}}(\cdot/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}}) - \varphi_{\hat{n}}^\kappa(\cdot/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}}) \right\|_{C^1(S)} = \left\| \varphi_{\hat{n}} - \varphi_{\hat{n}}^\kappa \right\|_{C^1(S/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}})} \\ & \leq \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \left| \frac{c_{lm}}{A_{\hat{n}l}} \right| \left\| \left( e^{-r^2/2} r^l L_{\hat{n}l}^{l+1/2}(r^2) - f_{\hat{n}l}^\kappa \right) Y_{lm} \right\|_{C^1((0,R/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}})} \\ & \leq C \sum_{l=0}^N \left\| e^{-r^2/2} r^l L_{\hat{n}l}^{l+1/2}(r^2) - f_{\hat{n}l}^\kappa \right\|_{C^1((0,R/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}})}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Por el lema 4.3, podemos acotar cada sumando y, al aparecer en cantidad finita, afirmamos

$$\left\| \varphi_{\hat{n}}(\cdot/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}}) - \varphi_{\hat{n}}^\kappa(\cdot/\sqrt{\lambda_{\hat{n}}}) \right\|_{C^1(S)} < \epsilon/2, \quad (4.80)$$

para cada  $\kappa > 0$  suficientemente pequeño. Uniendo esta información con (4.75), llegamos a la estimación

$$\left\| u(\cdot) - \varphi_{\hat{n}}^{\kappa}(\cdot / \sqrt{\lambda_{\hat{n}}}) \right\|_{C^1(S)} < \epsilon. \quad (4.81)$$

El teorema se sigue sin más que notar que  $\psi := \varphi_{\hat{n}}^{\kappa}$  es una autofunción del problema OAH con energía  $E_{\hat{n}}^{\kappa}$  y con  $\kappa > 0$  tomado lo suficientemente pequeño.  $\square$

### 4.3.2. Demostración del lema 4.3

*Demostración.* La misma relación asintótica entre los polinomios de Laguerre y de Jacobi usada en la demostración del lema 4.1 va a ser la pieza clave en esta ocasión [Sze39, Formula 5.3.4]:

$$L_n^{(\alpha)}(r) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha; \beta)}(1 - 2\beta^{-1}r). \quad (4.82)$$

Recordemos que hemos acotado el error a medida que  $\beta \rightarrow \infty$ .

$$P_n^{(\alpha; \beta)}(1 - 2\beta^{-1}r) = L_n^{(\alpha)}(r) + \mathcal{O}(\beta^{-1}), \quad (4.83)$$

uniformemente en  $\mathbb{B}_R$ . Si tomamos  $\beta = -\kappa^{-2} - 1/2$  y hacemos notar al lector que  $\mathcal{O}(\beta^{-1}) = \mathcal{O}(\kappa^2)$ , entonces estamos en condiciones de obtener

$$\begin{aligned} & P_n^{(l+1/2; -\kappa^{-2}-1/2)}(1 + 2\kappa^2 r^2) \\ &= P_n^{(l+1/2; \beta)}\left(1 - 2r^2 \frac{1}{1/2 + \beta}\right) \\ &= P_n^{(l+1/2; \beta)}(1 - 2r^2\beta^{-1} + \mathcal{O}(\beta^{-2})) \\ &= L_n^{(l+1/2)}(r^2) + \mathcal{O}(\kappa^2). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Esta cota siendo cierta de forma uniforme en  $0 \leq r \leq R$  para cualquier  $R > 0$  fija. Ahora nos centramos en el término restante. Son suficientes algunos cálculos elementales para obtener la convergencia uniforme que sigue

$$\left(\sqrt{1 + \kappa^2 r^2}\right)^{-\kappa^{-2}} = e^{-r^2/2} + \mathcal{O}(\kappa^2); \quad (4.85)$$

usando el desarrollo en serie de Taylor  $\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ , obtenemos

$$\left(\sqrt{1 + \kappa^2 r^2}\right)^{-\kappa^{-2}} = \left(1 + \kappa^2 r^2 \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\kappa^4)\right)^{-\kappa^{-2}} = \left(1 + \frac{r^2}{2n} + \mathcal{O}(n^{-2})\right)^{-n} = e^{-r^2/2} + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (4.86)$$

donde  $n = \kappa^{-2}$ .

Llegados a este punto, (4.76) se sigue automáticamente:

$$\begin{aligned} f_{nl}^{\kappa}(r) &= A_{nl} r^l \left(\sqrt{1 + \kappa^2 r^2}\right)^{-\kappa^{-2}} P_n^{(l+1/2; -\kappa^{-2}-1/2)}(1 + 2\kappa^2 r^2) \\ &= A_{nl} r^l e^{-r^2/2} L_n^{(l+1/2)}(r^2) + \mathcal{O}(\kappa^2), \end{aligned} \quad (4.87)$$

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

uniformemente en  $0 \leq r \leq R$ .

Finalmente, nos servimos de conocidas fórmulas de derivación ([Sze39, Formula 4.21.7] y [ASR88, Formula 22.8.6]) y las reglas habituales de derivación para mostrar que

$$\frac{d}{dr} f_{nl}^\kappa(r) = \frac{d}{dr} \left( A_{nl} r^l e^{-r^2/2} L_n^{(l+1/2)}(r^2) \right) + \mathcal{O}(\kappa), \quad (4.88)$$

de nuevo, uniformemente para  $0 \leq r \leq R$ . Uniendo esto a la aproximación que ya teníamos, inmediatamente se sigue (4.77) y concluimos la prueba.  $\square$

#### 4.3.3. Un nuevo resultado de realización

Al igual que en la sección 3.4, vamos a sacar provecho de este teorema para proporcionar un resultado de realización como los ya vistos.

**Corolario 4.2.** *Sea  $L$  cualquier enlace finito en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces para todo  $n$  suficientemente grande y todo  $\kappa > 0$  suficientemente pequeño (dependiendo también del valor de  $n$ ) existe una autofunción compleja  $\psi$  del problema de OAH*

$$(1 + \kappa^2 r^2) \partial_{rr} \psi + \frac{2 + 3\kappa^2 r^2}{r} \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2} \psi + E\psi + \frac{(1 + \kappa^2) r^2}{1 + \kappa^2 r^2} \psi = 0. \quad (4.89)$$

en el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3(\kappa)$  asociada a una energía  $E_{nl}^\kappa = (4n + 2l + 3) - \kappa^2(2n + l + 1)^2 = \lambda_{nl} - \kappa^2(2n + l + 1)^2$  y un difeomorfismo  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $\Phi(L)$  sea una unión de componentes conexas del conjunto de ceros de  $\psi$ . Además, el enlace  $\Phi(L)$  es estructuralmente estable para  $\psi$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbb{B}$  una bola euclídea centrada en el origen que contiene al enlace  $L$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el enlace  $L$  está contenido en el octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ , esto es,

$$L \subset \mathbb{B} \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}. \quad (4.90)$$

Por el teorema de aproximación de Whitney podemos perturbarlo ligeramente si es necesario y asegurar que  $L$  es una subvariedad analítica real de  $\mathbb{R}^3$ .

Sean  $L_a$  para  $a = 1, 2, \dots, M$ , las componentes conexas de  $L$  (que no son más que curvas analíticas cerradas embebidas, i.e. sin autointersecciones, en  $\mathbb{R}^3$ ). Vamos a intentar escribir cada  $L_a$  como la intersección transversal de dos superficies. Construiremos estas superficies  $\Sigma_a^1 \subset \mathbb{B}$  y  $\Sigma_a^2 \subset \mathbb{B}$  que se intersecan transversalmente en  $L_a$ . Esto se puede conseguir considerando una submersión analítica  $\Theta_a : W_a \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $W_a$  es un pequeño entorno tubular de  $L_a$  y  $\Theta_a^{-1}(0) = L_a$ . Recordemos que la aplicación  $\Theta_a$  se dice que es una submersión si el rango de la diferencial  $(D\Theta_a)_x$  es igual a 2 para todo  $x \in W_a$ . La existencia de una tal submersión está garantizada porque toda curva cerrada en  $\mathbb{R}^3$  tiene fibrado normal trivial. En este contexto, las superficies se pueden tomar como  $\Sigma_a^1 := \Theta_a^{-1}((-1, 1) \times \{0\}) \subset W_a$  y  $\Sigma_a^2 := \Theta_a^{-1}(\{0\} \times (-1, 1)) \subset W_a$ , por lo que son pequeños cilindros embebidos en  $W_a$ . Como  $\Theta_a$  es una submersión, estas superficies se intersecan de forma transversal en  $L_a = \Sigma_a^1 \cap \Sigma_a^2$ .

Para  $b = 1, 2$ , consideramos ahora el problema de Cauchy

$$\Delta \varphi_a^b + \varphi_a^b = 0, \quad \varphi_a^b|_{\Sigma_a^b} = 0, \quad \partial_\nu \varphi_a^b|_{\Sigma_a^b} = 1 \quad (4.91)$$

donde  $\partial_\nu$  denota una derivada normal en la superficie correspondiente. Dado que las ecuaciones son analíticas en el interior de  $\mathbb{B}$  podemos aplicar el teorema de Cauchy-Kowalewski

para obtener soluciones en la clausura de pequeños entornos de cada superficie  $\Sigma_a^b \subset U_a^b$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que estos entornos son lo suficientemente pequeños para que  $U_a^b \subset \mathbb{B}$  y que los entornos tubulares correspondientes a componente distintas  $U_a^1 \cap U_a^2$  de  $L_a$  son disjuntos.

Ahora tomamos la unión de esos entornos tubulares,

$$U := \bigcup_{a=1}^M U_a^1 \cap U_a^2, \quad (4.92)$$

y definimos una función compleja  $\phi$  en el conjunto  $U$  como

$$\phi|_{U_a^1 \cap U_a^2} := \phi_a^1 + i\phi_a^2. \quad (4.93)$$

Por construcción  $\phi$  tiene las propiedades siguientes:

1. Satisface la ecuación  $\Delta\phi + \phi = 0$  en el entorno tubular  $U$  de  $L$ . Podemos suponer sin perder generalidad que  $U$  también está contenido en el octante positivo  $\mathbb{B} \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$ ,
2. tomando  $U$  lo suficientemente pequeña, su conjunto nodal es precisamente  $L$  (es decir,  $\phi^{-1}(0) = L$ ), y
3. la intersección de los conjuntos de ceros de la parte real e imaginaria de  $\phi$  en  $L_0$  es transversa, i.e.  $\text{rank}(\nabla\mathcal{R}(\phi)(x), \nabla\mathcal{I}(\phi)(x)) = 2$  para todo  $x \in L$ . Esta es una consecuencia inmediata de los datos de Cauchy utilizados para construir  $\phi_a^b$  y del hecho de que  $\Sigma_a^1$  y  $\Sigma_a^2$  tienen intersección transversa.

Recordemos que un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  se dice simétrico si es invariante bajo la inversión  $x \mapsto -x$ . Denotamos por  $-U$  a la imagen por la inversión del conjunto  $U$ . Como  $U$  está contenido en el octante positivo,  $U \cap (-U) = \emptyset$  y podemos definir el conjunto simétrico  $U' := U \cup (-U)$  y la función par

$$\phi'(x) := \begin{cases} \phi(x) & \text{if } x \in U \\ \phi(-x) & \text{if } x \in -U \end{cases} \quad (4.94)$$

Por construcción  $\phi'$  satisface la ecuación de Helmholtz,  $\Delta\phi' + \phi' = 0$  en  $U'$ , y su conjunto nodal consta de  $L$  y su imagen por la inversión,  $-L$ . Llamemos  $S$  a un subconjunto cerrado y simétrico de  $U'$  que contenga a  $L$  en su interior; estamos en las condiciones necesarias para aplicar el teorema 4.3 (tomando como  $u$  la función  $\phi'$  que hemos definido en  $U'$ ) para obtener una autofunción del problema OAH  $\psi$  con energía  $E_{nl}^\kappa = (4n + 2l + 3) - \kappa^2(2n + l + 1)^2 = \lambda_{nl} - \kappa^2(2n + l + 1)^2$  tal que

$$\| \psi(\cdot / \sqrt{\lambda_{nl}}) - \phi'(\cdot) \|_{C^1(S)} < \epsilon. \quad (4.95)$$

Podemos escoger  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño para que la función  $\psi(\cdot / \sqrt{\lambda_{nl}})$  tenga una colección de componentes conexas en su conjunto nodal  $\{\psi(\cdot / \sqrt{\lambda_{nl}}) = 0\}$  dada por el enlace  $\Phi_2 \circ \Phi_1(L)$ , donde  $\Phi_2$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 \circ \Phi_1(L)$  esté contenido en  $B$ . El punto 3. y el teorema de isotopía de Thom [AR67] aseguran que el enlace  $\Phi_2 \circ \Phi_1(L)$  es también estructuralmente estable para la función  $\psi$ . Esto explica que exista un difeomorfismo  $\Phi_3$  de  $\mathbb{R}^3$  dado por el reescalado  $\Phi_3(x) := x / \sqrt{\lambda_{nl}}$  de forma que el enlace reescalado  $\Phi_3 \circ$

#### 4. Localización inversa en el espacio hiperbólico

$\Phi_2 \circ \Phi_1(L)$  es unión de componentes conexas estructuralmente estables de  $\Psi$ . El resultado se sigue de tomar  $\Phi := \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ . Por ser  $\mathbb{R}^3$  difeomorfo a  $\mathcal{H}^3(\kappa)$ , sin más que componer con un nuevo difeomorfismo  $\Phi_2$  podemos encontrar el enlace realizado en  $\mathcal{H}^3(\kappa)$ , la clase de nudo será la misma que la de  $\Phi(L)$ .  $\square$

### 4.4. Algunas cuestiones sugerentes

#### Observación 4.2. ¿Qué pasa en dimensiones más altas? ¿Y con la paridad?

En vista de los comentarios hechos en el capítulo 2, es natural preguntarse qué importancia real tienen las hipótesis sobre la paridad en el teorema 4.3 y sobre la dimensión en 4.3 y 4.1.

En el caso del oscilador, la hipótesis hecha sobre la paridad de la función puede ser remplazada por la de que  $\phi$  sea impar. Esto se debe, como ya comentamos, a la paridad de los esféricos armónicos que se traduce en una paridad establecida para las autofunciones  $\psi_{nlm}^k$ . Así, bajo la hipótesis contraria (impar) somos capaces de demostrar el mismo resultado.

Por otro lado, en ambos casos las aproximaciones utilizadas siguen siendo ciertas para otras dimensiones  $d, q \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Para demostrar estas extensiones será necesario disponer de una base de las funciones propias en dimensión genérica, pero estas son conocidas y se pueden encontrar, por ejemplo, en [Que16]. La prueba entonces dista poco de las aquí recogidas. Para deducir resultados de realización adaptados a este nuevo contexto tenemos que cuidar la hipótesis sobre la transversalidad. Los detalles técnicos se reducen a los mismos que encontrábamos en el caso euclídeo y se pueden leer en [EHPS18b] o en el capítulo 2.

#### Observación 4.3. ¿Por qué no son triviales estos resultados?

Con la interpretación ya hecha de la curvatura  $\kappa$  como una perturbación pequeña del operador a considerar en cada caso, es casi inmediato (y bastante intuitivo) el hecho de que las autofunciones del operador perturbado van a converger a las del caso euclídeo cuando  $\kappa \rightarrow 0$ . Lo que no es trivial es que los autovalores que coinciden en el caso  $\kappa = 0$  para diferentes números cuánticos vayan a preservar esta relación al introducir la modificación. Podría darse el caso de que, partiendo de una combinación lineal de autofunciones todas ellas asociadas a un mismo autovalor, al introducir la perturbación  $\kappa > 0$  los autovalores correspondientes se separasen permaneciendo cercanos pero sin ser exactamente el mismo. Los problemas considerados a lo largo de esta sección tiene la propiedad de que la alta degeneración y una manipulación ingeniosa nos permite recuperar una combinación lineal de autofunciones del mismo autovalor.

En general, las combinaciones lineales de autofunciones son solo la propia autofunción. Más concretamente, en [Uhl76] K. Uhlenbeck demuestra que, dada una variedad  $M$ , para un conjunto residual de métricas  $g \in G$  de clase  $C^k$  diferentes en ella, el operador de Laplace correspondiente  $\Delta_g$  solo tiene valores propios con espacios propios de dimensión uno. Estamos llamando conjunto residual a aquellos que son de segunda categoría, luego intuitivamente el resultado nos dice que «apenas» podemos encontrar valores propios con multiplicidad mayor a uno.

Este resultado fue mejorado en [Whi17] por B. White ampliando al caso en que el conjunto sea  $C^\infty$  residual. Es lógico esperar resultados análogos para el contexto que estamos considerando: la ecuación de Schrödinger con distintos potenciales. Así, en general, la combinación de autofunciones serán de la misma autofunción y no tendremos libertad suficiente para probar la propiedad de localización inversa. A fecha de hoy, no se ha demostrado un caso más general que los aquí recogidos.

**Observación 4.4. ¿Qué perspectivas de futuro tenemos?**

Una definición que aúna el trabajo de los últimos capítulos es la siguiente:

*Definición 4.1.* Una  $d$ -variedad riemanniana  $\mathbb{M}$  cerrada se dice que tiene la propiedad de localización inversa si, para cada  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  solución de  $\Delta\phi + \phi = 0$  en  $\mathbb{R}^d$ , para todo  $\epsilon > 0$  y para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe un valor  $\Lambda$  tal que para toda carta normal  $\Phi$  (esto es, de coordenadas geodésicas normales) y para cualquier autovalor  $\Lambda_k = \lambda_k^2 \geq \Lambda$  existe una autofunción  $u_k$  asociada a la frecuencia  $\lambda_k$  tal que

$$\| u_k \circ \Phi(\lambda_k \cdot) - \phi(\cdot) \|_{C^k(B)} < \epsilon, \quad (4.96)$$

donde  $B$  es una bola euclídea prefijada.

Algunos de los resultados recogidos en este trabajo nos hablan de variedades muy simétricas concretas que satisfacen esta propiedad, como la esfera, el toro o el espacio hiperbólico en el caso del potencial de coulomb y el oscilador armónico. Sería altamente deseable encontrar una teoría sistemática para localización inversa de autofunciones del Laplaciano. Si bien se trata de un objetivo ambicioso y que está aún lejos de cumplirse, sí es posible vislumbrar los que podrían ser los siguientes pasos para obtenerlo.

Un primer objetivo sería tratar de demostrar que si una variedad cumple una cierta propiedad de localización inversa «cuantitativa» (que no es cierta en el caso del toro, por ejemplo, por lo que es más exigente que la propiedad de localización inversa arriba descrita) entonces la variedad ha de ser Zoll. Recordemos qué es esto.

*Definición 4.2.* Una variedad riemanniana  $(\mathbb{M}, g)$  se dice que es Zoll cuando todas sus geodésicas son cerradas (en ocasiones se pide también que sean de igual longitud). Una forma equivalente de verlo es decir que la métrica  $g$  es Zoll cuando cumple esta propiedad.

La terminología se debe al descubrimiento de Otto Zoll [Zolo3] de que  $S^2$  admitía gran cantidad de métricas Zoll además de la obvia con curvatura constante. Por ejemplo, la Pera de Tannery proporciona un ejemplo de variedad Zoll en la que todas las geodésicas tienen la misma longitud y forma de lemniscata (a excepción, de los meridianos). La importancia de estas variedades en geometría espectral no es novedosa: las variedades de Zoll aparecen en análisis microlocal cuando buscamos variedades en las que la degeneración del autovalor es máxima. Esta observación se debe a Zelditch. Concretamente, en [Zel96] este autor afirma que si tienes una variedad que presenta multiplicidad de autovalores máxima en un sentido cuantitativo entonces la variedad ha de ser Zoll. Nos gustaría ser capaces de ver que si tenemos una propiedad de localización inversa (en cierto sentido) entonces la multiplicidad sería máxima y, por ende, la variedad Zoll. Sin embargo, no esperamos que baste con tener la sucesión de autofunciones convergente (como ha aparecido en los casos considerados aquí), sino que necesitamos que exista una relación entre el tamaño del autovalor y la cantidad de funciones en la combinación lineal. Si, por el contrario, la energía que necesito en mis aproximaciones de Helmholtz está relacionada con cómo de alto es el autovalor cabría esperar un resultado en esta dirección. A esta propiedad es a la que llamaremos «localización inversa cuantitativa» y de la que esperamos obtener consecuencias como las comentadas en un futuro.

Cualquier resultado en esta dirección permanece sin demostrar a fecha de hoy y Enciso, Peralta-Salas y la autora consideran que es un proyecto abarcable que puede proporcionar buenos frutos.



## 5. G.A.D. en el espacio hiperbólico y aplicaciones

En el capítulo que nos atañe enunciaremos, demostraremos y obtendremos consecuencias de un novedoso resultado de aproximación global con decaimiento en el contexto del espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ . A lo largo de todo el trabajo nos hemos encontrado en numerosas ocasiones en la necesidad de acudir a un resultado de G.A.D., lo que deja patente la utilidad de este tipo de teoremas. Es, por tanto, natural que una vez familiarizados con el espacio  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  tratemos de obtener una propiedad análoga en él. Los resultados que se recogen en este capítulo se deben a A. Enciso, D. Peralta-Salas y la autora, y se encuentran en preparación para su posible publicación [EGRPSa].

Ya en la sección 1.3.2 se presentó al lector la teoría de G.A.T. que permite el paso de soluciones locales a globales (de una cierta ecuación, habitualmente, elíptica) con un error controlado, y con un cierto decaimiento para teoría de G.A.D. A lo largo de estas notas ha quedado patente la utilidad de este tipo de resultados pues han sido necesarios en múltiples ocasiones para concluir el resultado principal de la sección: habitualmente, para la construcción de soluciones con conjuntos de nivel prescritos.

Los primeros teoremas de aproximación global datan de los años cincuenta. Sus autores, Lax y Malgrange, demostraron que para algunas ecuaciones diferenciales lineales elípticas en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^d$ , las soluciones definidas en conjuntos acotados  $K$  se pueden aproximar uniformemente por soluciones globales en todo  $\mathbb{R}^d$  siempre que el complementario de  $K$  en  $\mathbb{R}^d$  sea conexo. Los operadores elípticos para los que demostraron esta aproximación (por ejemplo, aquellos de coeficientes analíticos) fueron ampliados *a posteriori* por Browder, incluyendo resultados en ciertos espacios de Hölder. Pero en ningún caso son válidos para aproximación uniforme en regiones no acotadas ni dan ningún tipo de control sobre el crecimiento de las soluciones globales en el infinito. Estos aspectos son fundamentales para algunas aplicaciones y A. Enciso, M. A. García y D. Peralta-Salas han conseguido probar un teorema de aproximación con decaimiento en infinito, que generaliza el posible decaimiento puntual de las soluciones globales de la ecuación de Helmholtz [nGF18, Teorema 1.6.]; concretamente se demuestra que la solución global aproximante  $u$  de la ecuación  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$  decae en infinito como  $|D^\alpha u(x)| < C_\alpha(1 + |x|)^{\frac{1-d}{2}}$  para todo multiíndice  $\alpha$ . Además, los mismo autores han proporcionado algunos resultados de aproximación para ecuaciones diferenciales parabólicas, también con control sobre las soluciones globales en infinito.

Toda esta teoría de aproximación global vive en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^d$ , pero su extensión al espacio de curvatura constante negativa  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  no resulta excesivamente complicada, al menos para algún caso muy concreto que ha sido recientemente probado por A. Enciso, D. Peralta-Salas y la autora, y que incluimos en este capítulo.

Como en el capítulo anterior, consideramos el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  con curvatura igual a  $-\kappa^2$  para  $\kappa > 0$  y  $d > 3$  por motivos técnicos, y el operador Laplaciano  $\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}$  que adopta la forma

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} u = (1 + \kappa^2 r^2) \partial_{rr} u + \left( \frac{d-1 + d\kappa^2 r^2}{r} \right) \partial_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} u. \quad (5.1)$$

5. G.A.D. en el espacio hiperbólico y aplicaciones

Para un parámetro real  $\Lambda$ , sobre el que impondremos restricciones más adelante, consideramos la ecuación de Helmholtz hiperbólica descrita como

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}u + \Lambda u = (1 + \kappa^2 r^2)\partial_{rr}u + \left(\frac{d-1 + d\kappa^2 r^2}{r}\right)\partial_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}u + \Lambda u = 0. \quad (5.2)$$

Esta da lugar a la ecuación radial que sigue:

$$(1 + \kappa^2 r^2)R''(r) + \left(\frac{d-1 + d\kappa^2 r^2}{r}\right)R'(r) - \frac{l(l+d-2)}{r^2}R(r) + \Lambda R(r) = 0, \quad (5.3)$$

donde  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Si hacemos el cambio de variable  $\kappa r = \sinh(\kappa\rho)$ ,  $R(r) = S(\rho)$ ,  $u(r, \theta) = v(\rho, \theta)$ , con  $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$  representando la variable angular, podemos reescribir las ecuaciones:

$$\partial_{\rho\rho}v(\rho, \theta) + (d-1)\kappa \coth(\kappa\rho)\partial_\rho v(\rho, \theta) + \frac{\kappa^2}{\sinh^2(\kappa\rho)}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}v(\rho, \theta) + \Lambda v(\rho, \theta) = 0, \quad (5.4)$$

$$S(\rho)'' + (d-1)\kappa \coth(\kappa\rho)S(\rho)' - \frac{l(l+d-2)\kappa^2}{\sinh^2(\kappa\rho)}S(\rho) + \Lambda S(\rho) = 0. \quad (5.5)$$

Esta formulación facilitará los cálculos en lo que sigue. A continuación introducimos la siguiente función que será de utilidad más adelante:

$$G(\rho, \theta) := \frac{(2-d)\kappa^{d-2}}{(2\pi)^{d/2} \sinh(\kappa\rho)^{d/2-1}} \mathcal{R} \left( e^{-i\pi(\frac{d}{2}-1)} Q_\nu^{d/2-1}(\cosh(\kappa\rho)) \right), \quad (5.6)$$

donde  $\mathcal{R}$  denota la parte real,  $Q_\nu^h$  es una función asociada de Legendre de segundo tipo (para saber más referimos al lector al apéndice B), el valor  $\nu$  viene dado por

$$\nu := -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\kappa} \sqrt{4\Lambda - (d-1)^2\kappa^2}, \quad (5.7)$$

y a  $\Lambda$  le exigimos en lo que sigue que

$$\Lambda > \frac{\kappa^2(d-1)^2}{4}. \quad (5.8)$$

Con la métrica expresada como en (5.4) y (5.5), se puede verificar [CDD18] que esta función cumple

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}G + \Lambda G = 0, \quad (5.9)$$

en todo  $\rho > 0$  (es decir, en todo  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  salvo en el origen) y el comportamiento asintótico de las funciones asociadas de Legendre (apéndice B) nos permite comprobar que

$$G(\rho, \theta) = -\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|\rho^{d-2}} + \mathcal{O}(\rho^{3-d}), \quad (5.10)$$

a medida que  $\rho \rightarrow 0$ . Entonces se sigue que  $G$  es una solución fundamental de la ecuación de Helmholtz hiperbólica (5.2), de modo que si  $v$  es, digamos, una función de Schwartz en  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  y consideramos  $g_y(x)$  un punto de  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  donde  $g_y$  es una isometría de  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  que

lleva el punto  $y$  al origen, entonces la «convolución»

$$(G * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} G(g_y(x))v(y)dVol(y) = \int_{\mathbb{R}^d} G(g_y(x))v(y)\mathcal{V}(y)dy \quad (5.11)$$

(donde  $dVol(y)$  es la forma de volumen del espacio  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  y  $\mathcal{V}(y)$  es la función de volumen asociada), cumple que

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}(G * v) + \Lambda(G * v) = v. \quad (5.12)$$

*Observación 5.1.* Si tomamos  $\Lambda \leq \frac{\kappa^2(d-1)^2}{4}$  el comportamiento que observamos es muy distinto, más similar a la ecuación de Yukawa. Concretamente, impongo esta restricción sobre el parámetro  $\Lambda$  para conseguir que mi función oscile «en  $\infty$ », es decir, muy lejos del origen, que es precisamente el comportamiento de la ecuación de Helmholtz. Resulta curioso el hecho de que esto refleja, *grosso modo*, que la curvatura del espacio cambia la masa de la ecuación de Klein-Gordon, en el lenguaje usado en Relatividad General.

*Observación 5.2.* Por simplicidad y para facilitar el entendimiento, invitamos al lector a considerar el caso particular en que  $d = 3$ , en el cual la función  $G$  adopta la forma, mucho más sencilla, que sigue

$$G(\rho, \theta) = \frac{\kappa \cos(\rho\sqrt{\Lambda - \kappa^2})}{4\pi \sinh(\kappa\rho)}, \quad (5.13)$$

y la restricción impuesta sobre  $\Lambda$  no es más que  $\Lambda > \kappa^2$ .

A continuación, enunciaremos y demostraremos un resultado de aproximación global con decaimiento óptimo para la ecuación (5.2). Finalmente, comentamos algunas posibles consecuencias de este resultado que los autores esperarían poder demostrar en el futuro cercano.

## 5.1. G.A.D. en $\mathcal{H}^d(\kappa)$

El teorema principal de esta sección es el siguiente.

**Teorema 5.1.** *Sea  $\kappa > 0$ ,  $\epsilon > 0$  y  $\Lambda > \frac{\kappa^2(d-1)^2}{4}$ , fijos pero arbitrarios. Sea  $m \in \mathbb{N}$ ,  $K \subseteq \mathcal{H}^d(\kappa)$  un compacto con complemento  $\mathcal{H}^d(\kappa) \setminus K$  conexo y  $v$  definida en un entorno abierto  $\Omega$  de  $K$ ,  $K \subset \Omega$ , tal que  $\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}v + \Lambda v = 0$  en  $\Omega$ . Entonces existe una función  $u$  definida en todo  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  tal que*

- $\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}u + \Lambda u = 0$  en  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ ,
- $\|u - v\|_{C^m(K)} < \epsilon$  y
- $|u(x)| \leq C \langle x \rangle^{-(d+1)/2}$  donde  $\langle x \rangle := (1 + \rho(x)^2)^{1/2}$  es el equivalente hiperbólico del llamado «paréntesis japonés»; siendo este el decaimiento óptimo esperable entre las soluciones y  $\rho(x)$  la distancia geodésica de este punto a uno fijado (el origen) en el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ .

*Demostración.* Comenzamos tomando una función suave  $\chi : \mathcal{H}^d(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$  que vale 1 en un pequeño entorno de  $K$  y que es idénticamente 0 fuera de  $\Omega$ . Definimos la función suave  $v_1$  en  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  dada por  $v_1 := \chi v$ . Estamos obligando a que  $v_1$  vale 0 fuera de  $\Omega$  aunque

5. G.A.D. en el espacio hiperbólico y aplicaciones

rigurosamente  $v$  no estaba definida en este conjunto. A continuación escribimos  $v_1 := v'_1 + h$  con

$$v'_1(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(g_y(x))f(y)\mathcal{V}(y)dy = G * f(x), \quad (5.14)$$

donde  $f$  es la función de soporte compacto  $f := \Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}v_1 + \Lambda v_1$ ,  $G$  es la solución fundamental definida en (5.6) y estamos notando por  $\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}$  al Laplaciano en  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ . Por construcción,  $h$  satisface la ecuación de Helmholtz hiperbólica en todo  $\mathcal{H}^3(\kappa)$ ,

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)}h + \Lambda h = 0. \quad (5.15)$$

El soporte de  $f$  está claramente contenido en el conjunto abierto  $\Omega \setminus K$ . Por tanto, un argumento de continuidad sencillo permite aproximar la integral (5.14) uniformemente en el compacto  $K$  por una suma de Riemann de la forma

$$v_2(x) := \sum_{n=1}^M c_n G(g_{x_n}(x)). \quad (5.16)$$

Específicamente, es estándar que para cada  $\delta > 0$  existe un entero  $M$  suficientemente grande, números reales  $c_n$  y puntos  $x_n \in \Omega \setminus K$  de forma que la suma finita (5.16) cumple la acotación

$$\|v'_1 - v_2\|_{C^0(\Omega)} < \delta. \quad (5.17)$$

A continuación tomemos una bola euclídea usual  $B_R$  lo suficientemente grande para contener a  $\Omega$  y veremos cómo «barrer» las singularidades de la función  $v_2$  con vistas a aproximarla en el conjunto  $K$  por otra función  $v'_2$  cuyas singularidades están contenidas en el complemento de la bola  $B_R$  que contiene a  $\Omega$ . La demostración está basada en un argumento de dualidad y en el teorema de Hanh-Banach.

**Lema 5.1.** *Para todo  $\delta > 0$ , existe una cantidad finita de puntos  $\{x'_n\}_{n=1}^{M'}$  todos ellos en  $\mathcal{H}^d(\kappa) \setminus \bar{B}_R$  y constantes  $c'_n$  de forma que la combinación lineal finita*

$$v'_2(x) := \sum_{n=1}^{M'} c'_n G(g_{x'_n}(x)) \quad (5.18)$$

*aproxima a la función  $v_2$  uniformemente en  $K$ :*

$$\|v'_2 - v_2\|_{C^0(K)} < \delta. \quad (5.19)$$

Aquí  $\delta > 0$  es la misma constante pequeña y arbitraria considerada antes.

*Demostración.* Consideremos el espacio  $V$  de todas las posibles combinaciones lineales finitas de la forma (5.18) donde  $x'_n$  puede ser cualquier punto en  $\mathcal{H}^d(\kappa) \setminus \bar{B}_R$  y las constantes  $c'_n$  toman valores arbitrarios. Restringiendo estas funciones al conjunto  $K$ , podemos ver  $V$  como un subespacio del espacio de Banach  $C^0(K)$  de las funciones continuas en  $K$ .

Por el teorema de Riesz-Markov, el dual de  $C^0(K)$  es el espacio  $\mathcal{M}(K)$  de las medidas de Borel finitas y con signo en  $\mathbb{R}^d$  cuyo soporte está contenido en el compacto  $K$ . Tomemos una medida cualquiera  $\mu \in \mathcal{M}(K)$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\mathcal{V}(y)d\mu(y) = 0$  para toda  $f \in V$ . A

continuación definimos una función  $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  como

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^d} G(g_y(x)) \mathcal{V}(y) d\mu(y); \quad (5.20)$$

de forma que  $F$  satisface la ecuación

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} F + \Lambda F = \mu. \quad (5.21)$$

Para comprobar esto basta ver la medida  $\mu$  como una distribución con soporte compacto en  $\mathbb{R}^d$  de forma que la «convolución»  $F := G * \mu$  es una distribución bien definida y satisface, en el sentido de distribuciones,

$$(\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} + \Lambda)F = \left[ (\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} + \Lambda) G \right] * \mu = \delta * \mu = \mu. \quad (5.22)$$

Por otro lado, para comprobar que  $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ , notemos que si  $U$  es cualquier subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^d$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_U |F(x)| dx &\leq \int_U \int_K \frac{C}{|x-y|^{d-2}} d|\mu|(y) dx \leq C|\mu|(K) \sup_{y \in K} \int_U \frac{dx}{|x-y|^{d-2}} \\ &\leq C|\mu|(K) \int_{U^*} \frac{1}{|z|^{d-2}} dz \leq C|\mu|(K) |U|^{2/3} < \infty, \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde hemos utilizado la desigualdad del reordenamiento (o bien, en inglés, *rearrangement inequality*) para obtener la tercera cota superior. Por  $U^*$  hemos denotado la bola centrada en el origen con el mismo volumen  $|U|$  que el conjunto  $U$  y  $|\mu|$  es el valor absoluto de la medida  $\mu$  (a saber,  $\mu$  o  $-\mu$ ).

Nótese que  $F$  es idénticamente nulo en  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R$  por la definición de la medida  $\mu$  y que  $F$  satisface la ecuación elíptica  $\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} F + \Lambda F = 0$  en  $\mathbb{R}^d \setminus K$ , por lo que  $F$  es analítica en este conjunto. Como por hipótesis,  $\mathcal{H}^d(\kappa) \setminus K$  es conexo, tenemos la misma propiedad para  $\mathbb{R}^d \setminus K$ . Por tanto, como  $\mathbb{R}^d \setminus K$  es conexo y contiene al conjunto  $\mathbb{R}^d \setminus B_R$ , por analiticidad la función  $F$  ha de anularse en todo el complemento de  $K$ . Entonces se sigue que la medida  $\mu$  también anula a la función  $G(g_y(\cdot))$  para todo  $y \notin K$  porque

$$0 = F(y) = \int_{\mathbb{R}^d} G(g_y(x)) d\mu(x). \quad (5.24)$$

Consecuentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_2 d\mu = 0, \quad (5.25)$$

lo que implica que  $v_2$  no se puede separar del subespacio  $V$  y se puede aproximar uniformemente en  $K$  por elementos del mismo, de acuerdo con el teorema de Hahn-Banach. Por tanto, existe una cantidad finita de puntos  $\{x'_n\}_{n=1}^M$  en  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R$  y números reales  $c'_n$  de forma que la función definida en (5.18) cumpla la estimación dada en (5.19) y nos permita dar por finalizada la demostración.  $\square$

Armados con este lema, y para concluir la prueba del teorema principal, llamamos la

5. G.A.D. en el espacio hiperbólico y aplicaciones

atención del lector sobre el hecho de que la función

$$v_4 := v_3 + h, \quad (5.26)$$

donde  $h$  es la función construida con anterioridad, satisface la ecuación

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} v_4 + \Lambda v_4 = 0, \quad (5.27)$$

en la bola  $B_R$ , cuyo interior contiene a  $K$ . Tomaremos en  $B_R$  coordenadas hipersféricas como venimos haciendo  $\rho := g_{\mathcal{H}^d}^d(\kappa)(x, x)$  y  $\theta := x/\rho \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Expandiendo la función  $v_4$  (con respecto a las variables angulares) en una serie de armónicos hipersféricos y utilizando (5.27), inmediatamente obtenemos que  $v_4$  se puede expandir en la bola como la serie

$$v_4 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m \in I_l} \beta_{lm} f_l^{\kappa}(\rho) Y_{lm}(\theta), \quad (5.28)$$

donde  $f_l^{\kappa}(\rho)$  es solución de la E.D.O.

$$f_l^{\kappa}(\rho)'' + (d-1)\kappa \coth(\kappa\rho) f_l^{\kappa}(\rho)' - \frac{l(l+d-2)\kappa^2}{\sinh^2(\kappa\rho)} f_l^{\kappa}(\rho) + \Lambda f_l^{\kappa}(\rho) = 0, \quad (5.29)$$

$I_l$  es un conjunto finito que corresponde con el rango de los hipersféricos armónicos asociados al número cuántico  $l$ , que no necesitaremos explícitamente y que vimos que correspondía con el conjunto  $\{1, 2, \dots, \binom{l+d-1}{l} \frac{2l+d-1}{l+d-1}\}$ , e  $Y_{lm}$  son los hipersféricos armónicos en  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

Es conocido [CDD18] que podemos tomar  $f_l^{\kappa}$  de la forma

$$f_l^{\kappa}(\rho) = \frac{1}{\sinh(\kappa\rho)^{d/2-1}} P_{\nu}^{d/2-1+l}(\cosh(\kappa\rho)), \quad (5.30)$$

donde  $\nu$  es el mismo de antes  $\nu = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\kappa} \sqrt{4\Lambda - (d-1)^2\kappa^2}$  y  $P_{\nu}^{\mu}$  es una función de Legendre asociada de primer tipo (en particular, una función de Legendre asociada cónica, que presentamos en el apéndice B).

Como esta serie converge en  $L^2(B_R)$ , para cualquier  $\delta > 0$  existe un entero  $l_0$  de forma que la suma finita

$$u := \sum_{l=0}^{l_0} \sum_{m \in I_l} \beta_{lm} f_l^{\kappa}(\rho) Y_{lm}(\theta) \quad (5.31)$$

aproxima a la función  $v_4$  en sentido  $L^2$ :

$$\|u - v_4\|_{L^2(B_R)} < \delta. \quad (5.32)$$

Por las propiedades de las funciones cónicas de Legendre,  $u$  es suave en  $\mathbb{R}^d$ , decae en infinito como

$$|u(x)| \leq C \langle x \rangle^{-(d+1)/2}, \quad (5.33)$$

y satisface la ecuación  $\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} u + \Lambda u = 0$  en todo  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ .

Para cualquier  $R' < R$  suficientemente grande como para que  $K$  esté contenido en la bola  $B_{R'}$ , estimaciones elípticas estándar nos permiten pasar de la cota  $L^2$  a una acotación

uniforme:

$$\|u - v_4\|_{C^0(K)} < \delta. \quad (5.34)$$

Uniendo esta estimación con las anteriormente conseguidas llegamos a

$$\|u - v\|_{C^0(K)} < \delta. \quad (5.35)$$

Finalmente, como  $v$  también satisface la ecuación de Helmholtz hiperbólica en un entorno de  $K$ , estimaciones elípticas estándar nos permiten, de nuevo, promocionar la cota (5.35) uniforme a una de orden mayor,

$$\|u - v\|_{C^m(K)} < \epsilon, \quad (5.36)$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

## 5.2. Algunas (posibles) consecuencias de este resultado

A lo largo de todas estas notas los teoremas de G.A.D. han aparecido una y otra vez como herramientas para resolver problemas de realización. Por tanto, estaría perfectamente justificado un intento de alcanzar un teorema de realización en el contexto del espacio hiperbólico que se sustente fuertemente en el teorema principal de la sección anterior. Un tal resultado podría enunciarse como sigue

**Teorema 5.2.** *Sean  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  hipersuperficies regulares, compactas, orientables, sin frontera y embebidas en  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  (con  $d > 3$ ) que además no están enlazadas (entendida esta como la propiedad de que existen  $N$  conjuntos contráctiles disjuntos dos a dos  $S_1, \dots, S_N$  de forma que cada  $\Sigma_j$  esté contenida en un  $S_j$ ). Entonces existe una función  $w$  cumpliendo la ecuación de Helmholtz en el hiperbólico*

$$\Delta_{\mathcal{H}^d(\kappa)} w + \Lambda w = 0, \quad (5.37)$$

en todo  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  para un valor  $0 < \kappa$  lo suficientemente pequeño y una cierta constante  $\Lambda$  lo suficientemente grande; y un difeomorfismo  $\Psi$  de  $\mathcal{H}^d(\kappa)$  de forma que  $\Psi(\Sigma_1), \dots, \Psi(\Sigma_N)$  sean componentes estructuralmente estables del conjunto nodal  $w^{-1}(0)$ . Además, el decaimiento de  $w$  es el óptimo.

Cabría esperar que la demostración de un teorema similar a este se rigiera por el mismo esquema seguido en [EPS16] para su análogo euclídeo. No obstante cabe esperar que algunas cuestiones técnicas requieran un cierto trabajo para ser solventadas. Con todo, Enciso, Peralta-Salas y la autora esperan afrontar y resolver este problema en un futuro cercano.

Cabría aún andar un paso más allá. En [EPS16], A. Enciso y D. Peralta-Salas obtuvieron un resultado de realización de conjuntos nodales compactos y topológicamente complicados para la ecuación de Allen-Cahn con índice finito,  $\Delta u + u - u^3 = 0$ . Para ello se sirvieron de un tal teorema para la ecuación de Helmholtz [EPS16, Teorema 2.2.] y del hecho de que, para valores pequeños de la solución  $u$ , ambas ecuaciones se parecen (por el rápido decrecimiento de  $u^3$ ). La pieza clave en la demostración que nos permite escapar del régimen lineal y afrontar un problema relativo a una ecuación no lineal es, precisamente, el decaimiento óptimo de la aproximación global construida. Dado que, en el contexto hiperbólico, hemos demostrado un teorema de G.A.D. análogo, no resulta descabellada la idea de enfrentar problemas de realización en este nuevo contexto con ciertas ecuaciones no lineales como protagonistas. De nuevo, se trata de una vía de investigación que permanece abierta y que esperamos abortar próximamente.

## 5. G.A.D. en el espacio hiperbólico y aplicaciones

Finalmente, otro posible camino a seguir, es el de estudiar teoremas de G.A.D. para la ecuación del calor (o para ecuaciones parabólicas en general) en el espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^d(\kappa)$ . En el caso euclídeo, M. A. García estudió este tipo de teoremas de aproximación en relación con sus análogos para ecuaciones elípticas [nGF18]. Las similitudes presentes en las pruebas de estos resultados hacen que, una vez estamos en disposición de un resultado de G.A.D. en el contexto hiperbólico como el demostrado en este capítulo, abordar teoremas del tipo parabólico sea asequible. De hecho, A. Enciso, D. Peralta-Salas y la autora han tratado este problema recientemente y se encuentran preparando un artículo que lo recoge [EGRPSa].

## A. El problema de autovalores

En ciencias naturales e ingeniería es habitual encontrarse con ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales; su solución lleva comúnmente al problema de autovalores. Por ello, el problema de autovalores ocupa un lugar de gran importancia en álgebra lineal y en matemáticas en general. En la introducción de estas notas ya hablamos brevemente sobre este problema y distintos contextos donde es interesante estudiarlo. En este apéndice conseguiremos demostrar que, para toda variedad riemanniana cerrada  $\mathbb{M}$ , el espacio  $L^2(\mathbb{M})$  admite una base de autofunciones del Laplaciano; además de otras propiedades interesantes.

Una variedad riemanniana  $(\mathbb{M}, g)$  se dice cerrada cuando es compacta y su frontera es vacía. Para todo  $1 < p < \infty$  consideramos el espacio  $L^p(\mathbb{M})$  definido como es habitual:

$$L^p(\mathbb{M}) = \{u : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es medible y } \|u\|_p < \infty\}, \quad (\text{A.1})$$

donde tenemos, como de costumbre,

$$\|u\|_p := \left( \int_{\mathbb{M}} |u|^p dV_g \right)^{1/p}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $dV_g$  nota la forma de volumen canónica en  $\mathbb{M}$ . Comenzaremos recordando algunas definiciones.

**Definición A.1.** El espacio de Sobolev de orden  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\mathbb{M})$ , es el conjunto de las funciones  $u \in L^2(\mathbb{M})$  tales que, para cualesquiera campos vectoriales  $X_1, X_2, \dots, X_l$  de  $\mathbb{M}$  con  $l \leq k$ , se tiene que  $X_1 \dots X_l u \in L^2(\mathbb{M})$ . De forma similar, notamos por  $H^{-k}(\mathbb{M})$  al dual de estos espacios:  $H^k(\mathbb{M})^* = H^{-k}(\mathbb{M})$ .

Estas definiciones no son más que un caso particular de la definición de espacio de Sobolev para  $s \in \mathbb{R}$  arbitrario que se puede encontrar, por ejemplo, en [Tay11a, Capítulo 3]. En el capítulo quinto de esa misma referencia, se puede ver que el operador Laplaciano  $\Delta$  define una aplicación:

$$\Delta : H^1(\mathbb{M}) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{M}), \quad (\text{A.3})$$

que habremos de modificar levemente para poder aplicar el Teorema Espectral, en su versión más débil para operadores autoadjuntos y compactos. Presentemos brevemente este resultado:

**Definición A.2.** Un operador lineal acotado  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  entre dos espacios de Banach se dice que compacto cuando  $T$  lleva todo subconjunto acotado de  $V$  a un subconjunto relativamente compacto de  $W$ , i.e., un conjunto con cierre compacto. Esto es equivalente a exigir que  $T(B_1)$  sea relativamente compacto en  $W$  donde  $B_1$  es la bola unidad cerrada de  $V$ . Notamos por  $\mathcal{K}(V, W)$  al conjunto de los operadores compactos.

A. El problema de autovalores

Las propiedades de los operadores compactos son sorprendentemente agradables y han sido ampliamente estudiadas (por ejemplo en [Tay11a, Apéndice A] se recogen algunas de las más interesantes). En nuestro caso, estaremos especialmente interesados en la siguiente propiedad:

**Lema A.1.** *Si  $A \in \mathcal{L}(H)$  es un operador lineal, acotado entre un espacio de Hilbert  $H$  y él mismo que además es autoadjunto y compacto, entonces bien  $\|A\|$  o bien  $-\|A\|$  es un autovalor de  $A$ , esto es, existe  $u \neq 0$  en  $H$  de forma que  $Au = \lambda u$  con  $\lambda = \pm\|A\|$ .*

Al espacio de los  $u \in H$  cumpliendo este lema A.1 se le conoce como el «autoespacio  $\lambda$ » de  $A$ . Claramente, si  $A$  es compacto y  $\lambda \neq 0$ , este espacio propio debe ser de dimensión finita. Si  $Au_j = \lambda_j u_j$ ,  $A = A^*$ , entonces

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (Au_1, u_2) = (u_1, Au_2) = \bar{\lambda}_2(u_1, u_2). \quad (\text{A.4})$$

Tomando  $\lambda_1 = \lambda_2$  y  $u_1 = u_2$ , esto implica que cada valor propio de  $A = A^*$  ha de ser real. Ahora bien, tomando  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , se tiene que  $(u_1, u_2) = 0$ , de modo que autovalores distintos tienen espacios propios ortogonales. Por otro lado si  $Au_1 = \lambda_1 u_1$  y  $v \perp u_1$ , entonces  $(u_1, Av) = (Au_1, v) = \lambda_1(u_1, v) = 0$ , de modo que  $A = A^*$  deja invariantes los complementos ortogonales de sus espacios propios.

Si  $A$  es un operador compacto y autoadjunto en  $H$ , podemos aplicar el lema A.1 a la restricción de  $A$  al complemento ortogonal de sus espacios propios asociados a  $\pm\|A\|$  (donde su norma ha de ser estrictamente menor, como consecuencia del lema A.1), aplicar el lema otra vez a esta restricción y repetir una y otra vez. De esta forma podemos demostrar el siguiente resultado que se conoce como Teorema Espectral para operadores compactos y autoadjuntos.

**Teorema A.1.** *Si  $A \in \mathcal{L}(H)$  es un operador lineal, acotado, compacto y autoadjunto en un espacio Hilbert  $H$ , entonces  $H$  tiene una base ortonormal  $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de funciones propias de  $A$ . Además,  $Au_j = \lambda_j u_j$  donde  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números reales que solo tiene a 0 como punto de acumulación.*

El Teorema Espectral tiene una formulación más elaborada para operadores autoadjuntos en general. En [Tay11b, Capítulo 8] se puede encontrar una demostración de este resultado. Para aplicarlo consideramos el operador trasladado del Laplaciano.

**Lema A.2.** *La aplicación*

$$-\Delta + 1 : H^1(\mathbb{M}) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{M}), \quad (\text{A.5})$$

*es biyectiva y su inversa*

$$T : H^{-1}(\mathbb{M}) \longrightarrow H^1(\mathbb{M}) \quad (\text{A.6})$$

*define un operador autoadjunto y compacto en  $L^2(\mathbb{M})$ .*

*Demostración.* Por ser  $\partial\mathbb{M} = \emptyset$ , es claro que  $((-\Delta + 1)u, u) = \|u\|_{L^2(\mathbb{M})}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{M})}^2 = \|u\|_{H^1(\mathbb{M})}^2$  para todo  $u \in H^1(\mathbb{M})$ . La inyectividad es trivial de esta identidad. Supongamos ahora que no fuera sobreyectiva. En ese caso, habría de existir un  $u_0 \in H^{-1}(\mathbb{M})^* = H^1(\mathbb{M})$  no nulo y ortogonal a toda la imagen del operador, esto es,

$$((-\Delta + 1)u, u_0) = 0 \quad \forall u \in H^1(\mathbb{M}). \quad (\text{A.7})$$

En particular, tomando  $u = u_0$  llegamos a contradicción con la no nulidad de  $u_0$ . Como hemos probado que el operador es biyectivo, podemos ahora definir su aplicación inversa  $T : H^{-1}(\mathbb{M}) \rightarrow H^1(\mathbb{M})$ . Comprobemos ahora que es autoadjunto.

Para cualesquiera  $\phi, \psi \in H^{-1}(\mathbb{M})$  existen únicos  $u, v \in H^1(\mathbb{M})$  cumpliendo que  $(-\Delta + 1)u = \phi$  y  $(-\Delta + 1)v = \psi$ . La frontera que sabemos vacía de  $\mathbb{M}$ , de nuevo, nos permite comprobar que  $((-\Delta + 1)u, v) = (u, (-\Delta + 1)v)$  e inmediatamente:

$$(T\phi, \psi) = (u, (-\Delta + 1)v) = ((-\Delta + 1)u, v) = (\phi, T\psi). \quad (\text{A.8})$$

Hemos comprobado que el operador  $T$  es simétrico. Estamos en condiciones de aplicar el siguiente resultado conocido de análisis funcional:

**Lema A.3.** *Si  $T : H \rightarrow H$  es simétrico y su rango  $\text{rank}(T)$  cumple que  $\mathcal{R}(T) = H$ , entonces  $T$  es autoadjunto.*

Gracias a este lema podemos afirmar, como queríamos, que  $T$  es autoadjunto,  $T = T^*$ .

Finalmente, restringimos el dominio de  $T$  al espacio  $L^2(\mathbb{M})$ . Dado un  $\phi \in L^2(\mathbb{M})$  tomamos  $u \in H^1(\mathbb{M})$  como antes y notamos que

$$\|u\|_{H^1}^2 = ((-\Delta + 1)u, u) \leq \|(-\Delta + 1)u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|(-\Delta + 1)u\|_{L^2} \|u\|_{H^1}. \quad (\text{A.9})$$

De donde deducimos que  $T$  es un operador acotado de  $L^2(\mathbb{M})$  a  $H^1(\mathbb{M})$ :

$$\text{Para todo } \phi \in L^2(\mathbb{M}), \|T\phi\|_{H^1(\mathbb{M})} \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{M})}. \quad (\text{A.10})$$

Para concluir, componemos con la inclusión  $i : H^1(\mathbb{M}) \rightarrow L^2(\mathbb{M})$  y aplicamos el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov para ver que  $T : L^2(\mathbb{M}) \rightarrow L^2(\mathbb{M})$  es un operador compacto.  $\square$

Gracias a este lema podemos aplicar el teorema espectral A.1 al operador  $T$  y obtener el resultado siguiente.

**Teorema A.2.** *Sea  $\mathbb{M}$  una variedad riemanniana cerrada, entonces  $L^2(\mathbb{M})$  admite una base ortonormal de autofunciones del Laplaciano  $-\Delta$ ,  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  asociadas a valores propios  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Además,  $\lambda_k \geq 0$  para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\lambda_k \nearrow \infty$  y  $\lambda_0 = 0$  con la correspondiente  $u_0 = \text{constante}$ .*

*Demostración.* Aplicamos el Teorema Espectral al operador  $T$  y encontramos una base ortonormal de funciones  $\{u_k\} \subseteq L^2(\mathbb{M})$  cumpliendo que

$$Tu_k = \mu_k u_k, \quad (\text{A.11})$$

para una cierta sucesión  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de números no negativos y menores que uno. Observemos que para todo  $\phi \in L^2(\mathbb{M})$ ,

$$(T\phi, \phi) = \|T\phi\|_{H^1} \geq 0. \quad (\text{A.12})$$

Luego  $T$  es un operador positivo y, por tanto, los valores propios  $\mu_k$  son no negativos.

Aplicar el lema A.1 en nuestro caso nos permite concluir que  $\|T\|$  es el mayor valor propio que encontramos. Por lo visto en (A.10),  $\|T\| \leq 1$ , y al aplicar el operador a la constante  $\frac{1}{|\mathbb{M}|^{1/2}}$  obtenemos la igualdad. En definitiva,  $\mu_0 = \|T\| = 1 \geq \mu_k$ .

A. El problema de autovalores

Observemos que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ :

$$-\Delta u_k + u_k = \frac{-\Delta + 1}{\mu_k} \mu_k u_k = \frac{-\Delta + 1}{\mu_k} T u_k = u_k \frac{1}{\mu_k}, \quad (\text{A.13})$$

e inmediatamente

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k = u_k \left( \frac{1}{\mu_k} - 1 \right). \quad (\text{A.14})$$

El resto de comprobaciones son obvias (v. gr.  $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0} - 1 = 0$ ) y se siguen de las propiedades de los valores propios  $\mu_k$  que nos da el Teorema Espectral.  $\square$

Cabe mencionar que resultados clásicos de regular para ecuaciones elípticas nos permiten definir estos operadores en espacios de Sobolev de orden mayor y ver que, de hecho, conservan las propiedades que son de nuestro interés. Se puede encontrar en [Tay11a, Capítulo 5] el siguiente resultado.

**Proposición A.1.** *Para cualquier  $s \in \mathbb{R}$  tenemos bien definidos los operadores*

$$T : H^s(\mathbb{M}) \longrightarrow H^{s+2}(\mathbb{M}) \text{ y } -\Delta + 1 : H^{s+2}(\mathbb{M}) \longrightarrow H^s(\mathbb{M}), \quad (\text{A.15})$$

son inversos el uno del otro y se cumple la estimación

$$\|u\|_{H^{k+1}}^2 \leq C \|(-\Delta + 1)u\|_{H^{k-1}}^2 + C \|u\|_{H^k}^2, \quad (\text{A.16})$$

para todo  $u \in H^{k+1}(\mathbb{M})$ .

A continuación veremos que la base de autofunciones que hemos construido nos permite acotar la norma  $H^k(\mathbb{M})$  de cualquier función  $u$  en términos de potencias de los autovalores. La demostración de este hecho se basa fuertemente en la teoría de operadores pseudodiferenciales por lo que, previo a enunciar este teorema, haremos un repaso de las herramientas que necesarias. Se puede leer más a este respecto en cualquier libro de referencia, por ejemplo, [Tay11b].

**Definición A.3.** Dado un operador diferencial

$$p(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (\text{A.17})$$

donde  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ ,  $D_j = (1/i)\partial/\partial x_j$ . Definimos su símbolo o polinomio característico como la función

$$p(x, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \zeta^\alpha. \quad (\text{A.18})$$

Esta definición surge naturalmente al estudiar (al menos de manera formal) la transformada de Fourier. Recordemos que la transformada de una función  $f$  de  $\mathbb{R}^d$  se define como  $\hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \zeta} dx$ . Del mismo modo, es bien conocida la fórmula de inversión, que afirma que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\zeta) e^{i\zeta \cdot x} d\zeta. \quad (\text{A.19})$$

Al derivar en (A.19) deducimos de las propiedades de la transformada inversa que

$$D^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \zeta^\alpha \hat{f}(\zeta) e^{i\zeta \cdot x} d\zeta. \quad (\text{A.20})$$

Aplicando el operador diferencial  $p(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$  llegamos a la fórmula

$$p(x, D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \quad (\text{A.21})$$

donde  $p(x, \xi)$  es el símbolo del operador de partida. Este cálculo nos invita a definir la siguiente generalización del concepto de operador diferencial, permitiendo a  $p$  ser una función más general que un polinomio.

**Definición A.4.** Un operador pseudodiferencial  $P(x, D)$  en  $\mathbb{R}^d$  es un operador cuyo valor en una función  $u$  con la regularidad adecuada es la aplicación de  $x$  dada por

$$P(x, D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} P(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (\text{A.22})$$

donde  $P(x, \xi)$  es un símbolo cumpliendo ciertas propiedades.

El estudio de qué propiedades exigir al símbolo  $P$  conforma toda una teoría en desarrollo que se puede estudiar, por ejemplo, en [Tay74]. De ello depende, entre otras cosas, los espacios de funciones entre los que actúa el operador resultante. El ejemplo más común es el siguiente.

**Definición A.5.** Dados  $\rho, \delta \in [0, 1]$  y  $m \in \mathbb{R}$  definimos el espacio  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^d)$  como aquel compuesto por las funciones  $p(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  que cumplen

$$\left| D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (\text{A.23})$$

para todos los multiíndices  $\alpha, \beta$  y todos los puntos  $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ , donde  $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ . En ese caso, decimos que el operador asociado (definido como en (A.21)) pertenece al espacio  $OPS_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^d)$ . Decimos que  $m$  es el orden de ese operadores. El caso que más nos interesa es el de  $\rho = 1, \delta = 0$ , donde  $S_{1, 0}^m(\mathbb{R}^d)$  recibe el nombre de «clase de Hörmander», en honor al matemático de origen sueco.

La importancia de esta clase de operadores pseudodiferenciales radica en la relación que tiene con las funciones del espacio Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  (i.e. funciones suaves con decrecimiento rápido), que se codifica en el siguiente resultado de demostración sencilla.

**Lema A.4.** Si  $\rho, \delta \in [0, 1]$  y  $p(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$ , entonces  $p(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Si ahora  $\mathbb{M}$  es una variedad riemanniana (sin borde) con un recubrimiento por cartas dado por  $\{(\Omega_j, F_j)\}_{j \in I'}$ , sería natural decir que un operador  $P$  actuando en  $C^\infty(\mathbb{M})$  es un operador pseudodiferencial en  $OPS_{\rho, \delta}^m(\mathbb{M})$  si los operadores  $P \circ F_j^{-1}$  definidos en  $C^\infty(F_j(\Omega_j))$  son operadores pseudodiferenciales en la clase  $OPS_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^d)$ .

Intuitivamente, estamos pidiendo que  $P$  se pueda transformar localmente en operadores pseudodiferenciales de  $\mathbb{R}^d$  a través de las aplicaciones coordenadas. Si la variedad  $\mathbb{M}$  es no compacta, esta definición no es suficientemente precisa: tendremos que imponer restricciones específicas acerca de su decaimiento en infinito. No indagaremos en este tema, sino que nos restringimos en lo sucesivo a variedades cerradas, donde estos problemas no aparecen.

Es claro de la discusión seguida que todos los operadores diferenciables son también pseudodiferenciables y, además, es posible obtener operadores pseudodiferenciales a partir de otros ya definidos por medio transformaciones elementales de sus símbolos: en particular,

A. El problema de autovalores

la composición de dos operadores pseudodiferenciales,  $p(x, D)$  y  $p'(x, D)$  de órdenes  $m$  y  $m'$  respectivamente, es a su vez un operador diferencial de orden  $m + m'$  (en  $S_{\rho, \delta}^{m+m'}$ ).

Un resultado general de R. Seeley [Nir11, Págs. 169-308] nos proporciona nuevos operadores pseudodiferenciales a partir de uno dado en una variedad riemanniana compacta, bajo la condición de que sea elíptico.

**Definición A.6.** Decimos que  $p(x, D) \in OPS_{\rho, \delta}^m$  es elíptico si, para algún  $r < \infty$ , se cumple  $|p(x, \xi)^{-1}| \leq C\langle \xi \rangle^{-m}$ , para todo  $|\xi| \geq r$ .

La siguiente definición pertenece al análisis funcional y se puede consultar en la mayoría de monografías dedicadas al respecto, p. ej. en [Lun18, Capítulo 4].

**Definición A.7.** Dado un operador lineal y positivo  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  donde  $D(A)$  es el dominio del operador y  $X$  es un espacio de Hilbert, recordemos que podemos expresar la resolvente de  $A$  como  $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$ , donde  $T(t)$  es el semigrupo generado por  $A$  que cumple  $\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}$  para un cierto  $\lambda > -\omega$  y  $\omega > 0$ . Entonces, para todo  $z \in \mathbb{C}$  definimos

$$A^z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^z R(\lambda, A) d\lambda, \quad (\text{A.24})$$

para cualquier curva regular a trozos  $\gamma$  rodeando el espectro de  $A$ ,  $\sigma(A)$ , con índice 1.

Estamos en condiciones de enunciar el teorema hacia el que nos dirigíamos.

**Teorema A.3.** Sea  $\mathbb{M}$  una variedad riemanniana y compacta, sea  $A$  un operador pseudodiferencial, elíptico, autoadjunto y positivo de orden  $k$ , entonces para todo  $z \in \mathbb{C}$  el operador  $A^z$  es a su vez un operador pseudodiferencial de orden  $k \cdot \Re(z)$ .

La demostración de este teorema se puede encontrar en el artículo original de Seeley [Shu11, Capítulo II] y es bastante técnica. Sin embargo, para nuestro propósito solo necesitamos un caso muy concreto cuya demostración es mucho más sencilla y se puede encontrar en [Tay74, Capítulo XII].

**Corolario A.1.** El operador  $\sqrt{-\Delta}$  es un operador pseudodiferencial elíptico de orden uno y, por tanto, para todo multiíndice  $\alpha$ , el operador  $\nabla^\alpha \Delta^{-\frac{|\alpha|}{2}}$ , es un operador pseudodiferencial de orden cero.

Hay gran cantidad de acotaciones para las imágenes de los operadores pseudodiferenciales que se pueden consultar, por ejemplo, en [Tay74] o en [Hör94]. El más interesante para nosotros es el siguiente:

**Teorema A.4.** Si el operador  $p(x, D) \in OPS_{\rho, \delta}^0$  para cualesquiera  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ , entonces

$$p(x, D) : L^2(\mathbb{M}) \rightarrow L^2(\mathbb{M}), \quad (\text{A.25})$$

y, para toda  $v \in L^2(\mathbb{M})$  se cumple que  $\|p(x, D)v\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L^2}$ .

Claramente, por como lo hemos definido, el operador  $\nabla^\alpha \Delta^{-\frac{|\alpha|}{2}}$  está bajo las hipótesis de este teorema, por lo que sabemos que para todo  $v \in L^2(\mathbb{M})$  se tiene la desigualdad

$$\left\| \nabla^\alpha \Delta^{-\frac{|\alpha|}{2}} v \right\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L^2} \text{ para cierto } C. \quad (\text{A.26})$$

Usaremos todas estas herramientas para probar el resultado siguiente que nos permite relacionar la norma  $H^l$  con las potencias  $l$ -ésimas de los valores propios del Laplaciano.

**Teorema A.5.** Sea  $\{u_k\}$  la base de  $L^2(\mathbb{M})$  construida en A.2 y  $\{\lambda_k\}$  la sucesión de valores propios asociada a ella. Sea  $l \in \mathbb{N}$  y  $u \in H^l(\mathbb{M}) \subset L^2(\mathbb{M})$  que se descompone como  $u = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k$ , entonces se tiene  $\|u\|_{H^l(\mathbb{M})}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^l |\beta_k|^2$ .

*Demostración.* Para cada  $u \in H^l(\mathbb{M})$ , consideramos  $\Delta^{\frac{|\alpha|}{2}} u \in L^2(\mathbb{M})$  y lo sustituimos en (A.26). De ahí

$$\|\nabla^\alpha u\|_{L^2} \leq C \left\| \Delta^{\frac{|\alpha|}{2}} u \right\|_{L^2}. \quad (\text{A.27})$$

Tomando todos los multiíndices posibles con  $|\alpha| = l$  obtenemos

$$\|u\|_{H^l}^2 \leq C \left\| \Delta^{\frac{l}{2}} u \right\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 = C \langle u, -\Delta^l u \rangle + \|u\|_{L^2}^2; \quad (\text{A.28})$$

donde hemos usado propiedades habituales de las normas de espacios Sobolev (que podemos aplicar por ser la frontera  $\partial\mathbb{M} = \emptyset$ ) y también que

$$\left\| \Delta^{\frac{l}{2}} u \right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{M}} \left( \Delta^{\frac{l}{2}} u \right)^2 = - \int_{\mathbb{M}} \Delta^l u \cdot u, \quad (\text{A.29})$$

de nuevo, por ser  $\partial\mathbb{M} = \emptyset$ . A continuación, desarrollamos  $u$  en la base que hemos construido y vemos que

$$\|u\|_{H^l}^2 \leq C \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j u_j, \sum_{k=0}^{\infty} -\Delta^l u_k \beta_k \right\rangle + \|u\|_{L^2}^2 = C \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j u_j, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^l u_k \beta_k \right\rangle + \|u\|_{L^2}^2. \quad (\text{A.30})$$

Al ser una base ortonormal, es entonces inmediato que  $\|u\|_{H^l}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \lambda_k^l$ , como queríamos demostrar.  $\square$



## B. Funciones elementales

En este apéndice el lector encontrará una lista de todas aquellas funciones bien conocidas y comúnmente utilizadas en matemáticas de las que se hace uso en estas notas: algunos polinomios ortogonales y la función Gamma hacen su aparición entre otras. En aquellos casos que sea necesario, se incluirán algunas propiedades de ellos que serán referenciadas a lo largo del texto.

En las siguientes páginas recopilaremos información de diversas fuentes entre las que se encuentran algunas monografías como [DLMF], [Sze39], [ASR88], ... y algunas páginas de internet como [Wikipedia](#) o [Wolfram](#).

### B.1. Función Gamma

La función gamma (denotada como  $\Gamma(z)$ , donde  $\Gamma$  es la letra griega gamma en mayúscula), es una aplicación que extiende el concepto de factorial a los números reales y complejos. La notación fue propuesta por Adrien-Marie Legendre. Si la parte real del número complejo  $z$  es positiva, entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{B.1})$$

converge absolutamente. Esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo, excepto a los enteros negativos y al cero. Si  $n \in \mathbb{Z}^+$  entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (\text{B.2})$$

lo que nos muestra la relación de esta función con el factorial. De hecho, la función gamma extiende el concepto de factorial a cualquier valor complejo de  $z$ . Las propiedades de esta función han sido estudiadas en profundidad por aparecer en contextos tan comunes como la fórmula para el área y el volumen de una esfera de dimensión genérica  $n$ , análisis complejo, problemas de integración, etc.

Destacamos, en particular, la fórmula de Stirling para aproximar el comportamiento de la función  $\Gamma$  para una variable real positiva creciente:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x + \mathcal{O}(x^{-1}), \quad (\text{B.3})$$

que será de utilidad en el capítulo 3. Toda esta información y mucha más se puede encontrar en el siguiente [enlace](#).

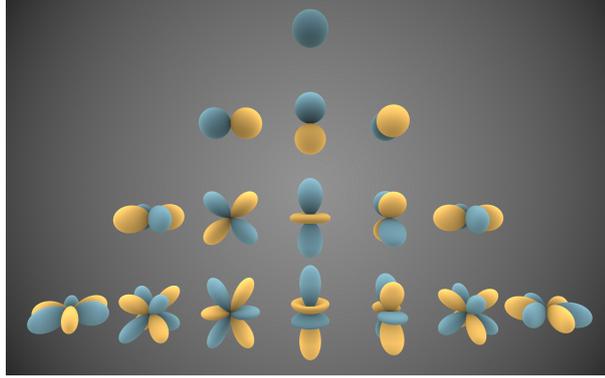


Figura B.1.: Representación visual de los primeros esféricos armónicos reales. Las partes azules representan regiones donde la función es positiva, y las porciones amarillas representan cuando es negativa. La distancia de la función al origen indica el valor absoluto de  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  en la dirección angular  $(\theta, \phi)$ . Imagen tomada de [Wikipedia](#) cedida por Inigo.quilez

## B.2. Esféricos armónicos

Los armónicos esféricos son funciones armónicas que representan la variación espacial de un conjunto ortogonal de soluciones de la ecuación de Laplace cuando la solución se expresa en coordenadas esféricas. Son funciones importantes en muchas aplicaciones teóricas y prácticas, en particular en la física atómica (dado que la función de onda de los electrones contiene armónicos esféricos) y en la teoría del potencial, que resulta relevante tanto para el campo gravitatorio como para la electrostática.

La ecuación de Laplace impone que el Laplaciano de una función escalar  $f$  sea cero. Si consideramos esta ecuación en coordenadas esféricas y tomamos la solución de la parte angular llegamos de forma natural a la idea de esféricos armónicos  $Y_{lm} : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Estos son productos de funciones trigonométricas y polinomios de Legendre asociados:

$$Y_{lm} = \begin{cases} (-1)^m \sqrt{2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^{|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\varphi) & \text{if } m < 0 \\ \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell^m(\cos \theta) & \text{si } m = 0 \\ (-1)^m \sqrt{2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) & \text{si } m > 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$Y_{lm}$  es un esférico armónico de grado  $l$  y orden  $m$ , y cumple la ecuación:

$$r^2 \Delta Y_{lm} = -l(l+n-2) Y_{lm}. \quad (\text{B.5})$$

Aquí  $l$  toma los valores  $1, 2, 3, \dots$ , y  $m$  varía entre 0 y  $M(k, d)$ , donde

$$M(k, d) := \binom{k+d-1}{k} \frac{2k+d-1}{k+d-1}. \quad (\text{B.6})$$

En ocasiones a lo largo de este trabajo notaremos por  $Y_l$  a una combinación lineal de esféricos armónicos de grado  $l$  (y cualquier orden  $m$ ). Prevenimos al lector de las carencias de esta notación. Otra forma de definir estas funciones más alejada de la física y cercana a las

matemáticas es la siguiente: dado un polinomio  $P(x)$  homogéneo y armónico de grado  $m$  sobre  $\mathbb{R}^d$  se denomina armónico esférico de grado  $m$  a la función obtenida como restricción de  $P(x)$  a la  $(d-1)$ -esfera  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ . Los armónicos esféricos forman un conjunto completo ortonormal de funciones y por lo tanto forman un espacio vectorial análogo a vectores unitarios de la base. Sobre la esfera unitaria, toda función de cuadrado integrable puede, por lo tanto, ser expandida como una combinación lineal de:

$$f(\omega) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(l,d)} f_l^m Y_{lm}(\omega). \quad (\text{B.7})$$

Haremos uso de esta propiedad en cuantiosas ocasiones. Es posible encontrar estas y otras muchas propiedades importantes [aquí](#).

### B.3. Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel, primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas  $y(x)$  de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad (\text{B.8})$$

donde  $\alpha$  es un número real o complejo. El caso más común es cuando  $\alpha$  es un entero  $n$ , aunque la solución para  $\alpha$  no entero es similar. El número  $\alpha$  se denomina orden de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden, tiene dos soluciones linealmente independientes.

#### B.3.1. Funciones de Bessel de primera especie: $J_\alpha$

Las funciones de Bessel de primera especie (o, simplemente, funciones de Bessel) y orden  $\alpha$  son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ( $x = 0$ ) para  $\alpha$  enteros o positivos y divergen en el límite  $x \rightarrow 0$  para  $\alpha$  negativo no entero. Nos interesarán las siguientes representaciones integrales y fórmulas de derivación:

- $$J_\nu(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} z^\nu \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt; \mathcal{R}(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (\text{B.9})$$

- $$\frac{\partial (z^\nu J_\nu(z))}{\partial z} = z^\nu J_{\nu-1}(z). \quad (\text{B.10})$$

que son, respectivamente, las fórmulas 10.9.4 y 10.6.6 de [\[DLMF\]](#).

#### B.3.2. Funciones de Bessel de segunda especie: $Y_\alpha$

Las funciones de Bessel de segunda especie, denotadas por  $Y_\alpha(x)$ , son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que divergen en el origen, es decir  $x = 0$ . A estas funciones  $Y_\alpha(x)$  también se les llama a veces funciones de Neumann o de Weber. Para números  $\alpha$  no

## B. Funciones elementales

enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie  $J_\alpha(x)$  mediante la siguiente fórmula:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z} \quad (\text{B.11})$$

En el caso en el que tengamos un orden entero  $n$ , la función es definida como el siguiente límite:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.12})$$

que proporciona el siguiente resultado en forma integral:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-x \sinh t} dt \quad (\text{B.13})$$

Para el caso en el que tengamos un  $\alpha$  no entero, la definición de  $Y_\alpha(x)$  es redundante (como queda claro por su definición de arriba). Por otro lado, cuando  $\alpha$  es entero,  $Y_\alpha(x)$  es la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel.

*Observación B.1.* En algunos momentos a lo largo de estas notas (en particular, por ejemplo, en la sección 2.1.1) utilizaremos la notación  $Y_l$  no para referirnos a una función de Bessel de segundo orden sino para un hiperesférico armónico real (cuando no estemos interesados en saber el valor del parámetro  $m$  en el hiperesférico armónico  $Y_{lm}$  o cuando se trate de una combinación lineal de varios de estos  $m_1, \dots, m_n$ ). Si bien esta coincidencia puede parecer confusa, cuando hagamos uso de este abuso de notación será previamente indicado al lector.

### B.3.3. Otras funciones de Bessel

Existen otras formulaciones importantes de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel: las funciones de Hankel, las funciones de Bessel modificadas, las funciones de Bessel esféricas, etc. Estas últimas aparecen al resolver la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas por separación de variables, se denotan por  $j_n(x)$  e  $y_n(x)$  y se relacionan con las funciones de Bessel ordinarias  $J_n(x)$  e  $Y_n(x)$  por [ASR88]:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \quad (\text{B.14})$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x). \quad (\text{B.15})$$

Estaremos particularmente interesados en el decaimiento de  $j_n$ :

$$j_n(r) = r^{-1} \sin\left(r - \frac{1}{2}n\pi\right) + e^{|\mathcal{I}r|} \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (\text{B.16})$$

cuando  $r \rightarrow \infty$ .

*Observación B.2.* Si bien la información aquí recogida ha sido extraída de la siguiente [web](#), una colección más extensa de propiedades de este tipo de funciones se puede encontrar [aquí](#).

## B.4. Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre son una familia de polinomios ortogonales, llamados así en honor de Edmond Laguerre, surgen al examinar las soluciones a la ecuación diferencial:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0. \quad (\text{B.17})$$

Puede verse que siempre que  $n$  sea natural se anula el coeficiente de toda potencia mayor (y distinta) que  $n$ . Esto es, una de las soluciones linealmente independientes es un polinomio de grado  $n$  (polinomio de Laguerre de orden  $n$ , que notaremos por  $L_n(x)$ ). Para encontrar la otra solución linealmente independiente han de estudiarse las soluciones de la ecuación más general  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ . El polinomio de Laguerre de orden  $n$  puede definirse como sigue:  $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ . Que tras desarrollar queda de la forma:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k. \quad (\text{B.18})$$

Estrechamente relacionadas con estos definimos los polinomios asociados de Laguerre, también llamados polinomios de Laguerre generalizados, son polinomios que cumplen la siguiente ecuación diferencial:

$$xy''(x) + (m+1-x)y'(x) + ny(x) = 0. \quad (\text{B.19})$$

Quedan definidos a partir de las derivadas de los polinomios de Laguerre:

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left( e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right) \quad m \leq n \quad (\text{B.20})$$

En el capítulo 2 estudiaremos el comportamiento asintótico de las autofunciones de la ecuación de Schrödinger (para distintos potenciales) cuya parte radial viene dada por estos polinomios utilizando para ello la fórmula asintótica de Hilb [Sze39]. Concretamente, obtendremos la fórmula

$$\begin{aligned} e^{-r^2/2r^1} L_k^{l+1/2}(r^2) &= A_{kl} j(\sqrt{\lambda_{kl}} r) + O(k^{(l-1)/2}) \\ \frac{d}{dr} \left[ e^{-r^2/2r^l} L_k^{l+1/2}(r^2) \right] &= \sqrt{\lambda_k} \left[ A_{kl} j'_i(\sqrt{\lambda_{kl}} r) + O(k^{(l-1)/2}) \right] \\ A_{kl} &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\lambda_{kl}}}{2} \right)^{-1} \frac{\Gamma(k+l+3/2)}{k!}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Estas y otras muchas propiedades de interés como los ceros, las singularidades, relaciones funcionales o ciertas fórmulas de derivación e integración se pueden encontrar en las referencias citadas: [Sze39], Wikipedia y la *Digital Library of Mathematical Functions*, en concreto el capítulo 18.

## B.5. Funciones de Legendre y otras relacionadas

Las funciones de Legendre  $P_\lambda$ ,  $Q_\lambda$  y las más generales funciones de Legendre asociadas  $P_\lambda^\mu$ ,  $Q_\lambda^\mu$  son todas ellas soluciones de la ecuación diferencial de Legendre. Los polinomios de Legendre y los polinomios de Legendre asociados son también soluciones de dicha ecuación diferencial en casos especiales, los cuales, en tanto que son polinomios, tienen gran cantidad

## B. Funciones elementales

de propiedades adicionales, estructura matemática y aplicaciones.

La ecuación de Legendre más general es la siguiente:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ \lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad (\text{B.22})$$

siendo los números  $\lambda$  y  $\mu$  complejos que reciben el nombre de grado y orden de la función relevante, respectivamente. Las soluciones son polinomiales cuando  $\lambda$  es un entero y  $\mu = 0$  y son los llamados polinomios de Legendre; y cuando  $\lambda$  es un entero y  $\mu$  otro, que reciben el nombre de polinomios de Legendre asociados. En el resto de casos diferenciamos si  $\mu = 0$  o no. Se trata de una ecuación lineal de segundo orden con tres puntos singulares (en  $1, -1$  y  $\infty$ ), por lo que se puede transformar en una ecuación diferencial hipergeométrica mediante un cambio de variable y sus soluciones se pueden expresar como funciones hipergeométricas  ${}_2F_1$ . Al ser una ecuación lineal de segundo orden tiene dos soluciones linealmente independientes:

- las funciones de Legendre asociadas de primer orden

$$P_\lambda^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[ \frac{1+z}{1-z} \right]^{\mu/2} {}_2F_1 \left( -\lambda, \lambda+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2} \right), \text{ para } |1-z| < 2, \quad (\text{B.23})$$

- y las funciones de Legendre asociadas de segundo orden

$$Q_\lambda^\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + \mu + 1)}{2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda + 3/2)} \frac{e^{i\mu\pi} (z^2 - 1)^{\mu/2}}{z^{\lambda+\mu+1}} {}_2F_1 \left( \frac{\lambda + \mu + 1}{2}, \frac{\lambda + \mu + 2}{2}; \lambda + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2} \right), |z| > 1. \quad (\text{B.24})$$

Como ya es habitual referimos al lector a las fuentes ya citadas ([DLMF](#) y [Wikipedia](#), especialmente) para encontrar gran cantidad de información al respecto de estas funciones. Por ejemplo, el decaimiento de las funciones  $Q_\lambda^\mu(z)$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$  será de vital importancia en el capítulo 5 y se puede encontrar estudiada en detalle [aquí](#). *Grosso modo*, lo que encontramos es que

$$\begin{aligned} Q_\lambda^\mu(x) &\sim \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda + \frac{3}{2})(2x)^{\lambda+1}} \\ \lambda &\neq -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \dots \\ Q_{-n-(1/2)}^\mu(x) &\sim \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\mu+n+\frac{1}{2})}{n! \Gamma(\mu-n+\frac{1}{2})(2x)^{n+(1/2)}} \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \mu - n + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Un caso concreto dentro de las funciones de Legendre asociadas de primer orden son las conocidas como funciones de Legendre asociadas cónicas o de Mehler:  $\lambda = -1/2 - i\nu$ , donde  $\nu$  es un valor real. La mayoría de propiedades de estas funciones se pueden deducir de las más generales para funciones asociadas de Legendre, pero algunas características particulares se pueden leer [aquí](#).

## B.6. Polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi (ocasionalmente llamados polinomios hipergeométricos)  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  son una clase de polinomios ortogonales. Los polinomios de Gegenbauer o hiperesféricos, y por lo tanto también los polinomios de Legendre, polinomios de Zernike y polinomios de

Chebyshev, son casos especiales de los polinomios de Jacobi. Estos importantes polinomios se pueden definir de varias formas equivalentes:

- Por medio de la función hipergeométrica como sigue

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, 1 + \alpha + \beta + n; \alpha + 1; \frac{1}{2}(1 - z)\right), \quad (\text{B.26})$$

donde  $(\alpha + 1)_n$  es el símbolo de Pochhammer. En este caso, la serie que define la función hipergeométrica es finita (por ser el parámetro  $a = -n$  un entero no positivo), por lo que podemos obtener la expresión equivalente:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + m + 1)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^m. \quad (\text{B.27})$$

Tal vez sea de utilidad para el lector recordar que la función hipergeométrica se define para  $|z| < 1$  por la serie de potencias

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots. \quad (\text{B.28})$$

Esta no está definida o vale infinito si  $c$  es un entero no positivo ya que  $(q)_n$  es, como ya hemos dicho, el símbolo de Pochhammer, que se define como

$$(q)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ q(q+1) \cdots (q+n-1) & n > 0. \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

De esta forma es trivial notar que la serie se reduce a una suma finita si  $a$  o  $b$  es un entero no positivo.

- Por la fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ (1-z)^\alpha (1+z)^\beta (1-z^2)^n \right\}. \quad (\text{B.30})$$

Si  $\alpha = \beta = 0$  se reduce a los polinomios de Legendre:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (\text{B.31})$$

- Como soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$(1 - x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0. \quad (\text{B.32})$$

- Otras posibilidades que se pueden leer [aquí](#).

La representación de polinomios de Jacobi como funciones hipergeométricas nos permite deducir gran cantidad de propiedades de los mismos. De entre todas ellas, nos permitimos destacar aquí la que resulta de vital importancia en el capítulo 4: para valores muy grandes del parámetro  $\beta$ , los polinomios de Jacobi se comportan como los de Laguerre. Más

B. Funciones elementales

concretamente, [Sze39, Formula 5.3.4]:

$$L_n^{(\alpha)}(r) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha; \beta)}(1 - 2\beta^{-1}r). \quad (\text{B.33})$$

Será de nuestro interés una propiedad concreta de los polinomios de Jacobi conocida como fórmula de Darboux. Esta afirma que

$$\frac{1}{N^{\frac{n}{2}-1}} P_N^{\left(\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1\right)}\left(\cos \frac{t}{N}\right) = 2^{\frac{n}{2}-1} \frac{J_{\frac{n}{2}-1}^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(t)}{t^{\frac{n}{2}-1}} + O\left(N^{-1}\right), \quad (\text{B.34})$$

uniformemente en conjuntos compactos. En el caso concreto de los polinomios ultrasféricos o de Gegenbauer el conocido como teorema de adición que afirma que

$$C_k^d(p \cdot q) = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{M(k, d)} \sum_{j=1}^{M(k, d)} Y_{kj}(p) Y_{kj}(q), \quad (\text{B.35})$$

siento  $\{Y_{kj}\}_{j=1}^{M(k, d)}$  una base ortonormal arbitraria de esféricos armónicos con valor propio  $k(k + d - 1)$ . Animamos fuertemente al lector a recurrir a algunas de las fuentes citadas u otras de las muchas disponibles para leer más acerca de estas funciones.

## Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [AR67] Ralph Abraham and Joel Robbin. *Transversal mappings and flows*. New York, W.A. Benjamin, 1967. [Citado en págs. 55, 57, 68, and 75]
- [Arn65] Vladimir I. Arnold. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. In *Vladimir I. Arnold - Collected Works*, pages 15–18. Springer Berlin Heidelberg, 1965. [Citado en págs. 49 and 52]
- [Arn66] Vladimir I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Annales de l'institut Fourier*, 16(1):319–361, 1966. [Citado en pág. 49]
- [ASR88] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun, and Robert H. Romer. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. *American Journal of Physics*, 56(10):958–958, oct. 1988. [Citado en págs. 66, 74, 95, and 98]
- [Bä19] Christian Bär. The curl operator on odd-dimensional manifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 60(3):031501, mar. 2019. [Citado en pág. 29]
- [Ber01] Michael Berry. Knotted zeros in the quantum states of hydrogen. *Foundations of Physics*, 31(4):659–667, 2001. [Citado en pág. 53]
- [CDD18] Howard S. Cohl, Tinh H. Dang, and T.M. Dunster. Fundamental solutions and gegenbauer expansions of helmholtz operators in riemannian spaces of constant curvature. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, dic. 2018. [Citado en págs. 80 and 84]
- [CH15] Yaiza Canzani and Boris Hanin. Scaling limit for the kernel of the spectral projector and remainder estimates in the pointwise weyl law. *Analysis & PDE*, 8(7):1707–1731, sept. 2015. [Citado en pág. 17]
- [Cil93] Javier Cilleruelo. The distribution of the lattice points on circles. *Journal of Number Theory*, 43(2):198–202, feb. 1993. [Citado en pág. 26]
- [CS18] Yaiza Canzani and Peter Sarnak. Topology and nesting of the zero set components of monochromatic random waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 72(2):343–374, oct. 2018. [Citado en pág. 19]
- [DF88] Harold Donnelly and Charles Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on riemannian manifolds. *Inventiones mathematicae*, 93:161–183, 1988. [Citado en págs. xvii and 1]
- [dL18] Francisco Javier Torres de Lizaur. *Asymptotic techniques in the analysis of invariant manifolds of dynamical systems*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Madrid, jun. 2018. [Citado en pág. 56]
- [DLMF] NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.1.2 of 2021-06-15. F. W.J. Olver, A.B. Olde Daalhuis, D.W. Lozier, B.I. Schneider, R.F. Boisvert, C.W. Clark, B.R. Miller, B.V. Saunders, H.S. Cohl y M.A. McClain, eds. [Citado en págs. 95 and 97]
- [Duk88] William Duke. Hyperbolic distribution problems and half-integral weight maass forms. *Inventiones Mathematicae*, 92(1):73–90, feb. 1988. [Citado en pág. 33]
- [Duk03] William Duke. Rational points on the sphere. *The Ramanujan Journal*, 7(1/3):235–239, 2003. [Citado en págs. 26 and 32]

## Bibliografía

- [EGRPSa] Alberto Enciso, Alba García-Ruiz, and Daniel Peralta-Salas. Inverse localization and global approximation for some schrödinger operators on hyperbolic spaces. [Citado en págs. xviii, 61, 68, 79, and 86]
- [EGRPSb] Alberto Enciso, Alba García-Ruiz, and Daniel Peralta-Salas. Localization properties of high energy eigenfunctions on flat tori. [Citado en pág. 33]
- [EHPS18a] Alberto Enciso, David Hartley, and Daniel Peralta-Salas. Dislocations of arbitrary topology in coulomb eigenfunctions. *Revista Matemática Iberoamericana*, 34(3):1361–1371, agto. 2018. [Citado en págs. xviii, 31, 41, 43, 53, 61, and 62]
- [EHPS18b] Alberto Enciso, David Hartley, and Daniel Peralta-Salas. A problem of berry and knotted zeros in the eigenfunctions of the harmonic oscillator. *Journal of the European Mathematical Society*, 20(2):301–314, en. 2018. [Citado en págs. xviii, 38, 39, 53, 70, 71, and 76]
- [EJN07] Alexandre Eremenko, Dmitry Jakobson, and Nikolai Nadirashvili. On nodal sets and nodal domains on  $S^2$  and  $\mathbb{R}^2$ . *Annales de l'institut Fourier*, 57(7):2345–2360, 2007. [Citado en págs. xvi, 1, and 37]
- [EPS12] Alberto Enciso and Daniel Peralta-Salas. Knots and links in steady solutions of the euler equation. *Annals of Mathematics*, 175(1):345–367, en. 2012. [Citado en pág. 49]
- [EPS13a] Alberto Enciso and Daniel Peralta-Salas. Submanifolds that are level sets of solutions to a second-order elliptic PDE. *Advances in Mathematics*, 249:204–249, dic. 2013. [Citado en pág. 57]
- [EPS13b] Alberto Enciso and Daniel Peralta-Salas. Thin vortex tubes in the stationary euler equation. *Journées Équations aux dérivées partielles*, pages 1–13, 2013. [Citado en pág. 49]
- [EPS15a] Alberto Enciso and Daniel Peralta-Salas. Eigenfunctions with prescribed nodal sets. *Journal of Differential Geometry*, 101(2), oct. 2015. [Citado en págs. xvi and 1]
- [EPS15b] Alberto Enciso and Daniel Peralta-Salas. Existence of knotted vortex tubes in steady euler flows. *Acta Mathematica*, 214(1):61–134, 2015. [Citado en págs. 11, 12, 49, 50, and 51]
- [EPS16] Alberto Enciso and Daniel Peralta-Salas. Bounded solutions to the allen–cahn equation with level sets of any compact topology. *Analysis & PDE*, 9(6):1433–1446, oct. 2016. [Citado en pág. 85]
- [EPSdL17] Alberto Enciso, Daniel Peralta-Salas, and Francisco Torres de Lizaur. Knotted structures in high-energy beltrami fields on the torus and the sphere. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 50(4):995–1016, 2017. [Citado en págs. xviii, 30, and 50]
- [EPSdL21] Alberto Enciso, Daniel Peralta-Salas, and Francisco Torres de Lizaur. High-energy eigenfunctions of the laplacian on the torus and the sphere with nodal sets of complicated topology. In *Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications*, pages 245–261. Springer Singapore, 2021. [Citado en págs. xviii, 22, 25, 27, and 56]
- [Fol89] Gerald Folland. Harmonic analysis of the de rham complex on the sphere. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1989(398):130–143, jul. 1989. [Citado en pág. 29]
- [Gon17] Fedor Goncharov. Integrals of spherical harmonics with fourier exponents in multidimensions. No publicado, feb. 2017. [Citado en pág. 14]
- [Hö68] Lars Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Mathematica*, 121(0):193–218, 1968. [Citado en pág. 6]
- [Hö03] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer Berlin Heidelberg, 2003. [Citado en pág. 24]
- [Hör94] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1994. [Citado en pág. 92]

- [Inf41] Leopold Infeld. On a new treatment of some eigenvalue problems. *Physical Review*, 59(9):737–747, may. 1941. [Citado en pág. 59]
- [IS45] Leopold Infeld and Alfred Schild. A note on the kepler problem in a space of constant negative curvature. *Physical Review*, 67(3-4):121–122, feb. 1945. [Citado en pág. 59]
- [Kel69] William Thomson (Lord Kelvin). On vortex motion. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 25:217–260, 1869. [Citado en pág. 48]
- [Lis11] Samuel T. Lisi. Dividing sets as nodal sets of an eigenfunction of the laplacian. *Algebraic & Geometric Topology*, 11(3):1435–1443, may. 2011. [Citado en págs. xvi and 1]
- [Log18] Alexander Logunov. Nodal sets of laplace eigenfunctions: proof of nadirashvili's conjecture and of the lower bound in yau's conjecture. *Annals of Mathematics*, 187(1):241–262, en. 2018. [Citado en págs. xvii and 1]
- [Lun18] Alessandra Lunardi. *Interpolation Theory*. Publications of the Scuola Normale Superiore. Scuola Normale Superiore, 2018. [Citado en pág. 92]
- [Mas59] William S. Massey. On the normal bundle of a sphere imbedded in euclidean space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10(6):959–959, jun. 1959. [Citado en pág. 56]
- [ML74] P. M. Mathews and Muthusamy Lakshmanan. On a unique nonlinear oscillator. *Quarterly of Applied Mathematics*, 32(2):215–218, jul. 1974. [Citado en pág. 59]
- [Mof14] H. Keith Moffatt. Helicity and singular structures in fluid dynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(10):3663–3670, feb. 2014. [Citado en pág. 52]
- [MZ05] Jürgen Moser and Eduard Zehnder. *Notes on Dynamical Systems*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. [Citado en pág. 51]
- [nGF18] María Ángeles García Ferrero. *Global approximation theorems for partial differential equations and applications*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, en. 2018. [Citado en págs. 11, 79, and 86]
- [Nir11] Louis Nirenberg. *Pseudo-differential Operators: Lectures given at a Summer School of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Stresa (Varese), Italy, August 26-September 3, 1968*. C.I.M.E. Summer Schools. Springer Berlin Heidelberg, 2011. [Citado en pág. 92]
- [NS09] Fedor Nazarov and Mikhail Sodin. On the number of nodal domains of random spherical harmonics. *American Journal of Mathematics*, 131(5):1337–1357, 2009. [Citado en pág. 18]
- [NS16] Fedor Nazarov and Michail Sodin. Asymptotic laws for the spatial distribution and the number of connected components of zero sets of gaussian random functions. *Zurnal matematicheskoy fiziki, analiza, geometrii*, 12(3):205–278, sept. 2016. [Citado en pág. 18]
- [NWoo] John Nye and Francis J. Wright. Natural focusing and fine structure of light: Caustics and wave dislocations. *American Journal of Physics*, 68(8):776–776, agto. 2000. [Citado en pág. 53]
- [Que16] Christiane Quesne. Quantum oscillator and kepler–coulomb problems in curved spaces: Deformed shape invariance, point canonical transformations, and rational extensions. *Journal of Mathematical Physics*, 57(10):102101, oct. 2016. [Citado en págs. 62, 68, and 76]
- [Rono4] José Manuel Sánchez Ron. José echegaray: entre la ciencia, el teatro y la política. *Arbor*, CLXXIX(707/708):601–688, dic. 2004. [Citado en pág. 48]
- [Saf89] Yuri G. Safarov. Asymptotic of the spectral function of a positive elliptic operator without the nontrap condition. *Functional Analysis and Its Applications*, 22(3):213–223, 1989. [Citado en pág. 17]
- [Sch40] Erwin Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 46A:9–16, 1940. [Citado en pág. 59]

## Bibliografía

- [Scho3] Erwin Schrödinger. *Collected Papers on Wave Mechanics*. AMS Chelsea Publishing Series. American Mathematical Soc., 2003, 2003. [Citado en pág. 35]
- [Shu11] Mikhail A. Shubin. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2011. [Citado en pág. 92]
- [Ste41] James A. F. Stevenson. Note on the "kepler problem in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problems. *Physical Review*, 59(10):842–843, may. 1941. [Citado en pág. 59]
- [Ste93] Elias M. Stein. *Harmonic Analysis (PMS-43)*. Princeton University Press, dic. 1993. [Citado en págs. 7 and 8]
- [SZo2] Christopher D. Sogge and Steve Zelditch. Riemannian manifolds with maximal eigenfunction growth. *Duke Mathematical Journal*, 114(3), sept. 2002. [Citado en pág. 17]
- [Sze39] Gábor Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, dic. 1939. [Citado en págs. 38, 40, 65, 66, 73, 74, 95, 99, and 102]
- [Tao06] Terence Tao. *Nonlinear Dispersive Equations*. American Mathematical Society, jun. 2006. [Citado en págs. 47 and 67]
- [Tay74] Michael E. Taylor. *Pseudo Differential Operators*. Springer Berlin Heidelberg, 1974. [Citado en págs. 91 and 92]
- [Tay11a] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations I*. Springer New York, 2011. [Citado en págs. 87, 88, and 90]
- [Tay11b] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations II*. Springer New York, 2011. [Citado en págs. 88 and 90]
- [Uhl76] Karen Uhlenbeck. Generic properties of eigenfunctions. *American Journal of Mathematics*, 98(4):1059, 1976. [Citado en pág. 76]
- [Wey12] Hermann Weyl. Das asymptotische verteilungsgesetz der eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen (mit einer anwendung auf die theorie der hohlraumstrahlung). *Mathematische Annalen*, 71(4):441–479, dic. 1912. [Citado en pág. 17]
- [Whi17] Brian White. On the bumpy metrics theorem for minimal submanifolds. *American Journal of Mathematics*, 139(4):1149–1155, 2017. [Citado en pág. 76]
- [Yau82] Shing-Tung Yau, editor. *Seminar on Differential Geometry. (AM-102)*. Princeton University Press, dic. 1982. [Citado en págs. xvii and 1]
- [Zel96] Steven Zelditch. Maximally degenerate laplacians. *Annales de l'institut Fourier*, 46(2):547–587, 1996. [Citado en pág. 77]
- [Zolo3] Otto Zoll. Über flächen mit scharen geschlossener geodätischer linien. *Mathematische Annalen*, 57:108–133, 1903. [Citado en pág. 77]