Geometría con papiroflexia

Pablo Caldera Vela

(MESOB) Especialidad de Matemáticas

MÁSTERES DE LA UAM

2021-2022

Facultad de Formación de Profesorado

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Formación de Profesorado y Educación

Máster Universitario en Formación de Profesorado

de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

Curso 2021/22

Geometría con papiroflexia

Trabajo Fin de Máster

Alumno: Pablo Caldera Vela

Tutor académico: Eugenio Hernández Rodríguez

Tutor profesional: Mª Carmen Hurtado Velasco

Índice general

Resumen

En el presente trabajo de fin de máster se estudiará cómo el uso de la papiroflexia puede ayudar en el aprendizaje de geometría plana dentro del currículo de la materia de matemáticas de 3º ESO. Para ello se muestran los beneficios y limitaciones que tiene el uso de la papiroflexia como herramienta didáctica. El trabajo se centra en la presentación de un proyecto donde se recogen actividades enfocadas a trabajar la geometría plana a través de construcciones de papiroflexia, con su correspondiente puesta en práctica en un centro de la zona norte de Madrid. Se presentarán y analizarán los resultados de esta experiencia piloto del proyecto.

Palabras clave: papiroflexia, origami, aprendizaje, matemáticas, geometría, mapa de cicatrices, educación secundaria, 3º ESO.

1. Introducción

En este trabajo se pretende mostrar las ventajas y beneficios que tiene la papiroflexia como herramienta didáctica en el aprendizaje de la geometría. El plegado de papel puede brindarnos una oportunidad perfecta para trabajar conceptos geométricos del currículo de matemáticas en un aula de secundaria de una forma distinta a la tradicional. Para mostrar esto, el presente trabajo incluye una propuesta didáctica con la que trabajar geometría mediante el uso de la papiroflexia.

El proyecto se divide en siete capítulos. Los tres primeros son de corte más teórico mientras que los siguientes están orientados a la práctica.

El primer capítulo recoge la fundamentación teórica del proyecto, centrada en la teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget y la relación de matemáticas y papiroflexia con la teoría de aprendizaje significativo de Ausubel. A continuación se incluye la normativa vigente en España y la Comunidad de Madrid en el momento de aplicación del proyecto junto a los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados con el trabajo. Para terminar esta parte teórica, se dedica un capítulo a mostrar la historia de la papiroflexia y los principales beneficios que tiene en el alumno el empleo de este recurso como herramienta educativa.

El siguiente capítulo constituye la parte central del proyecto; en él se proponen una colección de actividades enfocadas a trabajar la geometría plana del currículo de 3º ESO a través de construcciones de papiroflexia. Asimismo se incluyen las soluciones a dichas actividades.

Por último, se describe la experiencia piloto del proyecto llevada a cabo en el IES Ángel Corella de Colmenar Viejo. Esta parte contiene la contextualización del centro, las principales características del grupo de estudiantes con los que se trabaja, el desarrollo de la propuesta didáctica y los cuestionarios realizados con el objetivo de recoger la opinión de los alumnos y la valoración de la actividad por parte de la profesora. Finalmente se dedica un capítulo a las principales conclusiones obtenidas del proyecto.

2. Fundamentación teórica

Con objeto de contextualizar la justificación teórica del uso de la papiroflexia en el aula de matemáticas se recurre a la teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget, concretamente a la etapa de las operaciones formales, por ser esta la fase en la que se encuentran la mayoría de estudiantes durante la educación secundaria obligatoria, para posteriormente, presentar una síntesis sobre la teoría del aprendizaje significativo y su relación con la papiroflexia y el proyecto didáctico que aquí proponemos.

2.1. Teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget

La teoría de Piaget describe cambios generales en las estructuras mentales y la capacidad de solución de problemas que tienen lugar durante la niñez y la adolescencia. Esta teoría, propuesta por el psicólogo suizo Jean Piaget, dice que los niños de diferentes edades piensan de manera distinta y que los cambios del desarrollo cognoscitivo se producen en distintos estadios bien definidos, donde cada estadio implica una forma diferente de pensar en el mundo (Piaget, 1972).

Piaget se centró en la forma en que cambia la cognición con la edad, su teoría se conoce como enfoque del desarrollo cognoscitivo. Según Piaget, la maduración es la fuerza que impulsa el desarrollo de un estadio al siguiente (Inhelder & Piaget, 1958). Todos tenemos información genética de nuestro desarrollo cognoscitivo que nos predispone para ciertos cambios a ciertas edades. Para que ocurra el desarrollo cognoscitivo se necesita un ambiente normal, pero el efecto del ambiente en el desarrollo cognoscitivo es limitado: no es posible enseñar a un niño de 8 años lo que sólo puede aprender uno de 13 años.

Este autor describe la maduración como un proceso activo en el cual los niños buscan en el ambiente información y estimulación que correspondan al grado de madurez de su pensamiento.

Los cuatro estadios e etapas fundamentales en que Piaget divide el desarrollo cognoscitivo son: estadio sensoriomotor (0-2 años), estadio pre-operacional (2-7 años), estadio de operaciones concretas (7-11 años) y estadio de operaciones formales (11-15 a 20 años).

2.1.1 Etapa de las operaciones formales

Ahora, incluiremos las principales características del estadio de las operaciones formales por ser la etapa en la que se encuentran la mayoría de alumnos durante la educación secundaria obligatoria y, más concretamente, los alumnos de 3º ESO, que son los principales receptores de la propuesta didáctica y de la experiencia piloto de los capítulos 5 y 6 del proyecto.

Según Piaget (1972), la etapa de las operaciones formales empieza alrededor de los 11 años y finaliza en algún momento entre los 15 y los 20 años.

En el estadio de las operaciones concretas los niños ya realizan tareas simples que requieren pensamiento lógico y sistemático, pero no es hasta las operaciones formales cuando los adolescentes razonan acerca de tareas y problemas complejos. En esta etapa, la de operaciones formales, el adolescente es capaz de pensar de manera lógica y abstracta, de formular hipótesis y probarlas de manera sistemática, y de pensar acerca del pensamiento. A esta capacidad para pensar acerca de sus propios pensamientos se conoce como metacognición. Con la metacognición los adolescentes toman conciencia de sus procesos de pensamiento de una manera que no tienen los niños; esto les permite razonar y supervisar sobre estos procesos, aprendiendo así a resolver mejor los problemas.

Según Inhelder y Piaget el período de las operaciones formales tiene las siguientes características (Inhelder & Piaget, 1958):

- Supone un cambio cualitativo de la capacidad mental en la pubertad o en torno a ella, es más que un aumento en la destreza cognitiva.
- El adolescente tiene un mayor poder de abstracción. Pensamiento lógico.
- El adolescente ya no necesitará partir de los datos reales presentes, porque las operaciones formales son operaciones lógicas que pueden efectuarse en ausencia de la situación concreta.
- Facilita pensar en los constructos mentales como objetos que se pueden manipular.
- Permite un razonamiento hipotético - deductivo y la comprobación experimental de las hipótesis.
- Maneja sistemas de relaciones y no datos aislados.
- El pensamiento lógico-formal se manifiesta más en tareas de razonamiento científico.

2.1.2. Aprendizaje activo

Otro de los aspectos de la teoría de Piaget que han tenido gran significación en pedagogía es la idea de que el alumno es un sujeto activo que elabora la información y es capaz de progresar por sí mismo (Saldarriaga-Zambrano, Bravo-Cedeño & Loor-Rivadeneira, 2016). Con este enfoque el alumno participa de su propio proceso de aprendizaje mediante el desarrollo del conocimiento y la comprensión: los conocimientos necesitan ser construidos activamente por el propio sujeto para poder realmente ser comprendidos (Rodríguez Arocho, 1999).

La papiroflexia, debido a su naturaleza manipulativa y experimental, puede ser un recurso conveniente a la hora de impulsar un aprendizaje activo en el alumno (Esteban Sanz, 2021).

2.2. Aprendizaje significativo de Ausubel

El término *"aprendizaje significativo"* fue acuñado por David Ausubel, psicólogo y pedagogo estadounidense que elaboró la *"Teoría del Aprendizaje Verbal Significativo"* (Ausubel, 1963).

El aprendizaje significativo tiene lugar cuando el alumno construye la realidad atribuyéndole significados de su propia experiencia. En esta línea, Coll Salvador (1990) afirma que se aprende de forma significativa cuando el alumno relaciona de forma sustantiva (significativa) y no arbitraria, los nuevos contenidos, con los que él ya sabe o conocimientos previos; y más recientemente, Rodríguez (2012) define el aprendizaje significativo como el proceso a través del cual una nueva información, un nuevo conocimiento, se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva con la estructura cognitiva de la persona que aprende.

En definitiva, el aprendizaje significativo es aquél que se produce cuando se establece una relación sustancial entre el contenido nuevo y los conocimientos previos del alumno.

Siguiendo a (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1976) las condiciones para que se produzca el aprendizaje significativo son:

- Que el contenido a aprender sea potencialmente significativo para el alumno. Esto implica que reúna dos condiciones:
  - Que tenga significatividad lógica: es decir, que la disciplina o el contenido esté estructurado y tenga una lógica interna, y que se presente al alumno de forma clara, organizada y coherente.

- Que tenga significatividad psicológica: los nuevos contenidos a aprender tienen que ser coherentes con el nivel cognitivo del alumno, es decir, que los pueda relacionar con los conocimientos previos.

- Que el alumno esté motivado para aprender significativamente, para ello, es necesario que el alumno tenga una actitud activa y positiva hacia el aprendizaje y un buen nivel de atención.
- Que el contenido a aprender sea funcional. La funcionalidad de los aprendizajes desde dos puntos de vista. Por un lado, que el alumno pueda utilizar los conocimientos aprendidos en otras situaciones y por otro lado, que esos aprendizajes le sirvan de base para abordar nuevos aprendizajes.
- Requiere una intensa actividad interna por parte del alumno.
- Es necesario por parte del alumno utilizar la memoria comprensiva, no sólo como recuerdo de lo aprendido, sino también como punto de partida para adquirir nuevos aprendizajes.

2.2.1. Relación entre aprendizaje significativo y papiroflexia

El uso de la papiroflexia en el aula está directamente relacionado con la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, especialmente por su carácter motivacional. Este incremento de motivación en el alumnado mediante el uso de papel se ve apoyado en (Azcoaga, 2013), estudio que comentaremos más adelante.

La motivación puede ser extrínseca, si es externa a la persona que realiza la acción y se suele asociar más a lo que se recibe a cambio, que a la propia actividad realizada en sí; o intrínseca, si sale de la persona que va a realizar dicha acción. Siendo las dos igualmente válidas para realizar cualquier actividad, la motivación intrínseca suele ser considerada como más efectiva puesto que se produce cuando un individuo realiza una acción solo por el mero placer de llevarla a cabo, el orgullo de haber conseguir el objetivo propuesto, la satisfacción de superarse a sí mismo y sentirse autorrealizado (Atkinson, 1964).

En este sentido, la papiroflexia puede ser el elemento perfecto para despertar la motivación intrínseca del alumnado con respecto a las matemáticas. El docente, por supuesto desempeñará un papel importante en el despertar del interés y motivación de los alumnos. Pero, no solo eso, es preciso que respete la significatividad lógica y psicológica de los nuevos contenidos. La geometría es una disciplina con lógica interna, pero es importante cómo se presentan al alumnado los nuevos contenidos.

Proponemos dos estrategias totalmente legítimas: por un lado, el docente puede reactivar en los estudiantes sus saberes geométricos mediante clases teóricas para, posteriormente, trabajar estos contenidos a través de actividades extraídas del uso del plegado de papel. Esta es la dinámica seguida en la experiencia piloto llevada al aula de la puesta en práctica de este proyecto. Por otra parte, el docente podría recurrir directamente a la papiroflexia para explicar, tanto conceptos geométricos conocidos por el alumnado, como contenidos nuevos que surjan de su uso.

Otra conexión entre papiroflexia y aprendizaje significativo es la funcionalidad de los aprendizajes. El alumnado verá en el uso de origami la funcionalidad de aprender geometría porque aplicará directamente los contenidos vistos al estudio de las figuras que construye. Sin olvidarnos de que el uso de la papiroflexia activará en el alumno una memoria comprensiva al abordar esta disciplina desde una forma lúdica.

3. Marco normativo

Este punto recoge la normativa vigente en España y la Comunidad de Madrid en el momento de la aplicación del proyecto. Adicionalmente, incluye los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados directamente con el trabajo.

3.1. Normativa estatal

- Ley Orgánica 8/2013 (BOE, 2013), de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa.

- Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2014), de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2014) recoge en su "*Artículo 11 (Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria)"* los objetivos de la etapa a la que se dirige el proyecto:

Artículo 11. Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria.

La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, *planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.*

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

(BOE, 2014)

- Real Decreto 83/1996 (BOE, 1996), de 26 de enero, por el que se aprueba el Reglamento orgánico de los institutos de Educación Secundaria.

- Orden ECD/65/2015 (BOE, 2015), de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

La Orden ECD/65/2015 (BOE, 2015) recoge en su "*Artículo 2 (Las competencias clave en el Sistema Educativo Español)"* las siete competencias clave para trabajar en el aula:

Artículo 2. Las competencias clave en el Sistema Educativo Español.

A efectos de esta orden, las competencias clave del currículo son las siguientes:

a) Comunicación lingüística.

b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

c) Competencia digital.

d) Aprender a aprender.

e) Competencias sociales y cívicas.

f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

g) Conciencia y expresiones culturales.

(BOE, 2015)

En relación con las competencias clave, añado un párrafo del "*Artículo 2 (Definiciones)*" del Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2014) donde se menciona el carácter integrativo de las competencias trabajadas mediante actividades.

"Para una adquisición eficaz de las competencias y su integración efectiva en el currículo, deberán diseñarse actividades de aprendizaje integradas que permitan al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se potenciará el desarrollo de las competencias Comunicación lingüística, Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología."

(BOE, 2014)

3.2. Normativa autonómica

- Decreto 48/2015 (BOCM, 2015), de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

- Decreto 39/2017 (BOCM, 2017), de 4 de abril, del Consejo de Gobierno, por el que se modifica el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

- Decreto 18/2018 (BOCM, 2018), de 20 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se modifica el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

- Instrucciones de 23 de junio de 2015 de la Dirección General de Educación Secundaria, Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial sobre organización de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en los centros de la Comunidad de Madrid durante el año académico 2015-2016.

3.2.1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

A continuación se presentan en una tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables recogidos en el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (BOCM, 2015), para la asignatura matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO que presentan una relación directa con el proyecto aquí expuesto.

Aunque es verdad que la propuesta didáctica que aquí presentamos no es ni mucho menos cerrada a un único curso, y por lo tanto tendría perfectamente sentido incluir los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO y para matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 3º ESO y 4º ESO, he decidido incluir únicamente los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados directamente con el proyecto para la asignatura matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO debido a que la experiencia piloto de la que se hablará más adelante tuvo lugar en un aula de estas características.

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO	
Bloque	Geometría
Contenidos	- Geometría del plano. - Rectas y ángulos en el plano. Relaciones entre los ángulos definidos por dos rectas que se cortan. - Lugar geométrico: mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo. - Polígonos. Circunferencia y círculo. Perímetro y área. - Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. - Teorema de Pitágoras. Aplicación a la resolución de problemas.
Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables	**Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.** ➢ Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. ➢ Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. **Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos sencillos.** ➢ Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. ➢ Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. ➢ Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

4. Antecedentes

4.1. Historia de la papiroflexia

La papiroflexia tiene su origen en el siglo I d.C. en China con la invención del papel (Decio & Battaglia, 2017), llegando a Japón en el siglo VI, donde evoluciona y se cultiva hasta convertirse en un arraigado arte de la cultura y tradición japonesa. Es en Japón donde se acuña el término origami, palabra compuesta por dos caracteres: “ori” (que significa doblar) y “kami” (que significa papel).

Inicialmente, según Engel (1994), el papel adquirió un valor sagrado y religioso y era fabricado principalmente por monjes, ya que el proceso era largo y especializado. En el periodo Heian, desde 794 hasta 1185, el origami formaba parte importante de los actos ceremoniales de la nobleza ya que el papel era un bien al que solo las clases altas de la sociedad podían acceder debido a su elevado coste. En esta época, el arte del doblado del papel tenía un marcado sentido espiritual y religioso.

Es en el período Muromachi, desde 1338 hasta 1573, cuando el papel se vuelve un producto más accesible para el resto de la población. En esta etapa surgieron adornos de papiroflexia con significados distintos que revelaban la clase social a la que pertenecía cada persona, de modo que, la figura de origami que portaba cada individuo permitía saber la clase social de la persona (Decio & Battaglia, 2017). La total democratización de la papiroflexia tiene lugar en el período Tokugawa (del 1603 al 1867), acompañado de una gran explosión cultural. En este período, en el año 1797, se publica el primer libro de origami: “*Senbazuru Orikat*” (Cómo Plegar Mil Grullas) con las primeras instrucciones de plegado, entre las que destacan la documentación de la base pájaro, que es la usada por la figura más popular de Japón: la grulla. (Prieto, 2000).

No obstante, Japón no fue el único lugar en el que se practicó el arte del origami. Simultáneamente, los árabes procedentes del norte de África también desarrollaron la técnica del plegado de papel introduciendo así la papiroflexia en la Península Ibérica en el siglo VII (Prieto, 2000). Se trata de una papiroflexia más dirigida al estudio de formas geométricas y de los patrones lineales que quedan al doblar el papel.

En consecuencia de lo mencionado anteriormente, la papiroflexia moderna evoluciona en dos corrientes muy diferenciadas. Por un lado, la japonesa, en la que el arte del origami busca expresar la esencia de las figuras derivada del sentido espiritual que adquiría la práctica de este arte. Por otro lado, la corriente occidental, desarrollada en Europa principalmente por personajes ligados al ámbito científico que buscan en sus construcciones la exactitud de las figuras (Prieto, 2000). Ambos conocimientos (orientales y occidentales) se fusionan en la Exposición Universal de París celebrada en 1878 creando así un solo origami. De hecho, hoy en día no existen prácticamente disimilitudes entre ambas (Esteban Sanz, 2021).

Mención especial merece en este punto el escritor Miguel de Unamuno (1864 - 1936), quién impulsó el origami en España y América del Sur a principios del siglo XX. Gran aficionado de este arte, se dice que era habitual verle en los cafés de Salamanca plegando servilletas de papel. Unamuno creó el término "cocotología" para referirse a la papiroflexia como "el arte de construir pajaritas de papel" (Asociación Española de Papiroflexia [AEP], 2022).

Respecto a la papiroflexia moderna, se considera al japonés Akira Yoshizawa como el iniciador de una nueva era del mundo del origami al inventar en 1956 la simbología actual de las instrucciones de plegado de los modelos (Sistema Yoshizawa-Randlett). Esto ha constituido la aportación más importante a la papiroflexia desde la invención del papel puesto que permite la difusión internacional de las distintas creaciones, al no importar el idioma en el que estén escritos los desarrollos (Prieto, 2000).

Actualmente, el mundo del origami se encuentra en su edad dorada por los muchos avances producidos en pocos años gracias a la mejor comunicación de los modelos y al desarrollo de técnicas para realizar figuras cada vez más complejas (importante resaltar la introducción de las matemáticas y la computación en el diseño de figuras complejas. Por ejemplo, Robert Lang desarrolla proyectos que unen origami e ingeniería y ha creado una serie de algoritmos para el doblado de figuras (Mayo Rivera, 2018)). Algunos de los autores actuales que comparten sus conocimientos a través de libros e Internet son el ya mencionado Robert Lang, Kunihiko Kasahara, Tomoko Fuse, Eric Joisel , John Montroll o Vicente Palacios.

4.2. Matemáticas y papiroflexia

Las matemáticas y la papiroflexia son dos áreas que conviven en continua simbiosis; una y otra van de la mano y dicha relación queda de manifiesto en cada trozo de papel que desdoblamos. Si al finalizar un procedimiento de papiroflexia desplegamos el papel inicial podremos explorar un sinfín de relaciones geométricas y patrones. Cada pliegue que se obtiene al doblar una hoja de papel puede interpretarse como una recta en el plano cartesiano, de forma que tras una construcción de origami surgirá todo un entramado de pliegues o rectas (denominado mapa de cicatrices según Prieto (2000)) que permiten explicar y trabajar conceptos matemáticos como simetrías, giros, proporciones, relaciones angulares, bisectrices, mediatrices,… e incluso resultados geométricos fundamentales como los teoremas de Pitágoras y Tales.

A continuación se resaltan algunos de los principales beneficios del uso de la papiroflexia como enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, apoyados en los estudios de investigadores expertos en la materia.

4.2.1. Beneficios de la papiroflexia como herramienta didáctica

Uno de los estudios más recientes sobre las implicaciones de la papiroflexia como herramienta didáctica es el llevado a cabo por Azcoaga (2013), donde la docente refleja los resultados recogidos durante siete años de experiencias docentes reales con papiroflexia. Laura Azcoaga pudo comprobar cómo la utilización de esta técnica en las aulas generaba un cambio en la receptividad de la materia despertando la atención y el interés del alumnado hacia la misma. Los estudiantes buscaban nuevas maneras de desarrollar las creaciones de origami, potenciando su autoestima y creatividad. La autora recoge además en su trabajo una serie de virtudes observadas en sus alumnos al emplear papiroflexia en el aula (véase la tabla del Anexo II).

Otro beneficio fundamental del uso de la papiroflexia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es su naturaleza experimental y manipulativa en cuánto que permite conectar la abstracción de los conceptos matemáticos con los pliegues obtenidos en la hoja de papel. Gracias al mapa de cicatrices se establece un nexo entre la abstracción inherente al uso de matemáticas y la representación real del objeto matemático. Así, las matemáticas pasan de ser una cuestión abstracta que solo existe en la mente del estudiante, a transformarse en algo tangible que los alumnos son capaces de manipular (Hull, 2012).

Villarejo y Rubio (2015) destacan la mejora de la visión espacial y exponen el notable desarrollo que experimentan los alumnos en el razonamiento geométrico y la comprensión de conceptos abstractos mediante el uso del origami. En esta línea, Robichaux y Rodrigue (2003), ponen de manifiesto que al trabajar con actividades basadas en papiroflexia los estudiantes veían beneficiadas sus habilidades matemáticas, como la resolución de problemas, la utilización del lenguaje matemático, o la búsqueda o aplicación de reglas y algoritmos.

Otras ventajas del uso de la papiroflexia como herramienta didáctica recogidas en (Sarmentero Medina, 2021) son: desarrollar la psicomotricidad de los alumnos así como la destreza y precisión manual, ejercitar la memoria y el sentido del orden al seguir instrucciones, promover el trabajo en equipo, relacionar las matemáticas con la disciplina artística y fomentar la creatividad e imaginación.

No hay que olvidar además que se trata de un recurso económico y perfectamente accesible, de fácil aplicación en cualquier centro educativo al solo necesitarse papel y creatividad en el diseño de actividades que ayuden a los alumnos con el aprendizaje de la geometría.

Finalizamos esta sección con una cita de Ledesma (Ledesma, 1992) que resume perfectamente los beneficios del uso de la papiroflexia:

> *"La papiroflexia desarrolla diferentes tipos de habilidades mentales, entre otras, potenciar la visión geométrica plana y espacial, fomentar la creatividad y desarrollar la intuición. Al mismo tiempo la papiroflexia desarrolla en el alumno aspectos como la habilidad manual, la concepción volumétrica, la coordinación de movimientos y la psicomotricidad fina. Igualmente, enseña a seguir instrucciones, cumplir normas y ayuda a desarrollar la cooperación."*

4.2.1.1. Desarrollo de competencias clave

Mencionadas las múltiples ventajas del uso de la papiroflexia en la enseñanza y aprendizaje, y más concretamente, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se expone resumidamente por qué esta técnica permite el desarrollo de cada una de las siete competencias clave mencionadas en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre (BOE, 2014):

- Competencia en comunicación lingüística:

  Se desarrolla esta competencia al seguir e interpretar correctamente las instrucciones de una figura para su correcta realización. Es preciso entender y comprender el procedimiento de construcción pedido, de igual forma que el alumno necesita entender qué es lo que se pide en la realización de actividades asociadas a cada construcción.

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología:

  Como hemos mencionado en estudios anteriores, la papiroflexia permite trabajar y desarrollar la visión espacial del alumnado y mejorar la comprensión de conceptos geométricos. Es una forma de trabajar conceptos abstractos mediante problemas reales que resultan del mapa de pliegues. Por otro lado, se trata de una técnica perfectamente aplicable a otras ciencias, tales como dibujo técnico.

- Competencia digital:

  Para obtener recursos sobre construcciones y actividades desarrolladas en el aula con papel se hace imprescindible el uso de las TICs (un ejemplo muy claro es la visualización de videos con propuestas y tutoriales e incluso la propia realización de ellos por parte de los alumnos).

Se puede emplear programas matemáticos como Geogebra para una visualización más clara del mapa de cicatrices resultante en las actividades.

- Competencia aprender a aprender:

Trabajada al ser imprescindible seguir un orden en las instrucciones para conseguir el objetivo. Ayuda al alumnado a ser constante y paciente a la hora de enfrentarse con un problema matemático real y permite descubrir su propio aprendizaje de una forma diferente.

- Competencia social y cívica:

La papiroflexia es una herramienta perfecta para favorecer el trabajo en equipo puesto que los estudiantes pueden ayudarse entre ellos.

- Competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:

Desarrollada al favorecer la creatividad e imaginación del alumno, tanto en la propuesta de nuevas construcciones como de nuevas actividades, y en la forma en que el alumnado se enfrenta a los problemas derivados de las construcciones ya que, en la mayoría de situaciones, no hay un único camino correcto por el que alcanzar la solución.

- Competencia en conciencia y expresiones culturales:

Relaciona las matemáticas con el arte: el estudiante será capaz de reconocer la geometría presente en cada construcción de origami.

4.2.2. Limitaciones

Habiendo resaltado los muchos beneficios que conlleva el uso de la papiroflexia en el aula, esta técnica también presenta una serie de limitaciones. En las líneas siguientes se incluyen las tres principales limitaciones que, a mi juicio, presenta el uso de la papiroflexia como herramienta didáctica:

- Desarrollar actividades de origami lleva demasiado tiempo; tiempo del que no se dispone debido al extenso currículo que posee la asignatura de matemáticas. Esto provoca restricciones a la hora de dar clase impidiendo dedicar el tiempo suficiente para la realización de actividades como las que se proponen en este trabajo. Pese a ser una técnica diferente con la que motivar al alumnado, es muy complicado para el docente dedicarle el tiempo suficiente sin perjudicar algunos contenidos del currículo. Construir figuras de origami y resolver actividades de geometría interesantes asociadas a las construcciones lleva, como he podido comprobar de primera mano, demasiado tiempo al alumnado.

- Su aplicación puede ser difícil para alumnos que presenten discapacidades motrices, sensoriales o deficiencia visual. En estos casos la papiroflexia podría obstaculizar el aprendizaje del alumno. Sin embargo, es obligación del profesor encontrar los medios adecuados para poder atender a toda esta diversidad de alumnado. Podría ser conveniente, por ejemplo, adoptar en el aula una codocencia mediante la cual un segundo docente pueda estar más enfocado en este alumnado con dificultades.

- La mayoría de docentes tienen poca o ninguna formación en papiroflexia, siendo esto un obstáculo para su puesta en práctica en los centros educativos. Es preciso que el docente conozca la herramienta didáctica para así poder adecuarla y adaptarla a cada situación de aprendizaje. Por suerte existen multitud de recursos como talleres, vídeos, manuales o libros al alcance de la mano que pueden paliar la falta de formación en esta bonita técnica.

4.3. Experiencias previas

En este apartado se mencionan cuatro obras de importantes autores en las que se incluyen procedimientos de plegado de papel relacionados con el aprendizaje de las matemáticas.

- *“Geometric Exercises in Paper Folding”* de T. Sundara Row. (Row, 1917).

Este libro, escrito por el matemático indio T. Sundara Row, fue publicado por primera vez en India en 1893. Esta obra muestra cómo construir varias figuras geométricas utilizando el plegado de papel en lugar de las construcciones clásicas griegas con regla y compás , a la vez que recoge construcciones de papiroflexia que pueden ser adaptadas a niveles de secundaria y bachillerato.

- *“Matemáticas y Papiroflexia”* de Jesús de la Peña Hernández. (de la Peña Hernández, 2001).

Esta obra, escrita por Jesús de la Peña Hernández para la Asociación Española de Papiroflexia, recoge una gran variedad de procedimientos de plegado de papel con los que trabajar contenidos matemáticos y de distinto nivel de complejidad (desde educación secundaria hasta educación superior), caracterizándose por la rigurosidad de las demostraciones de los contenidos.

- *“Orisangakus: desafíos matemáticos con papiroflexia”* de Belén Garrido Garrido. (Garrido, 2016).

Este libro, escrito por Belén Garrido Garrido, contiene cuarenta construcciones de papiroflexia, de menor a mayor complejidad, acompañadas por un reto matemático asociado a cada construcción. Los retos son problemas de secundaria que abordan tanto geometría plana como geometría del espacio. La autora incluye además una sección con las soluciones a los mencionados retos. Este libro nos servirá de guía en varias de las construcciones planteadas en nuestro proyecto didáctico.

- *“Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*” de Thomas Hull. (Hull, 2012).

Esta obra es una revisión de actividades propuestas por el profesor Thomas Hull, que desde una perspectiva didáctica, describe posibles tareas y situaciones de aprendizaje mediante plegado de papel. Un detalle interesante es que cada actividad enumera los cursos en los que podría encajar.

5. Propuesta didáctica: actividades de geometría basadas en papiroflexia

La parte central de este trabajo consiste en resolver actividades extraídas del plegado de papel, algunas de las cuales han sido llevadas a la práctica mediante una experiencia piloto. Pretendemos que el papel ayude a comprender los elementos geométricos estudiados en un aula de 3º de ESO proponiendo actividades o retos a la construcción de figuras mediante papiroflexia. Esta es la esencia del libro *"Orisangakus"* (Garrido, 2016), que servirá de apoyo en algunas de las construcciones y actividades que aquí se proponen.

Las actividades incluidas están orientadas a resolver problemas métricos en el plano, relacionadas con el cálculo de ángulos, áreas y distancias donde se precisa el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras. Estas actividades se engloban en 10 propuestas distintas. El objetivo de las propuestas es repasar los conceptos de geometría plana de 3º de ESO que los alumnos deberían haber estudiado y trabajado previamente.

5.1. Propuestas

Propuesta 1: Obtención de triángulo equilátero, sus puntos notables y hexágono regular.
Introducción

El objetivo de esta propuesta es que los alumnos comiencen a familiarizarse con el plegado de papel. Doblar papel no es una tarea complicada, pero requiere del uso de las manos y no todos los estudiantes tendrán la misma soltura al realizar plegados. Por ello, para ir adquiriendo experiencia y, en vistas a posteriores construcciones más complejas, se propone como primera actividad la construcción de un triángulo equilátero a partir de un cuadrado.

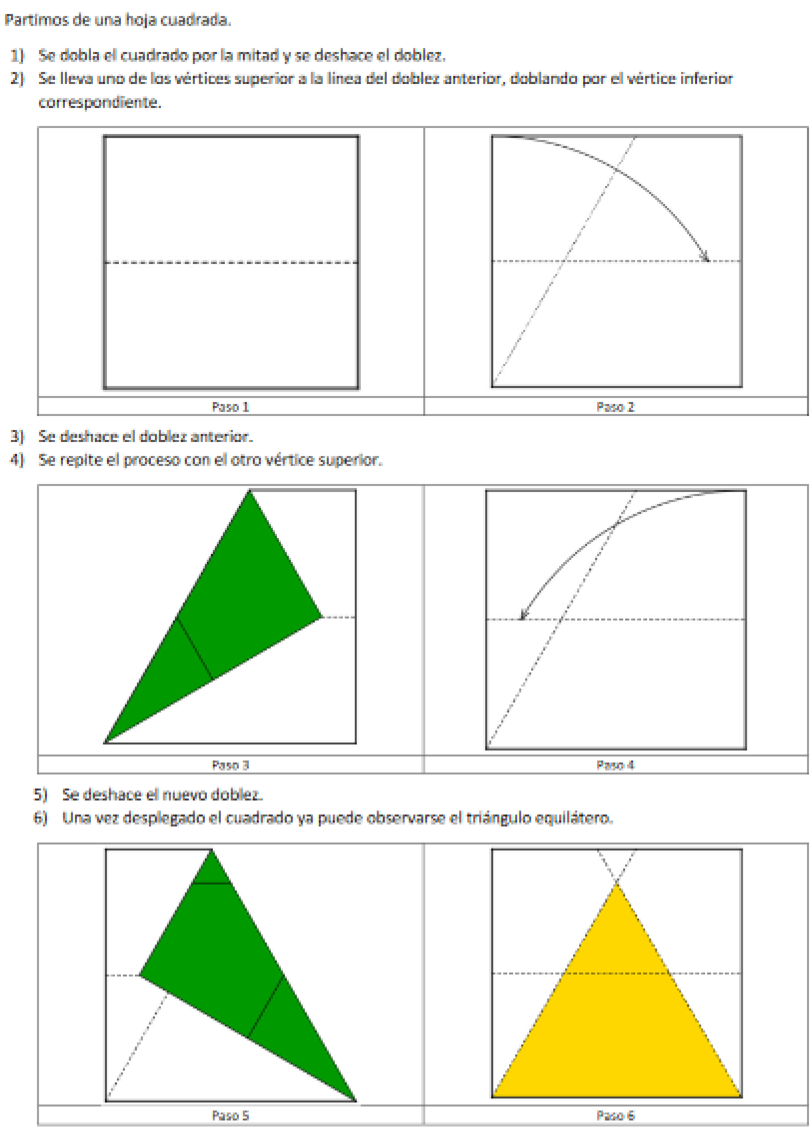
Construcción

Esta es una actividad típica de papiroflexia. Existen multitud de recursos en la web, documentos, enlaces, vídeos donde se explica la construcción de un triángulo equilátero. Garrido (2016) y de la Peña Hernández (2001) también recogen esta construcción en sus respectivos libros. No obstante, aquí nosotros hemos elegido una de las construcciones del Grupo Alquerque, de la Universidad de Sevilla.

El Grupo Alquerque es un grupo de profesores de matemáticas, formado en Sevilla en 1998, que se dedica a la matemática recreativa y a la elaboración de recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas en primaria y secundaria. En el ámbito de la papiroflexia, utilizan el papel para presentar conceptos, teoremas y propiedades de la geometría plana que aparecen en los currículos de primaria y secundaria. Su web es la siguiente:

http://www.grupoalquerque.es/ferias/2018/origami.html

Navegando por su web encontramos una gran variedad de recursos y propuestas. Nosotros hemos tomado el método 2 para obtener un triángulo equilátero desde un cuadrado porque, sin ser una construcción compleja, requiere de varias dobleces que pueden servir para iniciar al alumno en la técnica del origami. Incluimos la construcción:



Partimos de una hoja cuadrada.

1) Se dobla el cuadrado por la mitad y se deshace el doblez.
2) Se lleva uno de los vértices superior a la línea del doblez anterior, doblando por el vértice inferior correspondiente.

3) Se deshace el doblez anterior.
4) Se repite el proceso con el otro vértice superior.

5) Se deshace el nuevo doblez.
6) Una vez desplegado el cuadrado ya puede observarse el triángulo equilátero.

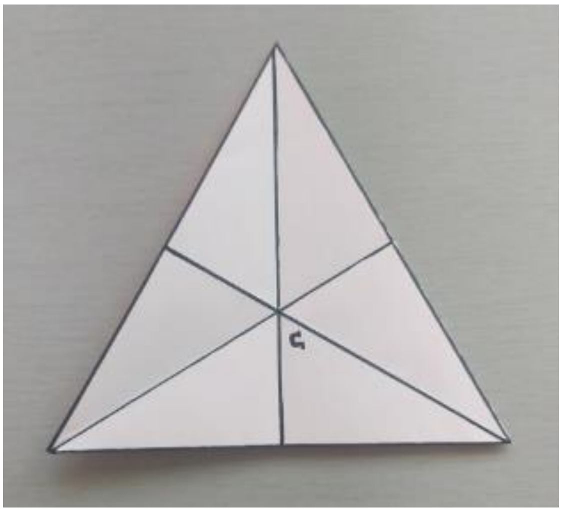
Obtención de triángulo equilátero desde un cuadrado. Fuente: Grupo Alquerque.

Actividad 1

Construido el triángulo equilátero, se pide a los alumnos que tracen (mediante doblado de papel) todas sus alturas, mediatrices, medianas y bisectrices obteniendo los cuatro puntos notables de un triángulo: ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro. Esta es una buena práctica que permite ver claramente como en un triángulo equilátero todos sus puntos notables coinciden en uno solo.

Figura obtenida

Los chicos y chicas llegarán a este resultado:



Triángulo equilátero y sus puntos notables. Fuente: elaboración propia.

Actividad 2

Llegado a este dibujo, se puede pedir que comprueben con regla que el punto C divide cada altura del triángulo en $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de distancia.

Ampliación

Como ampliación podemos construir un hexágono regular a partir del triángulo plegando cada uno de sus vértices sobre C. Obtendremos:

Hexágono regular. Fuente: elaboración propia.

Actividad 3

Calcula el área del hexágono regular en función del lado del cuadrado con el que comenzamos la construcción.

Propuesta complementaria

Una propuesta complementaria a esta primera actividad con papel es construir los cuatro puntos notables en un triángulo escaleno. Construir un triángulo escaleno con papel es muy sencillo: basta plegar el papel comprobando que obtenemos un triángulo con sus tres lados desiguales. A partir de aquí, los alumnos pueden trazar las alturas, medianas, bisectrices y mediatrices del triángulo y comprobar como ahora los cuatro puntos notables no coinciden en un único punto.
Actividades adicionales

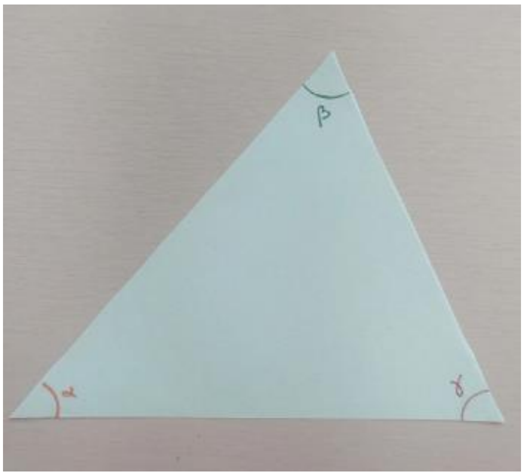
4	Comprueba que el incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo midiendo (con regla) y comprobando que la distancia de este punto a cada uno de los lados del triángulo es idéntica.
5	Comprueba que el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita midiendo (con regla) y comprobando que la distancia de este punto a cada uno de los vértices del triángulo es la misma.

Propuesta 2: Demostración de la suma de los ángulos de un triángulo.
Introducción
El objetivo de esta propuesta es mostrar de una forma manipulativa y visual que la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados (un ángulo llano). Es un resultado que se da y que los alumnos interiorizan pero muchas veces no se muestra por qué esto es así.
Construcción

De la Peña Hernández (2001) incluye una demostración de esta propiedad. Se trata de una demostración más bien teórica y por ello he decidido decantarme por la demostración desarrollada en este vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=jZtOVkZdBc0

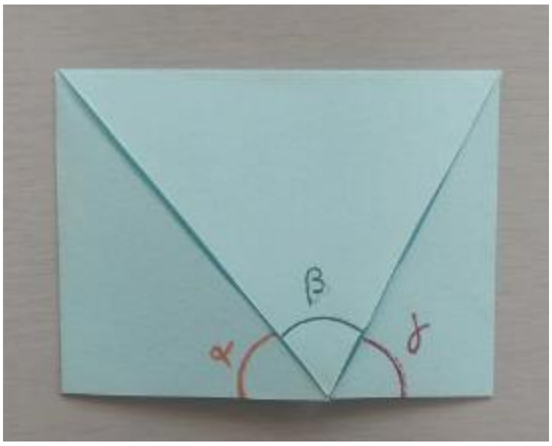
Los estudiantes deben construir primero un triángulo (acutángulo), recortarlo y marcar sus ángulos en los dos lados de la hoja de papel:



Triángulo marcados sus ángulos. Fuente: elaboración propia.

Una vez hayan hecho esto, pueden trazar una de las alturas del triángulo plegando el papel y marcar el punto donde la altura corta al lado opuesto. Si finalmente plegamos haciendo coincidir cada uno de los vértices del triángulo con este punto, veremos cómo obtenemos una especie de sobre donde los tres ángulos forman un ángulo llano. Es decir, suman 180 grados.

Figura

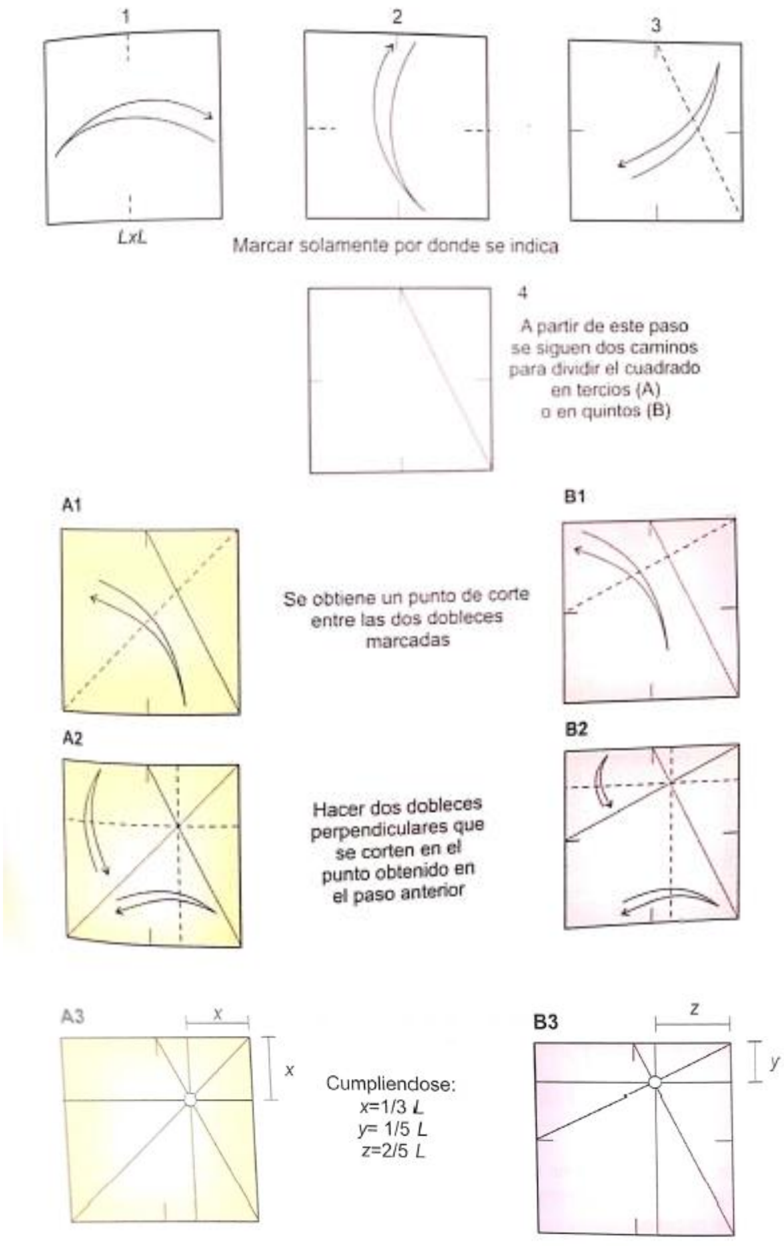


Demostración de la suma de los ángulos de un triángulo. Fuente: elaboración propia.

Propuesta 3: Obtención de un cuadrado de perímetro tres veces inferior a uno dado.

Construcción

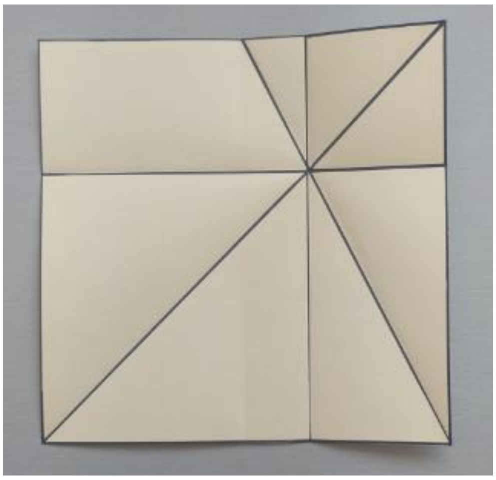
Esta construcción es muy sencilla y viene desarrollada en el capítulo 9 de Garrido (2016). Es lo que ella llama división del papel en tres partes.



División del papel en 3 partes. Fuente: Garrido (2016).

Figura a estudiar

Siguiendo la construcción propuesta, llegamos a la figura:



Mapa de cicatrices de división del papel en 3 partes. Fuente: elaboración propia.

Actividades	
1	Reconoce dos parejas de triángulos semejantes que no sean iguales.
2	Calcula el lado del cuadrado resultante en la esquina superior derecha sabiendo que el lado del cuadrado de partida es de 15 cm.
3	Calcula la diagonal del rectángulo resultante en la esquina inferior derecha.

Propuesta 4: Construcción de corazón.

Introducción

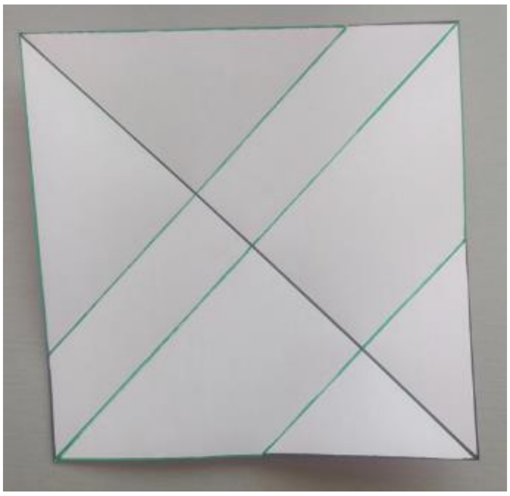
Esta propuesta consiste en la construcción de un corazón de origami y una actividad posterior de cálculo de áreas. El corazón que vamos a construir, además de ser realmente bonito y entretenido de construir, puede ser utilizado como adorno decorativo en casas o bien como regalo: es un buen regalo para el día de la madre, el día del padre, San Valentín,…

Construcción

Con un simple vistazo a internet encontramos imágenes, enlaces a páginas webs y vídeos donde se enseña y describe la construcción de este corazón de papel. Nosotros para ello hemos tomado como referencia este vídeo de internet:

https://www.youtube.com/watch?v=4wcghCcFXM8

Figura

Una vez completados todos los pasos, el resultado queda así:  Corazón de papel. Fuente: elaboración propia.
Figura desplegada a estudiar
Si antes de llegar a los últimos pliegues, desplegamos el papel y marcamos todas las líneas, tendríamos la figura de abajo:  Mapa de cicatrices de corazón de papel. Fuente: elaboración propia.
Actividades

1	Identifica dos parejas de triángulos semejantes que no sean iguales.
2	Calcula la altura sobre el lado desigual en los triángulos situados en la parte superior izquierda e inferior derecha del dibujo sabiendo que el cuadrado tiene lado 10 cm.
3	Calcula el área del trapecio y el triángulo señalados en color verde.
4	Encuentra y aplica una forma alternativa para calcular el área del trapecio anterior.

Propuesta 5: Pajarita de papel.

Introducción

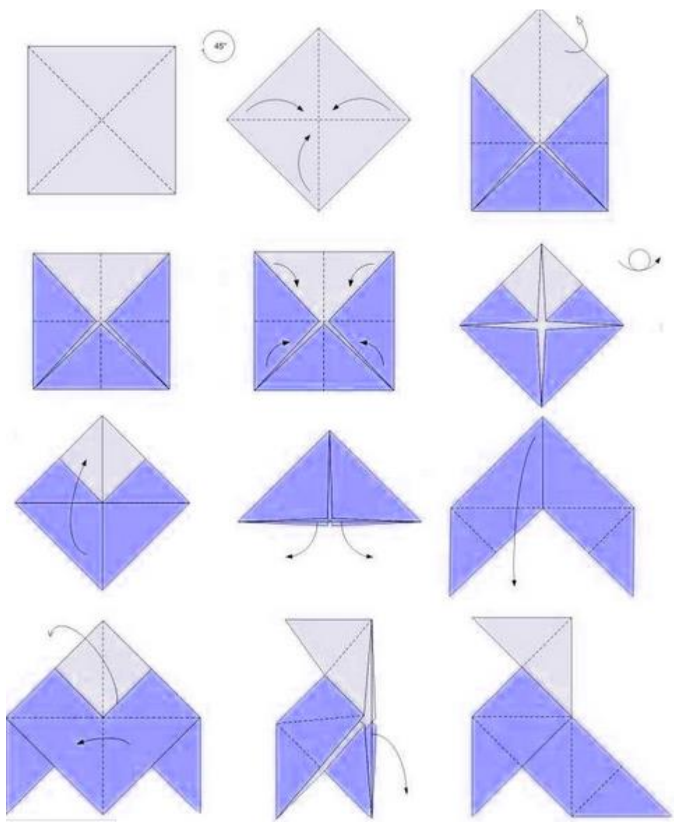
Si hay una figura de papiroflexia por excelencia esa es la pajarita de papel. De hecho, este término es utilizado en los países de habla hispana para denominar en general a figuras plegadas con papel. La pajarita de papel tradicional, por ser todo un símbolo de la técnica de origami, no podía faltar en este trabajo.

Además de la sencillez en su construcción y su elegancia, esta figura permite al docente conectar con muchos de los alumnos ya que esta construcción es la que realiza el personaje de "El Profesor" en la famosa serie de Netflix "La Casa de Papel". Para todos esos estudiantes que hayan visto la serie, seguro que enseñarles a construir esta pajarita (y mostrarles la geometría que hay detrás de ella) supone un incentivo.

Construcción

Garrido (2016) dedica dos capítulos a las pajaritas: capítulo 7 dedicado a la pajarita tradicional y capítulo 40 orientado a la construcción de pajaritas áureas. Sin embargo, he decidido incluir un vídeo y una imagen con una construcción distinta:

- Enlace al vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=2RovbVbvjR8
- Imagen en la dirección: https://www.materialescolar.es/blog/papiroflexia-como-hacer-una-pajarita-de-papel/



Construcción de pajarita de papel. Fuente: Blog materialescolar.es.

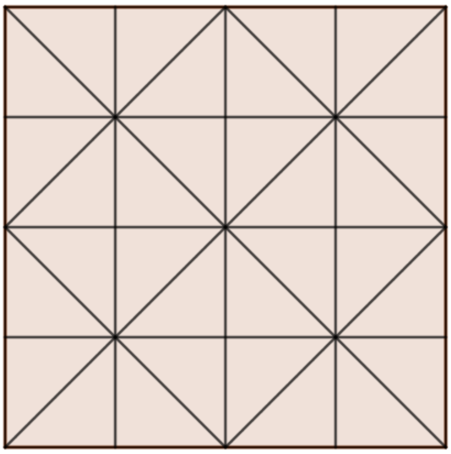
Figura

El resultado final que tendrán los alumnos es el siguiente:

Pajarita. Fuente: elaboración propia.

Figura desplegada a estudiar

El resultado de desplegar el papel señalando todos los pliegues:



Mapa de cicatrices de pajarita con Geogebra (I). Fuente: elaboración propia.

Observación: En realidad, al desdoblar el papel, las líneas centrales horizontal y vertical no aparecen. Se añaden para facilitar la resolución de actividades.

Actividades

1	Determinar el valor de todos los ángulos y lados que conforman el pico de la pajarita sabiendo que el cuadrado de partida tiene lado l=10cm.
2	Calcular el área lateral de la pajarita (para un único lado) si el cuadrado de partida tiene lado l=10cm.
3	Emplea proporcionalidad para calcular el área anterior.

4	¿Cuánto debe medir el cuadrado de partida si queremos que el área lateral de la pajarita sea de 30 cm^2?

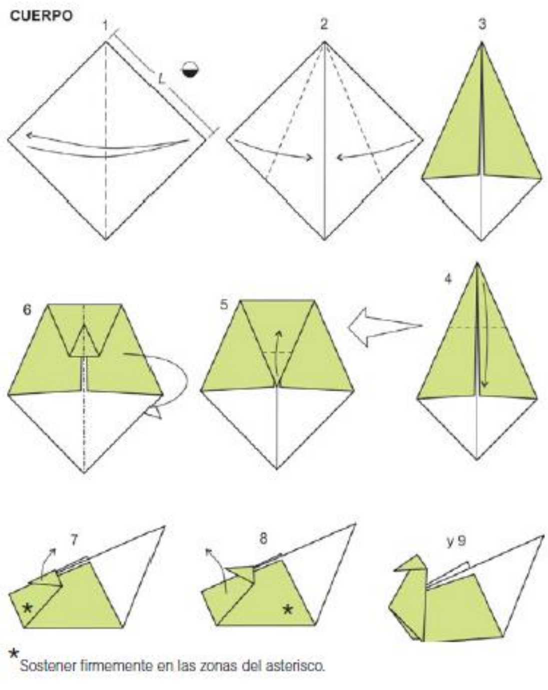
Propuesta 6: Ave acuática con alas.

Introducción

Esta propuesta es una variante de lo recogido por Belén Garrido en el capítulo 1 de “Orisangakus”. En la versión original la construcción de la figura se divide en cuerpo del ave y cola. Aquí, como variante, se propone sustituir la cola por unas alas.

Construcción

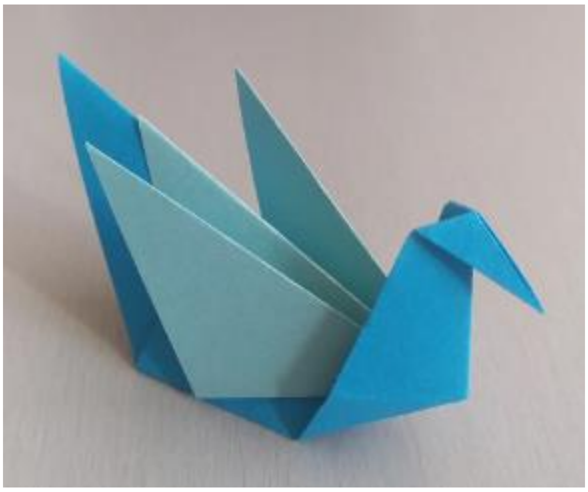
Para la elaboración del cuerpo seguiremos las instrucciones (Garrido, 2016):



Construcción de cuerpo en ave acuática. Fuente: Garrido (2016).

Para las alas tan solo hay que tomar un cuadrado de idéntica longitud al del cuerpo y doblarlo en 8 partes iguales. Esto lo conseguimos doblando el cuadrado por una de las diagonales, obteniendo un triángulo rectángulo. Seguidamente debemos llevar los vértices del triángulo que forman ángulos agudos sobre el vértice que forma el ángulo recto. Si lo hacemos coincidir con el cuerpo obtendremos la figura:

Figura



Ave acuática con alas. Fuente: elaboración propia.

Figura desplegada a estudiar (cuerpo)

Si desdoblamos el cuerpo de la figura obtenemos:

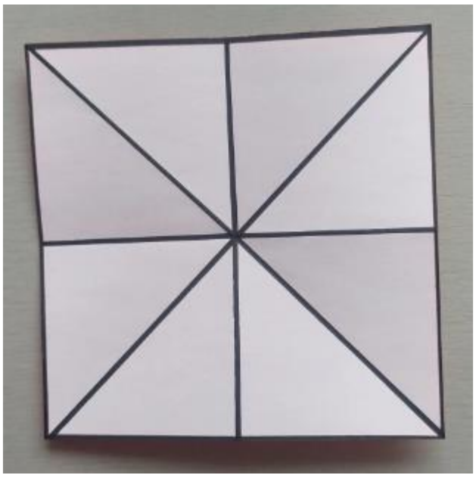
Mapas de cicatrices del cuerpo en ave acuática. Fuente: elaboración propia.

Observación: No se añade la cicatriz que surge del pico para no complicar el dibujo. Realmente hemos incluido el mapa de cicatrices anterior a la doblez 6 de las instrucciones.

Actividades (cuerpo)

1	Determina el valor de los ángulos que forman el triángulo rojo.
2	Calcula el perímetro y área del triángulo rojo si el cuadrado de partida tiene lado 10 cm.
3	¿Es regular el pentágono que aparece en la figura de la izquierda?

Figura desdoblada a estudiar (alas)



Mapa de cicatrices de alas en ave acuática. Fuente: elaboración propia.

Actividades (alas)	
4	Señala dos ángulos complementarios, dos suplementarios y dos iguales y opuestos por el vértice.
5	Calcula el perímetro de cada uno de los triángulos resultantes al desdoblar el papel suponiendo que el área del cuadrado es de 144 cm^2.

Propuesta7: Estrella pentagonal.

Introducción

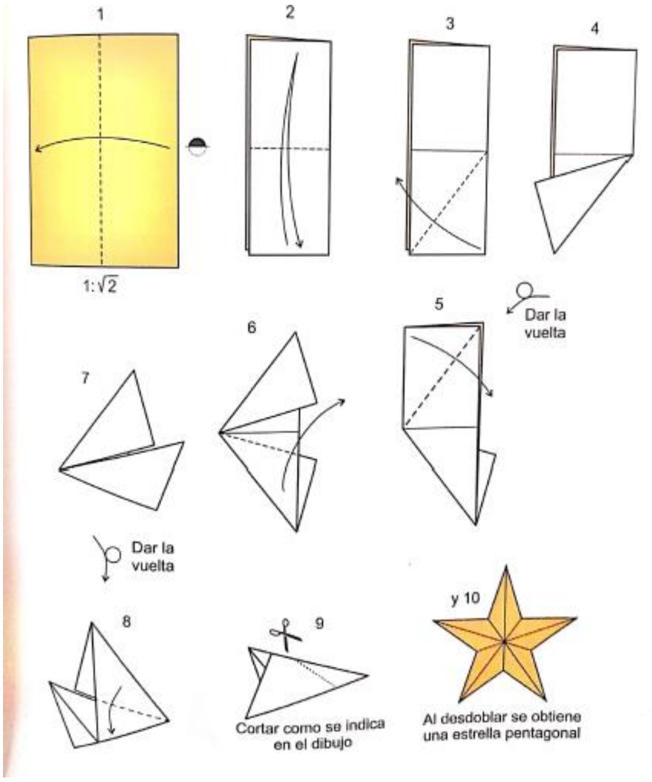
La construcción de estrellas con papel es una de las actividades más comunes y con más variedad dentro del mundo del origami. Por ejemplo, el Grupo Alquerque de Sevilla dedica un espacio entero de su web a la construcción de ocho estrellas distintas:

http://www.grupoalquerque.es/ferias/2018/archivos/material/estrellas.html

En este trabajo propondremos dos construcciones de estrellas (estrella pentagonal y estrella de seis puntas) con sus correspondientes retos matemáticos. Aunque la resolución de los ejercicios vinculados a cada construcción es el primer objetivo de esta actividad, siempre se pueden reutilizar las estrellas como elemento decorativo.

Construcción

La elaboración de la estrella pentagonal está recogida en el capítulo 15 de Garrido (2016) y se basa en la construcción publicada en 1914 por Sam Loyd en su libro "*Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conondrum*". Sam Loyd (1841-1911) fue ajedrecista, compositor de ajedrez, matemático recreativo y autor de rompecabezas. Su entusiasmo por los rompecabezas de Tangram le llevó a publicar un libro con setecientos diseños de tangram únicos. "*Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conondrum*" fue publicado por su hijo tras su muerte.



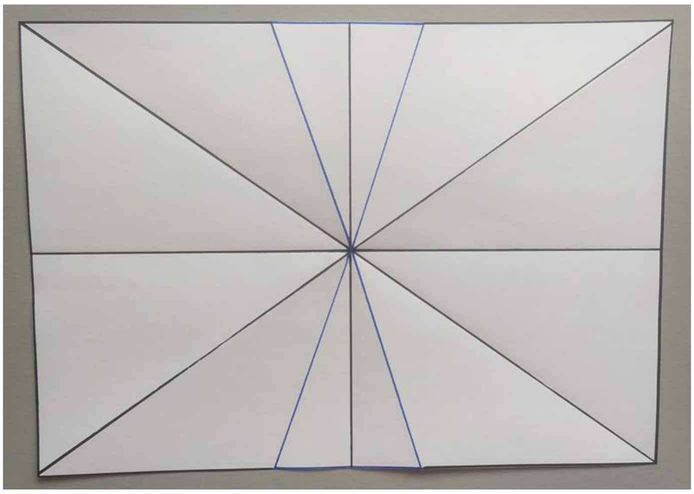
Construcción de estrella pentagonal. Fuente: Garrido (2016).

Figura

Estrella pentagonal. Fuente: elaboración propia.

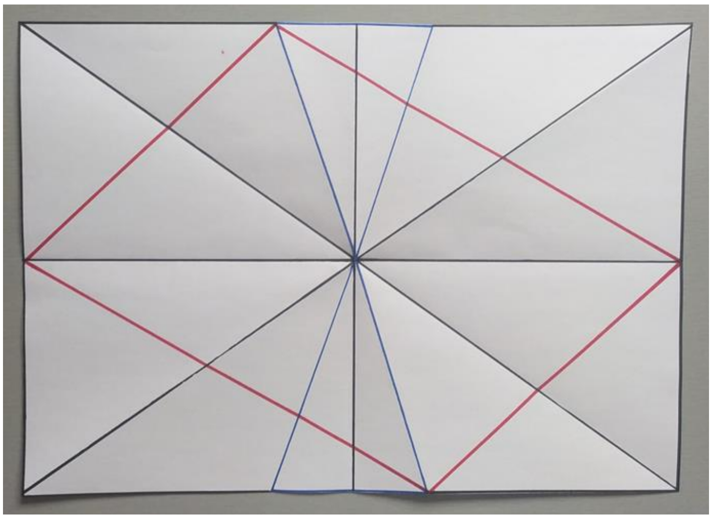
Figura desplegada a estudiar

Si antes de realizar el corte que permite obtener esta estrella de 5 puntas desplegamos el folio de papel tendríamos esta secuencia de rectas:



Mapa de cicatrices de estrella pentagonal. Fuente: elaboración propia.

Si además trazamos el paralelogramo en rojo abajo, tenemos la interesante figura:



Mapa de cicatrices de estrella pentagonal con paralelogramo. Fuente: elaboración propia.

Actividades

1	Identifica dos parejas de ángulos complementarios y dos de ángulos suplementarios.
2	Calcular la diagonal del rectángulo de partida sabiendo que hemos tomado un folio DIN-A4 de 29,7cm x 21cm.
3	Halla el perímetro de los triángulos en color azul sabiendo que su lado desigual mide 7 cm.
4	Calcula la altura (tomando como base el lado de mayor longitud) y el área del paralelogramo representado en rojo. Es necesario usar el dato proporcionado en la actividad anterior.

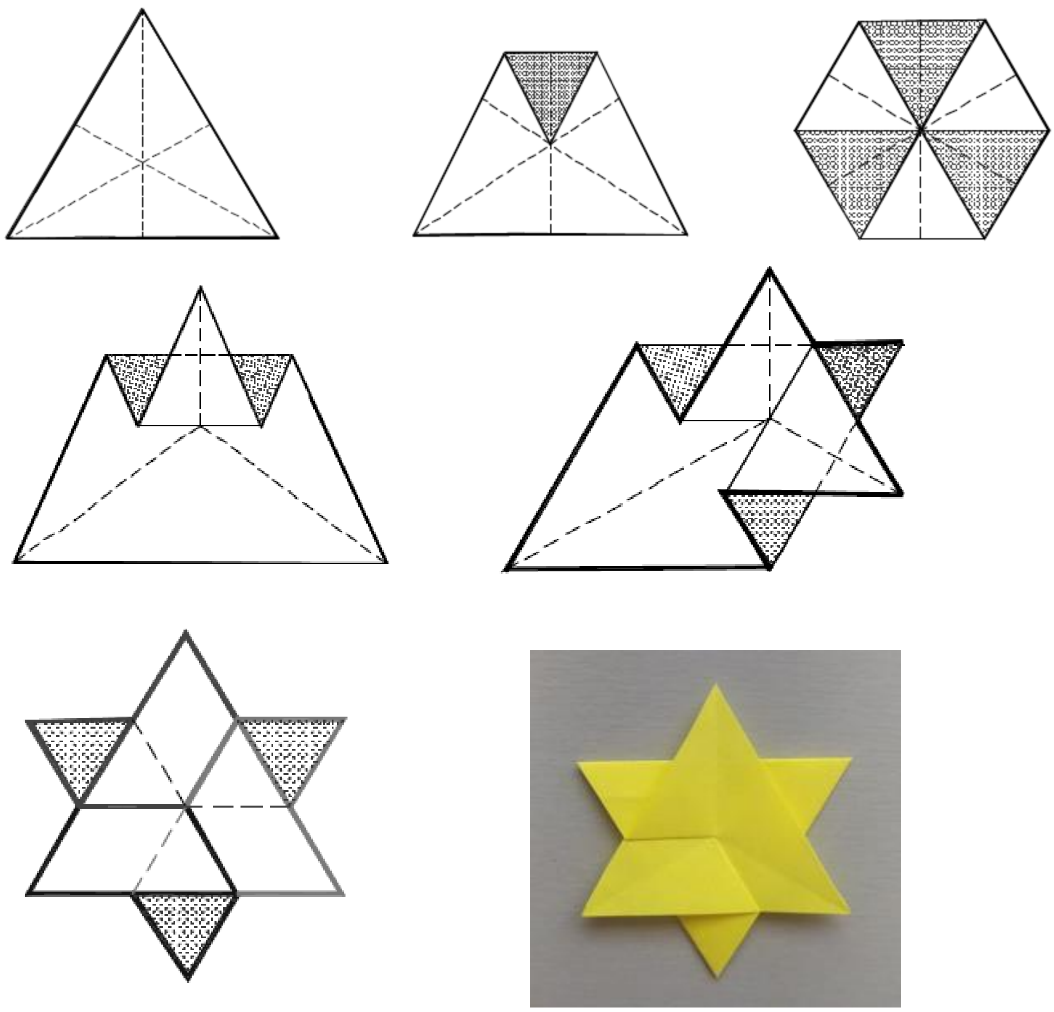
Propuesta 8: Estrella de seis puntas.

Introducción

Esta propuesta viene recogida en el artículo “Medios y recursos para la enseñanza de la Geometría en la educación obligatoria” de Natalia Ruiz López, profesora en la Facultad de Formación de Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid que realiza este taller con sus alumnos del Grado en Magisterio.

Construcción y figura final

La construcción de la estrella se desarrolla a partir de un triángulo equilátero o bien desde un hexágono regular. Nosotros en nuestro taller podemos retomar el hexágono regular construido en la propuesta 1 ahorrando así el número de pliegues a realizar. Incluyo, no obstante, la construcción recogida en (Ruiz-López, 2010), desde el triángulo equilátero hasta el resultado final obtenido:

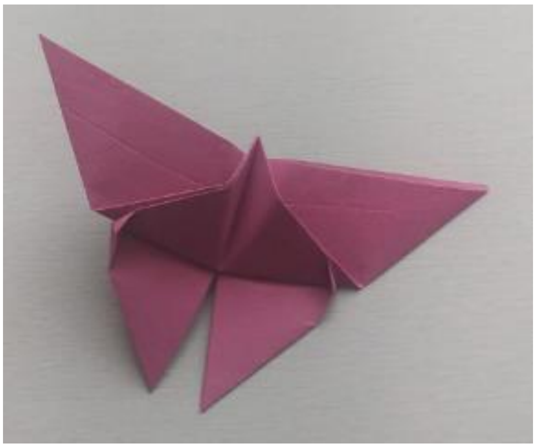


Construcción de estrella de 6 puntas. Fuentes: Ruiz-López (2010) & elaboración propia.

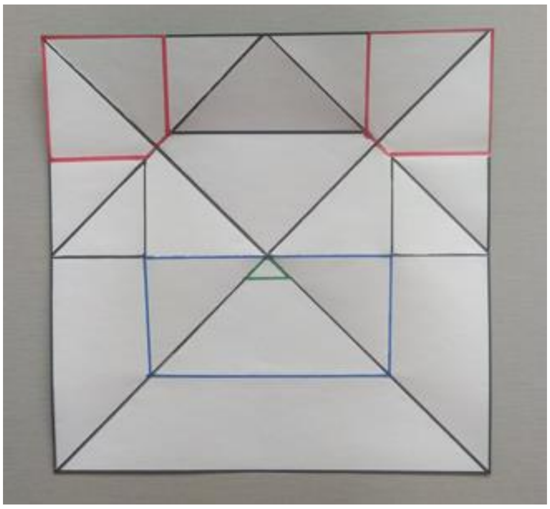
Actividades

1	Calcula el valor de los ángulos que forman los vértices de la estrella.

2	Determina apotema, perímetro y área del hexágono si el triángulo equilátero de partida tiene lado l = 15 cm.

Propuesta 9: Mariposa de papel.
Introducción
Una de las figuras más bonitas y sencillas que podemos lograr con papel es la mariposa. Se trata de una figura que además ofrece muchas variedades puesto que no existe una única forma de plegado que nos lleve a construir una mariposa de papel. En internet podemos ver distintos ejemplos o modelos y seleccionar el que más nos guste, o incluso más de uno si estamos realmente interesados.
Construcción
Nosotros hemos seleccionado un modelo de mariposa particular, cuya construcción viene muy bien explicada en este vídeo de YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=km911v8KSX8
Figura
El resultado final es esta preciosa mariposa:  Mariposa de papel. Fuente: elaboración propia.
Figura desplegada a estudiar

Lo verdaderamente interesante de esta propuesta es la figura que resulta al marcar todas las dobleces justo antes de dar forma a la mariposa:



Mapa de cicatrices de mariposa de papel. Fuente: elaboración propia.

Actividades

1	Identifica al menos tres triángulos rectángulos que sean semejantes. Es necesario que los triángulos no sean iguales.
2	Halla la altura de la cabeza de la mariposa (triángulo verde) sabiendo que los lados iguales del triángulo isósceles verde miden 1 cm y que el lado del cuadrado de partida es de 15 cm.
3	Aplica el resultado anterior para calcular el área del rectángulo azul.
4	Determina el perímetro de los dos pentágonos en color rojo.

Propuesta 10: Tetraedro.

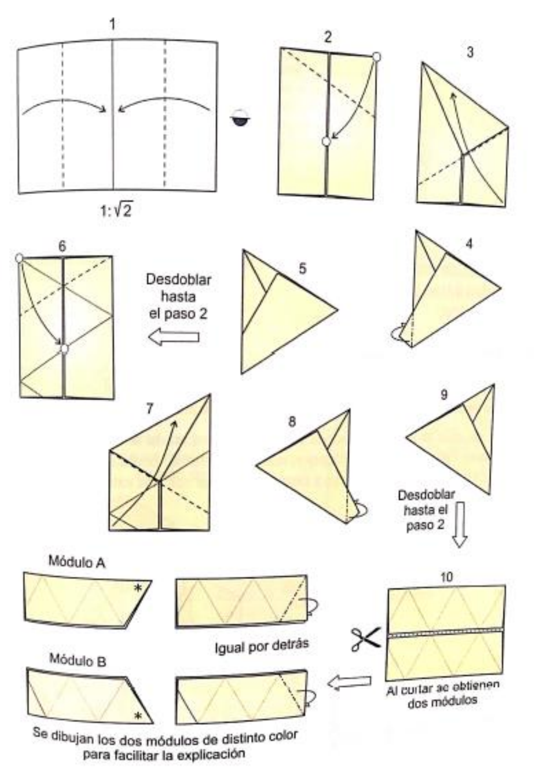
Introducción

Enseñar a los alumnos a construir un tetraedro puede ser un puente de conexión entre la geometría del plano y la geometría del espacio y una introducción a la papiroflexia modular.

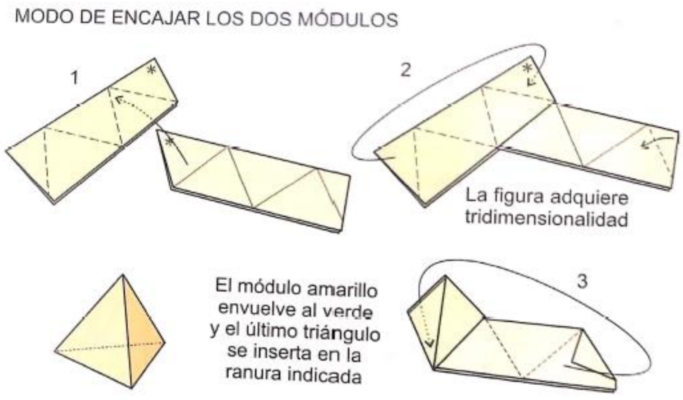
La papiroflexia modular es una forma de papiroflexia que consiste en hacer figuras de tres dimensiones utilizando varios módulos que se ensamblan entre sí. Para la elaboración del tetraedro utilizaremos dos módulos, ideados por Tomoko Fuse, considerada la maestra del origami modular. La construcción del mismo y la forma de ensamblar ambos módulos vienen recogidas en el capítulo 34 de "Orisangakus".

Elaborar un tetraedro es un buen momento para dar una definición de poliedro regular y mencionar los cinco sólidos platónicos, de ahí que esta actividad pueda servir de introducción a la geometría del espacio. No obstante, el objetivo principal de esta actividad es construir con los chicos y chicas el tetraedro al ser el poliedro regular más sencillo y aprovechar su construcción para profundizar y repasar la geometría del plano.

Construcción



Construcción de tetraedro (I). Fuente: Garrido (2016).



Construcción de tetraedro (II). Fuente: Garrido (2016).

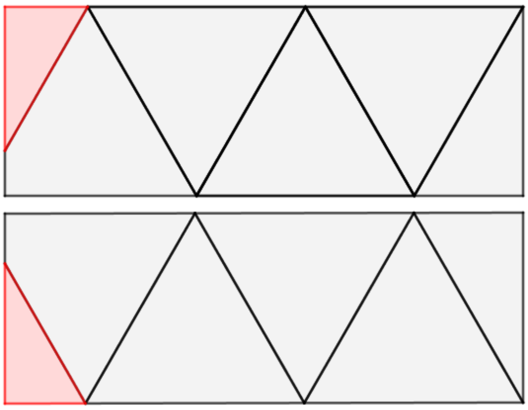
Observación: En la imagen anterior el módulo amarillo es el que está situado a la derecha en el paso 1 y el verde el que se sitúa más a la izquierda.

Figura


Tetraedro. Fuente: elaboración propia.

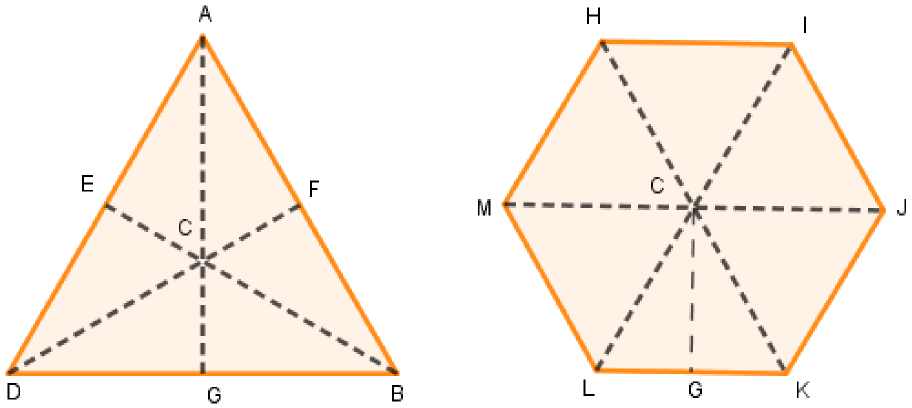
Figura desplegada a estudiar

Los dos módulos en que se divide su construcción nos proporcionan una figura plana de la que se pueden plantear diversas cuestiones:


Mapa de cicatrices de tetraedro con Geogebra (I). Fuente: elaboración propia.

Actividades	
1	Determina las dimensiones de los dos rectángulos que forman los módulos y halla su área sabiendo que para la construcción del tetraedro se ha partido de un folio DIN-A4 de dimensiones $29{,}7\ cm\ x\ 21\ cm$.
2	Calcula la longitud del lado del tetraedro.
3	Determina el área de una cara del tetraedro y su área total. ¿Qué área tendrá la parte visible del tetraedro si lo lanzamos sobre una mesa?
4	Calcula la superficie que ocupa la región coloreada en rojo en la figura.
5	Calcula las dimensiones del rectángulo de partida si queremos conseguir un tetraedro de lado 5cm.

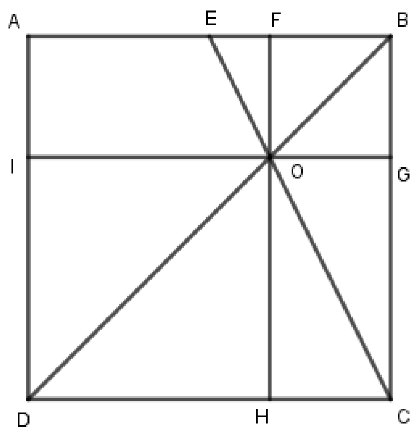
5.2. Soluciones

Solución a propuesta 1	
Figura	
 Mapa de cicatrices de triángulo equilátero y hexágono regular con Geogebra. Fuente: elaboración propia.	
Cuestiones a resolver y soluciones	
1	**Construido el triángulo equilátero, se pide a los alumnos que tracen (mediante doblado de papel) todas sus alturas, mediatrices, medianas y bisectrices obteniendo los cuatro puntos notables de un triángulo: ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro.**
	No corresponde solución a este ejercicio al ser una actividad a realizar mediante plegado de papel.

2	**Comprueba con regla que el punto C divide cada altura del triángulo en $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de distancia.**
	Esta es una actividad a comprobar con regla. No obstante, incluyo una solución analítica para un triángulo de lado 10 cm. Comprobaremos que $\overline{CG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AG}$ y $\overline{AC} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AG}$. Primero calculamos $\overline{AG}$ con el teorema de Pitágoras: $$\overline{AG} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66\ cm.$$ Podemos observar que los triángulos ADG y CDG son semejantes. Es fácil entonces calcular $\overline{CG}$ con una proporción: $$\frac{\overline{CG}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AG}},$$ $$\overline{CG} = \frac{5^2}{8{,}66} \approx 2{,}89\ cm.$$ Por tanto, $\overline{AC} = \overline{AG} - \overline{CG} \approx 5{,}77\ cm.$ Hemos demostrado las relaciones $\overline{CG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AG}$ y $\overline{AC} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AG}$. Para las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{DF}$ se razona de forma análoga.
3	**Calcula el área del hexágono regular en función del lado del cuadrado con el que comenzamos la construcción.**
	La primera observación importante es que el cuadrado inicial y el triángulo equilátero al que llegamos tienen el mismo lado. La segunda observación es que, como un hexágono regular se divide en 6 triángulos equiláteros en su interior, al plegar los lados del triángulo hacia C, el lado del hexágono será tres veces más pequeño que el del triángulo equilátero inicial. Resolvemos la actividad para el caso en el que el cuadrado de partida tiene lado 10 cm. Si el lado del cuadrado de partida mide 10 cm, entonces el triángulo equilátero tendrá lado 10 cm; y el hexágono regular lado $\frac{10}{3}\ cm$. Es decir, $\overline{LK} = \frac{10}{3}\ cm$, y entonces el perímetro del hexágono es $P = 6 \cdot \frac{10}{3} = 20\ cm$. La apotema es el segmento $\overline{CG} = 2{,}89\ cm$, que ya habíamos calculado en el apartado anterior. Aplicando la fórmula para el cálculo del área en polígonos regulares obtenemos: $$A = \frac{P \cdot apotema}{2} = \frac{20 \cdot 2{,}89}{2} = 28{,}9\ cm^2.$$
4	**Comprueba que el incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo midiendo (con regla) y comprobando que la distancia de este punto a cada uno de los lados del triángulo es idéntica.**

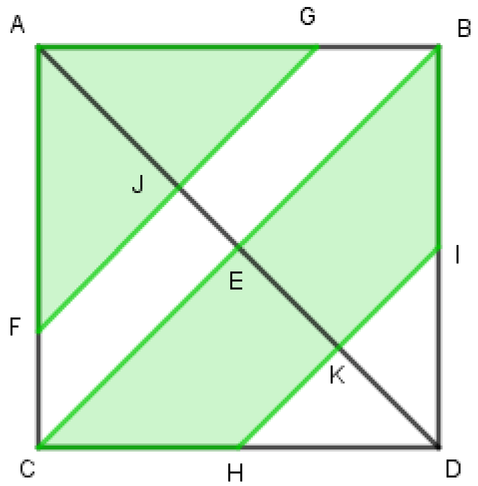
	Actividad con regla. No corresponde solución.
5	**Comprueba que el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita midiendo (con regla) y comprobando que la distancia de este punto a cada uno de los vértices del triángulo es la misma.**
	Actividad con regla. No corresponde solución.

- La propuesta 2 es completamente manual. No contiene actividades, así que **no hay sección de soluciones para la propuesta 2**.

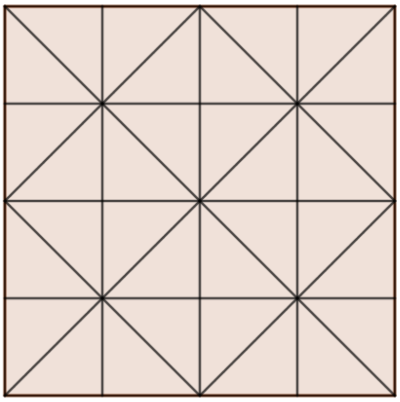
<table>
<tr><th colspan="2">Solución a propuesta 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Figura</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Mapa de cicatrices de división del papel en 3 partes con Geogebra. Fuente: elaboración propia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cuestiones a resolver y soluciones</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Reconoce dos parejas de triángulos semejantes que no sean iguales.</td></tr>
<tr><td></td><td>Los triángulos COG y BCE son semejantes por estar en posición de Tales.
Los triángulos COD y BOE son semejantes por tener todos sus ángulos iguales.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Calcula el lado del cuadrado resultante en la esquina superior derecha sabiendo que el lado del cuadrado de partida es de 15 cm.</td></tr>
</table>

	Para calcular el lado del cuadrado voy a utilizar la semejanza de triángulos con los triángulos BCE y COG. Del triángulo grande BCE conocemos los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$: - $\overline{BC} = 15\ cm$ por ser lado del cuadrado de partida. - $\overline{BE} = 7{,}5\ cm$ por ser E el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Del triángulo pequeño COG desconocemos sus medidas, pero podemos tomar $x = \overline{OG}$ (lado del cuadrado que nos piden), y entonces $\overline{CG} = 15 - x$. Por Tales planteamos la siguiente ecuación de lados proporcionales: $$\frac{x}{7{,}5} = \frac{15-x}{15},$$ $$15x = 7{,}5 \cdot (15 - x),$$ $$22{,}5x = 112{,}5,$$ de donde se obtiene $x = 5\ cm$.
3	**Calcula la diagonal del rectángulo resultante en la esquina inferior derecha.**
	Se pide calcular la longitud del segmento $\overline{OC}$. Por el apartado anterior sabemos que $\overline{OG} = 5cm,\ \overline{CG} = 10\ cm.$ Por el teorema de Pitágoras: $$\overline{OC}^2 = 5^2 + 10^2,$$ Luego, $\overline{OC} = \sqrt{125} \approx 11{,}18\ cm.$

Solución a propuesta 4: Corazón
Figura
 Mapa de cicatrices de corazón con Geogebra (I). Fuente: elaboración propia.
Cuestiones a resolver y soluciones

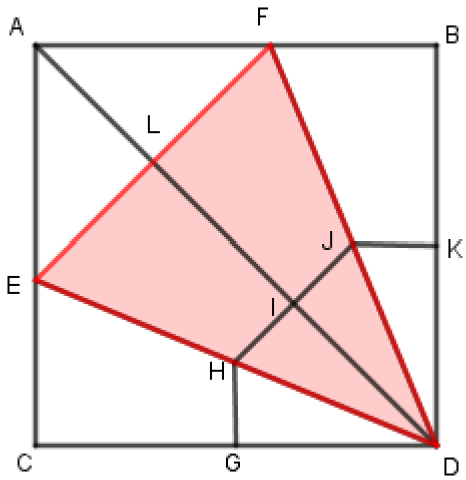
1	**Identifica dos parejas de triángulos semejantes que no sean iguales.**
	Los triángulos AFG y ABC son semejantes por estar en posición de Tales. Los triángulos DHI y BCD son semejantes por estar en posición de Tales.
2	**Calcula la altura sobre el lado desigual en los triángulos situados en la parte superior izquierda e inferior derecha del dibujo sabiendo que el cuadrado tiene lado 10 cm.**
	Se pide calcular los segmentos $\overline{AJ}$ y $\overline{KD}$. Para ello calculamos primero la diagonal del cuadrado. Sea d la diagonal, se tiene por Pitágoras $d^2 = 10^2 + 10^2$, de donde $d = \sqrt{200} \approx 14{,}14\ cm$. Por construcción, $\overline{EK} = \overline{KD}$. Por tanto $\overline{KD} = \frac{d/2}{2} = 3{,}54\ cm$. De nuevo por construcción, $\overline{AJ} = \overline{JK}$, y sabemos que $\overline{AK} = d - 3{,}54 = 10{,}6\ cm$. Luego, se tiene $\overline{AJ} = \frac{10{,}6}{2} = 5{,}3\ cm$.
3	**Calcula el área del trapecio y el triángulo señalados en color verde.**
	El trapecio verde tiene como bases $\overline{BC} = d = 14{,}14$ y $\overline{HI} = 2 \cdot 3{,}54 = 7{,}08$. Su altura es $\overline{EK} = \overline{KD} = 3{,}54\ cm$. Si aplicamos la fórmula del área del trapecio se tiene: $$A_{trapecio} = \frac{(14{,}14+7{,}08)\cdot 3{,}54}{2} \approx 37{,}56\ cm^2.$$ Para el triángulo verde vamos a tomar como base el segmento $\overline{FG}$y como altura el segmento $\overline{AJ} = 5{,}3\ cm$. El segmento $\overline{\mathrm{FG}}$ es por construcción dos veces el segmento $\overline{\mathrm{AJ}}$. Luego, tenemos que $\overline{\mathrm{FG}} = 2 \cdot 5{,}3 = 10{,}6$ cm. Si aplicamos la fórmula del área del triángulo se tiene: $$A_{triángulo} = \frac{10{,}6 \cdot 5{,}3}{2} = 28{,}09\ cm^2.$$
4	**Encuentra y aplica una forma alternativa para calcular el área del trapecio anterior.**
	Podemos, por ejemplo, restar las áreas de los triángulos BCD y DIH. De hecho, de esta forma no perderemos decimales en las aproximaciones al operar con números naturales, dando así el resultado exacto. El área del triángulo grande BCD es $\frac{10\cdot 10}{2} = 50\ cm^2$. El área del triángulo pequeño DIH es $\frac{5\cdot 5}{2} = 12{,}5\ cm^2$. Se tiene que el área exacta del trapecio verde es: $$A_{trapecio} = 50 - 12{,}5 = 37{,}5\ cm^2.$$

Solución a propuesta 5: Pajarita	
Figura	
 Mapa de cicatrices de pajarita con Geogebra (II). Fuente: elaboración propia.	
Cuestiones a resolver y soluciones	
1	**Determinar el valor de todos los ángulos y lados que conforman el pico de la pajarita sabiendo que el cuadrado de partida tiene lado l=10 cm.**
	Lo primero que hay que observar en el mapa de cicatrices es que obtenemos 32 triángulos iguales. El pico de la pajarita se corresponde con uno de ellos. Cada triángulo es además rectángulo e isósceles, lo que implica que sus ángulos miden 90º, 45º y 45º. De los lados de un triángulo conocemos sus dos catetos ya que son $\frac{1}{4}$ del lado del cuadrado de partida. Es decir los catetos miden 2,5 cm. Para la hipotenusa planteamos el teorema de Pitágoras, teniendo la ecuación: $hipotenusa^2 = 2{,}5^2 + 2{,}5^2$, de donde $hipotenusa = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54\ cm$.
2	**Calcular el área lateral de la pajarita (para un único lado) si el cuadrado de partida tiene lado l=10 cm.**
	La pajarita la componen 8 de estos triángulos pequeños iguales de los cuales ya conocemos sus dimensiones. Por tanto: $A_{lateral\ pajarita} = 8 \cdot A_{triángulo} = 8 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 2{,}5}{2} = 25\ cm^2.$
3	**Emplea proporcionalidad para calcular el área anterior.**

	Sabemos que los 32 triángulos pequeños de la figura desplegada se corresponden con el área total del cuadrado de partida de lado 10 cm. Esto es 100 cm^2. Por otra parte sabemos que la pajarita, vista desde un costado, la componen 8 de estos triángulos. Podemos plantear la siguiente proporción: $\frac{100}{32} = \frac{x}{8}$, De donde $x = \frac{8 \cdot 100}{32} = 25\ cm^2$.
4	**¿Cuánto debe medir el cuadrado de partida si queremos que el área lateral de la pajarita sea de 30 cm^2?**
	Vista la simplicidad del problema usando proporción, podemos plantear la ecuación: $\frac{30}{8} = \frac{A_{cuadrado}}{32}$, Obteniendo entonces $A_{cuadrado} = 120\ cm^2$. Por tanto el cuadrado de partida ha de tener lado $l = \sqrt{120} \approx 10{,}95\ cm$.

Solución a propuesta 6: Ave acuática con alas

Figura

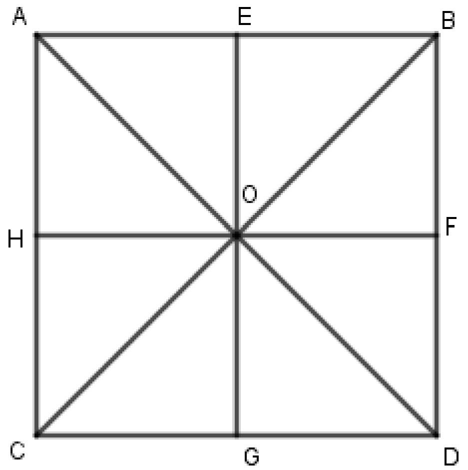


Mapa de cicatrices del cuerpo en ave acuática con Geogebra (I). Fuente: elaboración propia.

Cuestiones a resolver y soluciones

1	**Determina el valor de los ángulos que forman el triángulo rojo.**
	Se pide calcular los ángulos $\widehat{EDF}$, $\widehat{DFE}$ y $\widehat{DEF}$. Para el ángulo $\widehat{EDF}$ se ha dividido un ángulo recto en 4 partes iguales, de las cuales nuestro triángulo abarca dos de ellas. Así $\widehat{EDF} = 45°$. El triángulo es isósceles por construcción. Si nos damos cuenta de esta

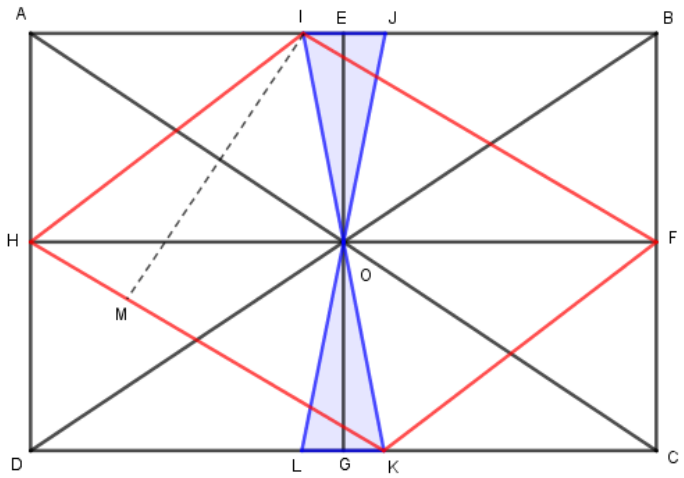
	propiedad, entonces $\widehat{DFE} = \widehat{DEF} = \frac{180°-45°}{2} = 67,5°$. Si no nos diésemos cuenta de ello, entonces podemos fijarnos en los triángulos DFL y DEL, que son rectángulos. En este caso el cálculo sería: $\widehat{DFE} = \widehat{DEF} = 180° - (90° + 22,5°) = 67,5°$.
2	**Calcula el perímetro y área del triángulo rojo si el cuadrado de partida tiene lado 10 cm.**
	Para el área del triángulo rojo (triángulo DEF) tomaremos como altura el segmento $\overline{DL}$ y como base el segmento $\overline{EF}$. Es fácil observar en la construcción que $\overline{DL} = lado\ del\ cuadrado = 10\ cm$. Por otra parte $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{EL}$, y $\overline{EL} = diagonal\ cuadrado - \overline{DL}$. Vamos entonces a calcular la diagonal d del cuadrado con Pitágoras: $d^2 = 10^2 + 10^2$, Obteniendo $d = \sqrt{200} \approx 14,14$. Por tanto $\overline{EF} = 2 \cdot (14,14 - 10) = 8,28\ cm$. El área es: $A_{DEF} = \frac{8,28 \cdot 10}{2} = 41,4\ cm^2$. Para el perímetro necesitamos calcular $\overline{ED} = \overline{DF} = x$. Por el teorema de Pitágoras: $x^2 = 4,14^2 + 10^2$, De donde se obtiene $x = \sqrt{117,14} = 10,82$. El perímetro es: $P_{DEF} = 10,82 + 10,82 + 8,28 = 29,92\ cm$.
3	**¿Es regular el pentágono AEHJF?**
	Un pentágono regular tiene todos sus ángulos idénticos e iguales a 108º. Sin embargo, en la figura, el ángulo $\widehat{EAF}$ coincide con una esquina del cuadrado y vale por tanto 90º. Se tiene entonces que el pentágono NO es regular.
Figura	



Mapa de cicatrices de alas en ave acuática con Geogebra. Fuente: elaboración propia.

Cuestiones a resolver y soluciones	
4	**Señala dos ángulos complementarios, dos suplementarios y dos iguales y opuestos por el vértice.**
	Complementarios: $\widehat{HAO}$ y $\widehat{OAE}$. Suplementarios: $\widehat{AOE}$ y $\widehat{EOD}$. Iguales y opuestos por el vértice: $\widehat{EOB}$ y $\widehat{COG}$.
5	**Calcula el perímetro de cada uno de los triángulos resultantes al desdoblar el papel suponiendo que el área del cuadrado es de 144 cm^2.**
	Al desdoblar el papel se obtienen 8 triángulos iguales como se aprecia en la figura. Calcularemos el perímetro del triángulo AHO. Lo primero es determinar la longitud del lado del cuadrado de partida. Si su área es 144 cm^2, entonces $l = \sqrt{144} = 12\ cm.$. $\overline{AH} = \overline{HO}$ es la mitad del lado. Es decir $\overline{AH} = \overline{HO} = 6\ cm$. El lado $\overline{AO}$ se calcula con Pitágoras: $\overline{AO}^2 = 6^2 + 6^2$, obteniendo $\overline{AO} = \sqrt{72} \approx 8{,}49\ cm$. Finalmente, el perímetro es: $P_{AHO} = 6 + 6 + 8{,}49 = 20{,}49\ cm.$

Solución a propuesta 7: Estrella pentagonal
Figura



Mapa de cicatrices de estrella pentagonal con Geogebra. Fuente: elaboración propia.

Cuestiones a resolver y soluciones	
1	**Identifica dos parejas de ángulos complementarios y dos de ángulos suplementarios.**
	Complementarios: - $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$. - $\widehat{EOJ}$ y $\widehat{JOF}$. Suplementarios: - $\widehat{AOI}$ y $\widehat{IOC}$. - $\widehat{BOC}$ y $\widehat{COD}$.
2	**Calcular la diagonal del rectángulo de partida sabiendo que hemos tomado un folio DIN-A4 de 29,7cm x 21cm.**
	Para calcular la diagonal d basta con usar el teorema de Pitágoras: $d^2 = 29{,}7^2 + 21^2$, Obteniendo así $d = \sqrt{1323{,}09} \approx 36{,}37\ cm$.
3	**Halla el perímetro de los triángulos en color azul sabiendo que su lado desigual mide 7 cm.**
	Los triángulos azules son isósceles cuyo lado desigual vale 7 cm. Esto quiere decir que $\overline{LK} = 7cm$, y por tanto $\overline{LG} = 3{,}5\ cm$. Además conocemos que $\overline{OG}$ es la mitad de la altura del rectángulo de partida. Luego $\overline{OG} = \frac{21}{2} = 10{,}5cm$. Aplicando Pitágoras en el triángulo $\widehat{LGO}$ se tiene: $\overline{LO}^2 = 3{,}5^2 + 10{,}5^2$, Luego $\overline{LO} = \sqrt{122{,}5} = 11{,}07\ cm$. Así, el perímetro es: $P_{LOG} = 7 + 11{,}07 + 11{,}07 = 29{,}14\ cm$.
4	**Calcula la altura (tomando como base el lado de mayor longitud) y el área del paralelogramo representado en rojo. Es necesario usar el**

dato proporcionado en la actividad anterior.

Necesitamos la altura h y la base b del paralelogramo para así poder aplicar la fórmula del área del paralelogramo:

$$A_{paralelogramo} = b \cdot h.$$

La base $\overline{HK}$ es sencilla de calcular ya que $\overline{DK} = \frac{29{,}7}{2} + 3{,}5 = 18{,}35\ cm$ y $\overline{DH} = \frac{21}{2} = 10{,}5\ cm$. Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$\overline{HK}^2 = 18{,}35^2 + 10{,}5^2.$

Obteniendo $b = \overline{HK} \approx 21{,}14\ cm.$

Para calcular la altura h necesitamos plantear un sistema de ecuaciones en el triángulo HKI sabiendo que sus lados miden:

- $\overline{HK} = 21{,}14\ cm.$
- $\overline{IK} = 2 \cdot\ 11{,}07 = 22{,}14\ cm.$
- $\overline{HI} = \sqrt{10{,}5^2 + 11{,}35^2} = 15{,}46\ cm.$

Llamando $h = \overline{IM}, x = \ \overline{HM}$, se tiene el sistema:

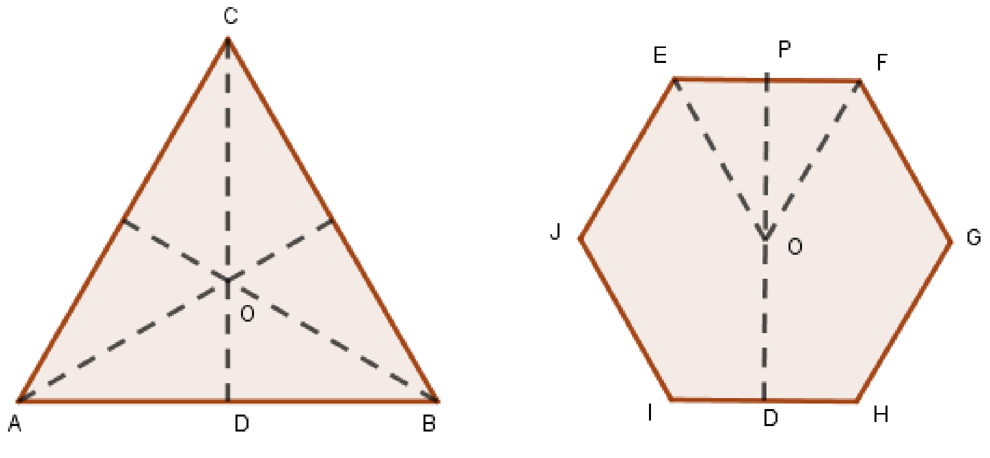
$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 15{,}46^2 \\ h^2 + (21{,}14 - x)^2 = 22{,}14^2 \end{cases}$$

Cuya solución es: $x = 4{,}63\ cm; h = 14{,}75\ cm.$

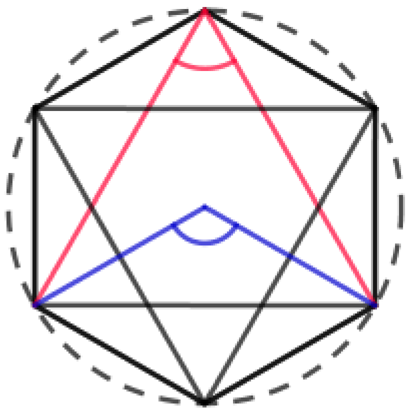
Así, el área del paralelogramo:

$$A_{paralelogramo} = b \cdot h = 21{,}14 \cdot 14{,}75 = 311{,}82\ cm^2.$$

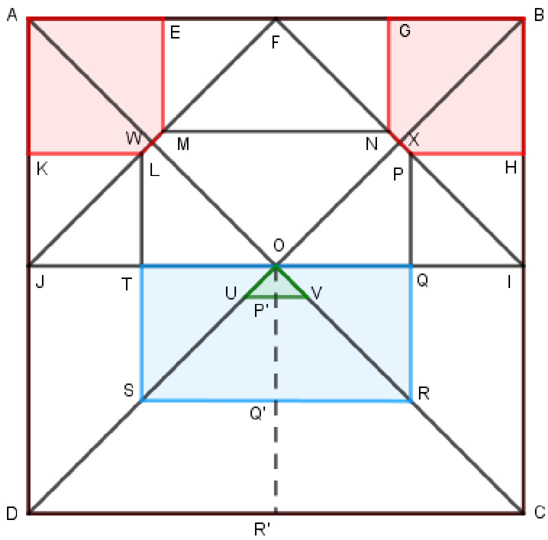
Solución a propuesta 8: Estrella de seis puntas
Figura



Mapas de cicatrices en estrella de 6 puntas con Geogebra. Fuente. Elaboración propia.

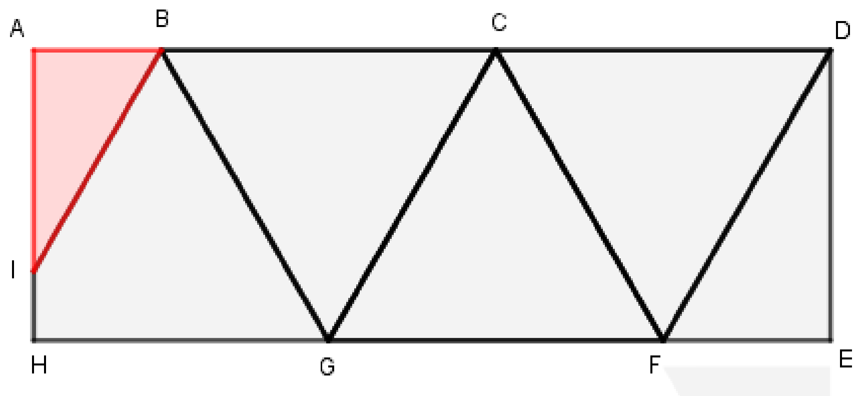
Cuestiones a resolver y soluciones	
1	**Calcula el valor de los ángulos que forman los vértices de la estrella.**
	La clave de este ejercicio está en darse cuenta que la estrella se puede inscribir en un hexágono regular y, por tanto, en una circunferencia como se muestra en la imagen:  Construcción auxiliar en estrella de 6 puntas con Geogebra. Fuente: elaboración propia. De esta forma, cada ángulo de los vértices de la estrella (rojo) es la mitad del ángulo central marcado en azul. Como el ángulo central mide $\frac{2 \cdot 360}{6} = 120$º, entonces los ángulos pedidos son de 60º.
2	**Determina apotema, perímetro y área del hexágono si el triángulo equilátero de partida tiene lado $\mathbf{l = 15}$ cm.**
	Comencemos por la apotema. Se pide calcular la distancia del segmento $\overline{OP}$. Sabemos por la propuesta 1 que $\overline{OD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CD}$. Además, por simetría en los polígonos regulares, $\overline{OD} = \overline{OP}$. Aplicando Pitágoras en el triángulo ADC, se tiene: $\overline{CD} = \sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 12{,}99$ cm. Tenemos entonces $\overline{OP} = \frac{12{,}99}{3} = 4{,}33$ cm. Para el perímetro del hexágono, necesitamos el valor de los lados. Como es hexágono regular nos limitamos a calcular $\overline{EF}$. Si llamamos $x = \overline{PF}$, $2x = \overline{OF}$, aplicando Pitágoras en el triángulo OEF se tiene la ecuación: $(2x)^2 = x^2 + 4{,}33^2$, Despejando: $$x = \sqrt{\frac{4{,}33^2}{3}} = 2{,}5\ cm.$$ Por tanto $\overline{EF} = 2 \cdot 2{,}5 = 5\ cm$, y el perímetro del hexágono es aproximadamente igual a $6 \cdot 5 = 30\ cm$.

	Para el área, aplicamos la fórmula: $Area = (perimetro \cdot apotema)/2$. $Area = (30 \cdot 4{,}33)/2 = 64{,}95\ cm^2$.

Solución a propuesta 9: Mariposa de papel	
Figura	
 Mapa de cicatrices de mariposa de papel con Geogebra. Fuente: elaboración propia.	
Cuestiones a resolver y soluciones	
1	**Identifica al menos tres triángulos rectángulos que sean semejantes.**
	Basta coger, por ejemplo, los triángulos OUV, OSR y OCD.
2	**Halla la altura de la cabeza de la mariposa (triángulo verde) sabiendo que los lados iguales del triángulo isósceles verde miden 1 cm y que el lado del cuadrado de partida es de 15 cm.**

	La distancia pedida es $\overline{OP'}$. Para calcularla usaremos que los triángulos OP'V y OR'C están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes. Calculamos primero $\overline{OC}$ fácilmente con el teorema de Pitágoras: $$\overline{OC} = \sqrt{7{,}5^2 + 7{,}5^2} \approx 10{,}61\ cm.$$ Aplicando la semejanza de triángulos tenemos la relación de proporciones: $$\frac{\overline{P'V}}{7{,}5} = \frac{1}{10{,}61},$$ Obteniendo $\overline{P'V} \approx 0{,}71\ cm.$ Finalmente $\overline{OP'} = \overline{P'V} \approx 0{,}71\ cm.$
3	**Aplica el resultado anterior para calcular el área del rectángulo azul.**
	Se pide calcular el área del rectángulo que tiene por base $\overline{SR}$ y por altura $\overline{TS}$. Como $\overline{TS} = \overline{OQ'}$, tomaremos $\overline{OQ'}$ por comodidad en los cálculos. Como $\overline{OP'} = 0{,}71$, entonces $\overline{P'R'} = 7{,}5 - 0{,}71 = 6{,}79$. Por construcción $\overline{P'Q'} = \overline{Q'R'}$. Luego $\overline{P'Q'} = \frac{\overline{P'R'}}{2} = 3{,}395\ cm.$ Por otro lado $\overline{OQ'} = \overline{OP'} + \overline{P'Q'} = 0{,}71 + 3{,}395 = 4{,}105\ cm.$ Ya tenemos la altura. Calcular la base $\overline{SR}$ es más sencilla ya que $\overline{Q'R} = \overline{OQ'}$. Obtenemos entonces que la base del rectángulo azul es $2 \cdot 4{,}105 = 8{,}21\ cm.$ El área pedida es $8{,}21 \cdot 4{,}105 = 33{,}70\ cm^2$.
4	**Determina el perímetro de los dos pentágonos en color rojo.**
	Los dos pentágonos son simétricos y por tanto tienen el mismo perímetro. Nos centramos en calcular uno de ellos, por ejemplo del pentágono AEMLK. Los segmentos $\overline{KL}$ y $\overline{EM}$ son iguales y se pueden calcular fácilmente así: $$\overline{KL} = \overline{EM} = \frac{15 - \overline{SR}}{2} = \frac{15 - 8{,}21}{2} = 3{,}395\ cm.$$ Los segmentos $\overline{AK}$ y $\overline{AE}$ son iguales y se calculan: $$\overline{AK} = \overline{AE} = \overline{AJ} - \overline{KJ} = 7{,}5 - \overline{KL} = 7{,}5 - 3{,}395 = 4{,}105\ cm.$$ El segmento $\overline{LM}$ es más complejo de calcular. Vamos a calcular $\overline{LW}$

	para multiplicarlo por 2 ya que $\overline{LM} = 2 \cdot \overline{LW}$. El segmento $\overline{JF}$ mide 10,61 cm por ser $\overline{JF} = \overline{DO} = \overline{OC}$. Así pues, $\overline{JW} = \frac{10,61}{2} = 5,305\ cm$. El segmento $\overline{JL}$ se puede calcular con Pitágoras en el triángulo JKL: $$\overline{JL} = \sqrt{3,395^2 + 3,395^2} \approx 4,80\ cm.$$ Ya podemos calcular $\overline{LW}$: $\overline{LW} = \overline{JW} - \overline{JL} = 0,505\ cm$. Y obtenemos $\overline{LM}$ como $2 \cdot 0,505 = 1,01\ cm$. Sumando todos los lados, el perímetro del pentágono rojo AEMLK es $$2 \cdot 3,395 + 2 \cdot 4,105 + 1,01 = 16,01\ cm.$$

Solución a propuesta 10: Tetraedro	
Figura	
 Mapa de cicatrices de tetraedro con Geogebra (II). Fuente. Elaboración propia.	
Cuestiones a resolver y soluciones	
1	**Determina las dimensiones de los dos rectángulos que forman los módulos y halla su área sabiendo que para la construcción del tetraedro se ha partido de un folio DIN-A4 de dimensiones $29,7$ cm x 21 cm.**
	Los rectángulos que forman los módulos tienen como base el lado de menor longitud en un folio DIN-A4, es decir 21 cm. Esto es el valor del segmento $\overline{AD}$. La altura $\overline{AH}$ se calcula dividiendo el largo de un folio DIN-A4 (29,7 cm) entre 4. Esto es 7,425 cm.

2	**Calcula la longitud del lado del tetraedro.**
	Nos vale, por ejemplo, determinar la longitud del segmento $\overline{DF}$. Sabemos que $\overline{DE} = \overline{AH} = 7{,}425\ cm$. Tomando $\overline{DF} = x$, y aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo DEF obtenemos: $$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 7{,}425^2.$$ Resolviendo la ecuación, $x^2 = 73{,}5075$. Por tanto, $\overline{DF} = \sqrt{73{,}5075} \approx 8{,}57\ cm$.
3	**Determina el área de una cara del tetraedro y su área total. ¿Qué área tendrá la parte visible del tetraedro si lo lanzamos sobre una mesa?**
	Cada una de las caras del tetraedro tienen base 8,57 cm y altura 7,425 cm. Aplicando la ya conocida fórmula del área del triángulo obtenemos que el área de una cara del tetraedro es $\frac{8{,}57 \cdot 7{,}425}{2} \approx 31{,}82\ cm^2$. Por otra parte, por definición un tetraedro lo conforman 4 triángulos equiláteros. El área total del tetraedro será $4 \cdot 31{,}82 = 127{,}26\ cm^2$. Al lanzar un tetraedro, el sólido queda apoyado sobre una de las caras, dejando al descubierto tres de las cuatro caras del tetraedro. Entonces la parte visible del tetraedro ocupará un área de $3 \cdot 31{,}82 = 95{,}45\ cm^2$
4	**Calcula la superficie que ocupa la región coloreada en rojo en la figura.**
	Buscamos el área que ocupa el triángulo ABI. Una posible solución es la siguiente: Los triángulos ABI y DEF son semejantes. Surge así la ecuación: $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{DE}}$. Podemos calcular $\overline{AB}$ como $\overline{AD} - \overline{BD}$, obteniendo $\overline{AB} = 21 - 2 \cdot 8{,}57 = 3{,}86\ cm$. Volviendo a la ecuación y sustituyendo todo lo que sabemos: $\frac{3{,}86}{4{,}29} = \frac{\overline{AI}}{7{,}425}$, Al resolver, $\overline{AI} = 6{,}68\ cm$.

	Finalmente, el área de la región roja es $\frac{3,86 \cdot 6,68}{2} = 12,89\ cm^2$.
5	**Calcula las dimensiones del rectángulo de partida si queremos conseguir un tetraedro de lado 5 cm.**
	Vamos a calcular el lado $\overline{DE}$ suponiendo que los triángulos equiláteros de la figura tienen lado $l = 5\ cm$. De nuevo usando Pitágoras: $5^2 = 2,5^2 + \overline{DE}^2$, Obteniendo $\overline{DE} \approx 4,33\ cm$. El lado de mayor longitud del rectángulo de partida será $4 \cdot 4,33 = 17,32\ cm$. Para calcular el lado de menor longitud del rectángulo inicial aplicamos una proporción obteniendo: $$lado\ menor = \frac{21 \cdot 17,32}{29,7} = 12,25\ cm.$$

6. Puesta en práctica del proyecto – IES Ángel Corella

6.1. Contexto general

El IES Ángel Corella es un centro público trilingüe (español, inglés, francés) de la Comunidad de Madrid situado en el Polígono Industrial "La Mina" de Colmenar Viejo (C/del Pradillo, 3) que forma parte de la red STEMadrid y es Escuela Embajadora del Parlamento Europeo (Proyecto Educativo IES Ángel Corella, 2019).

Inicialmente el centro fue creado en 1984 como centro de Formación Profesional y en el año 1997 incorporó la ESO y el Bachillerato, pasando a convertirse en un Centro de Secundaria y Ciclos Formativos. En el año 2010, fue seleccionado por la Consejería de Educación para impartir las enseñanzas del Proyecto Bilingüe inglés. En el año 2018, incorporó las enseñanzas de francés para iniciar el camino trilingüe y fue seleccionado para formar parte de la primera Red STEMadrid.

Se trata de un centro tranquilo, sin especiales problemas de convivencia, demandado por un alumnado heterogéneo. El hecho de ser "centro trilingüe", juega un papel muy importante, haciendo que sea un instituto muy valorado y fuertemente demandado. Actualmente (a marzo de 2019) cuenta con 968 alumnos y 80 profesores.

El nivel socio-económico-cultural de las familias es muy variado aunque ha ido aumentando en los últimos años y, con ello, la implicación y expectativas de las familias con respecto a la educación de sus hijos.

El instituto posee una amplia oferta educativa. En él se ofertan e imparten las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato de humanidades y ciencias sociales y Bachillerato científico-tecnológico, Ciclos Formativos de Grado Medio: gestión administrativa (familia de administración y gestión), sistemas microinformáticos y redes (familia de informática y comunicaciones) e instalaciones eléctricas y automáticas (familia de informática y comunicaciones), Ciclos Formativos de Grado Superior en administración y finanzas y dos Ciclos Formativos de Formación Profesional Básica: electricidad y electrónica y servicios administrativos.

Dos rasgos característicos del centro son la búsqueda de la excelencia mediante el desarrollo de una educación individual y personalizada y el compromiso de una educación integral, cuyo objetivo consiste en formar personas, futuros ciudadanos y actores activos comprometidos con una sociedad cada vez más diversa y globalizada (Proyecto Educativo IES Ángel Corella, 2019).

Otro rasgo significativo del centro, y que puede resultar diferencial con otros, es que cuenta con un Aula TGD, es decir, un aula de referencia para atender a alumnos del espectro autista.

6.2. Contexto específico

El presente proyecto de innovación se llevó a cabo mediante la aplicación de una experiencia piloto en el aula de 3º ESO B del IES Ángel Corella.

La característica más destacable de este grupo es que se trata de un grupo mixto, es decir, constituido por alumnos tanto de sección como de programa. La separación es la siguiente:

Número total de alumnos en 3º ESO B	31 alumnos
Número de alumnos matriculados en matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	25 alumnos
Número de alumnos matriculados en matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas	6 alumnos

A partir de aquí me centraré en valorar 3º ESO B desde mi experiencia dando clase a los 25 alumnos y alumnas del grupo matriculados en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, ya que fueron los chicos con los que tuve la oportunidad de poner en práctica este proyecto.

Se incluye una ficha con las principales características del grupo y una valoración cualitativa del mismo.

Ficha resumen:

Número de alumnos matriculados en matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	25 alumnos
Sexo de los alumnos	7 chicos / 18 chicas
Alumnos de sección	14 alumnos
Alumnos de programa	11 alumnos
Número de alumnos extranjeros	3 alumnos extranjeros
ACNEEs	Ninguno
Alumnos con las matemáticas pendientes del curso anterior	Ninguno
Número de alumnos repetidores	2 alumnos
Alumnos que suspendieron la 1ª evaluación	4 alumnos
Alumnos que recuperaron la 1ª evaluación	Nadie
Alumnos que suspendieron la 2ª evaluación	7 alumnos
Alumnos que recuperaron la 2ª evaluación	1 alumno
Nota media 1ª evaluación	6, 21
Nota media 2ª evaluación	5, 72

Descripción cualitativa del grupo:

3º ESO B es un grupo con un nivel medio en matemáticas. Al ser un grupo mixto, el nivel es muy variado pero el ambiente que reina entre ellos es muy bueno, no ocurre como en algunos grupos únicamente de sección donde surgen egos o en aquellos grupos de programa que se consideran “menos inteligentes” que el resto.

El rasgo que más caracteriza al grupo es su participación y energía. En cuanto al comportamiento de los alumnos en el aula, podría decirse que por lo general es magnífico. Durante las clases los chicos y chicas muestran interés, participan y trabajan en clase. Suele haber dos o tres alumnos más desconectados o dispersos pero lo cierto es que en la hora de matemáticas el grupo trabaja. Las clases son muy dinámicas ya que siempre hay gente que responde a las preguntas del profesor y dispuesta a salir a la pizarra. Esto es lo que más me sorprendió: para corregir algún ejercicio pendiente o salir a resolver la tarea propuesta siempre hay al menos 7-8 alumnos deseando salir a la pizarra.

No obstante, no todo es perfecto en clase, se trata de alumnos muy espontáneos. Esto tiene su cara positiva puesto que siempre preguntan dudas y se interesan por los ejercicios, pero también su cara negativa ya que es habitual verlos hablar entre ellos y ser especialmente ruidosos (sobre todo en la clase de los viernes a penúltima hora). Diré que es verdad que el ruido se suele crear al mandar trabajo en clase, ya que durante las explicaciones el grupo permanece en silencio y atendiendo.

Pese a que son trabajadores en clase y su comportamiento es por lo general muy bueno, en cuanto al trabajo en casa son más irregulares. Hay alumnos bastante constantes respecto al trabajo en casa y realización de deberes, pero lo cierto es que poca gente siempre los hace siendo lo más habitual lo contrario: alumnos que nunca o casi nunca han trabajado los contenidos y ejercicios en casa. Esto se traduce en que el buen trabajo en clase luego no se ve complementado con trabajo en casa.

De cara a los exámenes y calificaciones, los resultados no son los mejores. Ya que es un grupo muy trabajador y con una actitud magnífica en el aula, siempre se espera más de ellos en los exámenes pero sus calificaciones muestran que el trabajo en casa no es el adecuado. Por ejemplo, la nota media de sus calificaciones en matemáticas es de 6,21 en la 1ª evaluación y 5,72 en la 2ª evaluación, lo cual está muy por debajo de sus posibilidades.

Pese a ser poco trabajadores en casa y ciertamente ruidosos en ocasiones, su relación con la profesora de matemáticas Mª Carmen Hurtado es muy buena, no he presenciado ninguna falta de respeto a la profesora y he percibido un trato excelente y respetuoso por las dos partes.

Comentando desde mi experiencia como docente del grupo el tiempo que he estado en esta aula, ha sido muy agradable pasar tiempo con ellos. Agradezco su energía, su dinamismo, su interés durante las clases, siempre preguntando dudas, su actitud, el buen ambiente que crean y, sobre todo, la educación y respeto con la que siempre se han dirigido a mí y lo cómodo que me han hecho sentir. Son el pilar de este proyecto.

6.3. Descripción y desarrollo del proyecto

La experiencia piloto parte de llevar al aula de 3º ESO B algunas de las propuestas descritas en el apartado anterior. Aunque la idea inicial fue llevar a los alumnos cuantas más actividades con papiroflexia mejor, por cuestiones de tiempo esto no fue posible, así que su profesora y yo decidimos seleccionar las propuestas que consideramos más atractivas para el grupo. Estas son:

- Demostración de la suma de los ángulos de un triángulo.
- Corazón de papel.
- Ave acuática (sin alas).
- Pajarita de papel.
- Adicionales:
    - Construcción de tetraedro.
    - Construcción de barquito de papel.

El objetivo de las propuestas y actividades de papiroflexia llevadas al aula es repasar los contenidos de la unidad didáctica “Geometría plana” de cara a la realización del examen de la unidad. Con la papiroflexia trabajamos los contenidos de forma diferente, relacionando las construcciones con la geometría plana existente detrás de esas construcciones. Los contenidos de la unidad "Geometría plana" en la que se contextualizan las propuestas de papiroflexia son los siguientes:

- Ángulos en polígonos.
- Ángulos en la circunferencia.
- Semejanza de triángulos.
- Triángulos en posición de Tales.
- Teorema de Pitágoras. Aplicaciones del teorema.
- Cálculo de áreas y perímetros en figuras planas.

6.4. Desarrollo de las propuestas

Todas las propuestas se desarrollaron en el aula y con la siguiente secuenciación: primero comenzamos a construir la figura sin adelantarles de antemano el resultado. Durante la construcción yo realizo a la par que ellos la figura para que puedan observar cada uno de los pasos (deteniéndome más en aquellos más complejos y pasando por los pupitres para confirmar que van en buen camino). Una vez construida la figura es el turno de las actividades. Se introducía la actividad proporcionando en ocasiones algún tipo de pista que pudiese ayudar a los alumnos a resolverla. Cuando ya había sido pensada por parte de los alumnos, que podían trabajar tanto individualmente como cooperativamente, se resolvía en la pizarra. A veces algún alumno voluntariamente salía a resolver el problema para toda la clase y otras era yo quien explicaba la resolución. Finalmente dedicábamos varios minutos a resolver preguntas y reflexionar sobre el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

6.4.1. Demostración de la suma de los ángulos de un triángulo

Recuerdo de mis años en el instituto, que muchos resultados se dan y se asumen por los alumnos, pero no se demuestran. Por esta razón incluimos esta propuesta con papel en 3ºB, ya que aparte de trabajar matemáticas de forma distinta, permite ver visualmente que la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados. Concepto que se usaría en repetidos ejercicios a lo largo de la unidad.

La actitud de los alumnos frente a la actividad fue estupenda, como en todas las propuestas, y nos llevó aproximadamente 15 minutos; más tiempo del que presumiblemente pensaba que llevaría. No todos los chicos y chicas doblan papel con la misma velocidad y se percatan de los resultados al instante. Además la mayoría de ellos nunca han realizado papiroflexia, por lo que el ritmo en la construcción fue más lento que el que preveía.

Me gustaría mencionar dos observaciones sobre la propuesta:

1. Los estudiantes no recordaban qué son y cómo se trazan las alturas de un triángulo pese a haber visto el concepto en años anteriores. Les recordé brevemente la definición de altura para seguir con la actividad.

2. Algunos alumnos no se percataron de haber terminado la demostración cuando los tres ángulos forman un ángulo llano. Sobrevolaba por la clase la pregunta "¿ya está?", punto en el que tuve que decirles que dedicaran un momento a pensar lo que habían obtenido.

La actividad finaliza con los alumnos pegando en sus cuadernos la construcción.

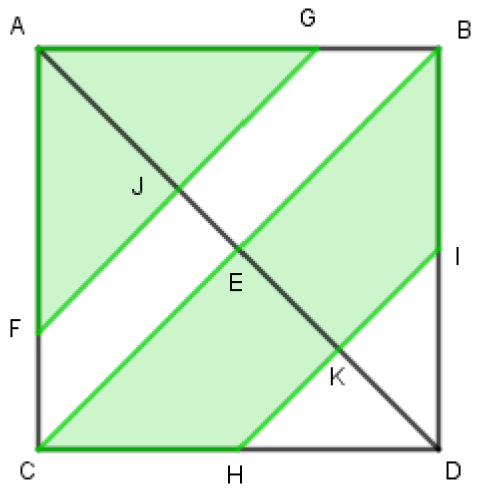
6.4.2. Corazón de papel

Finalizada la unidad, dedicamos dos sesiones completas a trabajar los contenidos mediante el uso de la papiroflexia. La primera propuesta llevada al aula durante estas dos sesiones fue el corazón de papel.

La propuesta llevo 40 minutos, repartidos en 10 minutos para la construcción y 30 minutos para la realización de las actividades.

Los chicos y chicos realizaron la construcción de la figura sin problemas. Tenían muchas ganas de trabajar de nuevo con papiroflexia tras la primera propuesta y muchos quedaron encantados con su corazón de papel.

Respecto a la idea inicial con las actividades, suprimí finalmente una de ellas para no ocupar más tiempo del previsto. Se incluyen más detalles sobre el desarrollo de las actividades en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th colspan="2">Corazón de papel</th></tr>
<tr><td colspan="2">Figura estudiada</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Mapa de cicatrices de corazón con Geogebra (II). Fuente: elaboración propia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Identifica dos parejas de triángulos semejantes.</td></tr>
<tr><td></td><td>Esta actividad resultó sencilla y todos supieron resolverla. Varios alumnos se ofrecieron voluntarios a salir a la pizarra así que seleccioné a uno para que la resolviera para el resto de la clase.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Calcula la altura sobre el lado desigual en los triángulos situados en la parte superior izquierda e inferior derecha del dibujo sabiendo que el cuadrado tiene lado 10 cm.</td></tr>
<tr><td></td><td>Esta actividad resultó más complicada para los alumnos ya que, según percibí, no comprendían del todo el dibujo y se liaban con tantas líneas. La solución al ejercicio la realicé yo en la pizarra y tuve que repetirla hasta en tres ocasiones porque un sector de la clase tenía preguntas constantes.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Calcula el área del trapecio y el triángulo señalados en color verde.</td></tr>
</table>

	La dificultad de este ejercicio residió en no identificar triángulos isósceles más que en aplicar las fórmulas del área del triángulo y trapecio. Una vez determinados todas las distancias necesarias para poder realizar los cálculos, uno de los alumnos calculó las áreas de ambas figuras en la pizarra mientras yo me acercaba al pupitre de aquellos alumnos con dudas.
4	**Encuentra y aplica una forma alternativa para calcular el área del trapecio anterior.**
	Esta actividad finalmente no se llevó a cabo.

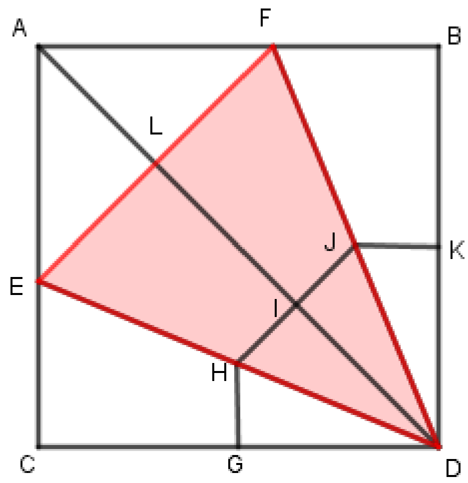
6.4.3. Ave acuática

Esta propuesta tuvo lugar durante dos sesiones puesto que la primera sesión dedicada exclusivamente a trabajar papiroflexia llegaba a su fin.

La construcción se desarrolló en 5-10 minutos. Posiblemente es la construcción más simple de todas las realizadas y, sumado a que los alumnos iban cogiendo soltura en el manejo del papel, la construcción fue muy dinámica y solamente tuvieron problemas algunos chicos y chicas en el último paso de levantar la figura.

Las actividades transcurrieron durante los primeros 15 minutos de la siguiente sesión. De nuevo, sufrieron modificaciones respecto a mi idea inicial. De hecho, no realizamos la construcción de las alas para economizar el tiempo. El detalle de las actividades realizadas se incluye a continuación:

Ave acuática (sin alas)
Figura estudiada



Mapa de cicatrices del cuerpo en ave acuática con Geogebra (II). Fuente: elaboración propia.

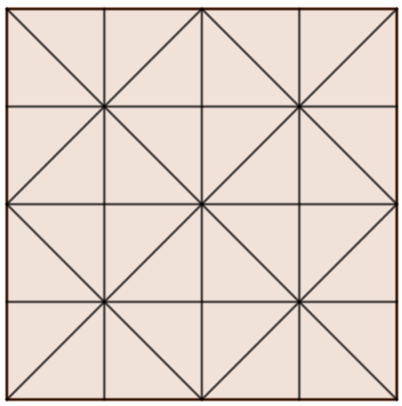
Actividades	
1	**Determina el valor de los ángulos que forman el triángulo rojo.**
	La actividad fue modificada. No se pidió calcular el valor de los ángulos que forman el triángulo en rojo, sino de seis ángulos dentro de la figura que permitían trabajar los conceptos de ángulo complementario, ángulo suplementario y triángulos en posición de Tales. Estos son: $\widehat{JDK}$, $\widehat{DKJ}$, $\widehat{DJK}$, $\widehat{DBF}$, $\widehat{DFB}$, $\widehat{AFD}$. Los alumnos resolvieron el ejercicio perfectamente y uno de ellos salió a la pizarra a corregirlo.
2	**Calcula el perímetro y área del triángulo rojo si el cuadrado de partida tiene lado 10 cm.**
	Inicialmente ningún alumno supo resolverlo. Por tanto, demostré que por construcción, los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{LD}$ son iguales. Con esto, algunos alumnos ya supieron como continuar para resolver el ejercicio. Muchos otros continuaron atascados, así que sugerí que calcularan el valor de la diagonal y, posteriormente, se fijasen en qué tipo de triángulo era el $\widehat{AFL}$. De nuevo, darse cuenta de que hablábamos de un triángulo isósceles causó confusión. Vistas las dificultades, resolví la actividad en la pizarra explicando cada paso detenidamente.
3	**¿Es regular el pentágono AEHJF?**
	Esta pregunta la propuse durante la construcción de la actividad y los alumnos respondieron muy bien al instante. Algunos respuestas que dieron fueron más precisas (“No lo es porque los ángulos de un pentágono regular miden 108º y aquí hay un ángulo recto de 90º”) que otras (“No es regular porque se ve a ojo”).

6.4.4. Pajarita de papel

Los 35 minutos restantes de la sesión los dedicamos a la construcción y análisis de la pajarita de papel. Junto con el corazón, fue la construcción que más les gustó, y muchos chicos y chicas se fueron visiblemente contentos.

La construcción nos llevó unos 15 minutos. Resultó más complicada que las anteriores ya que tuvimos que parar varias veces para repetir los pasos y tuve que acercarme constantemente por los pupitres porque siempre había alguien que se liaba con los pasos. Durante la clase, dos de los alumnos estuvieron más pendiente de hablar entre ellos que de la construcción y no consiguieron llegar al resultado.

Las actividades se estudiaron durante los últimos 20 minutos de clase. Mi sensación es que este tiempo fue insuficiente para asimilar todos los ejercicios. Me habría gustado dedicarle más tiempo para repetir cada actividad a aquellos alumnos con más dificultades, pero la construcción se llevó demasiado tiempo. Incluyo el detalle de las actividades vistas:

<table>
<tr><th colspan="2">Pajarita de papel</th></tr>
<tr><td colspan="2">Figura estudiada</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Mapa de cicatrices de pajarita con Geogebra (III). Fuente: elaboración propia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Determinar el valor de todos los ángulos y lados que conforman la cabeza de la pajarita sabiendo que el cuadrado de partida tiene lado l=10 cm.</td></tr>
<tr><td></td><td>La mayoría de los alumnos se dieron cuenta del valor de los ángulos y lados de la cabeza de la pajarita al enseñarles la figura desdoblada. Igualmente</td></tr>
</table>

	explicamos el porqué de los resultados a los chicos que preguntaban. Para calcular el valor del lado desigual de la cabeza, salió uno de los estudiantes a resolverlo en la pizarra mediante la aplicación del teorema de Pitágoras.
2	**Calcular el área lateral de la pajarita (para un único lado) si el cuadrado de partida tiene lado l=10 cm.**
	El principal problema de este ejercicio es que muchos alumnos no se percataban de que la pajarita la conforman 8 triángulos iguales, de los que ya conocemos el valor de sus lados por el problema anterior. Por ello tuve que dar esta pista a los muchachos. Dicho esto, calculamos el área de un triángulo y multiplicamos por 8.
3	**Emplea proporcionalidad para calcular el área anterior.**
	Este ejercicio lo resolví detenidamente en pizarra. Fue un tanto caótico ya que la clase se acababa y algunos alumnos no estuvieron concentrados en el ejercicio. Decidí plantear la actividad porque el contenido de proporcionalidad se vio en el trimestre anterior y así recordarles este concepto. Mi sorpresa fue que algunos alumnos apenas se acordaban; aunque planteando el ejercicio con regla de tres consiguieron entenderlo. Dos chicas me transmitieron que preferían la otra forma de resolución que esta mediante proporcionalidad.
4	**¿Cuánto debe medir el cuadrado de partida si queremos que el área lateral de la pajarita sea de 30 cm^2?**
	Esta actividad no fue planteada porque acabó la clase. No obstante, la considero de las más interesantes ya que obliga a pensar al estudiante.

6.4.5. Construcciones adicionales

Tras las vacaciones de Semana Santa, regresé un día al aula de 3º ESO B visto el éxito que causó entre los alumnos el uso de papiroflexia y, aprovechando que su profesora había iniciado con ellos la geometría del espacio, construimos un barquito de papel (inicialmente no constaba en las propuestas pero se realizó a petición de los alumnos) y un tetraedro, sin actividades asociadas.

6.4.5.1. Tetraedro

La sesión adicional con los alumnos duró aproximadamente 30 minutos, de los cuales la construcción del tetraedro ocupó 20-25 minutos.

La construcción llevada a cabo con los alumnos viene descrita en Belén Garrido (2016). Para ellos fue una construcción realmente difícil. Se trataba de la primera intervención de la papiroflexia modular en el aula, lo cual ocasionó notables dificultades a la hora de ensamblar los dos módulos. Fue la construcción en la que más atención individualizada tuve que hacer ya que los chicos y chicas se perdían y, pese a todo, algunos de los estudiantes no lograron llegar al resultado final del tetraedro y poder llevarse la figura a casa.

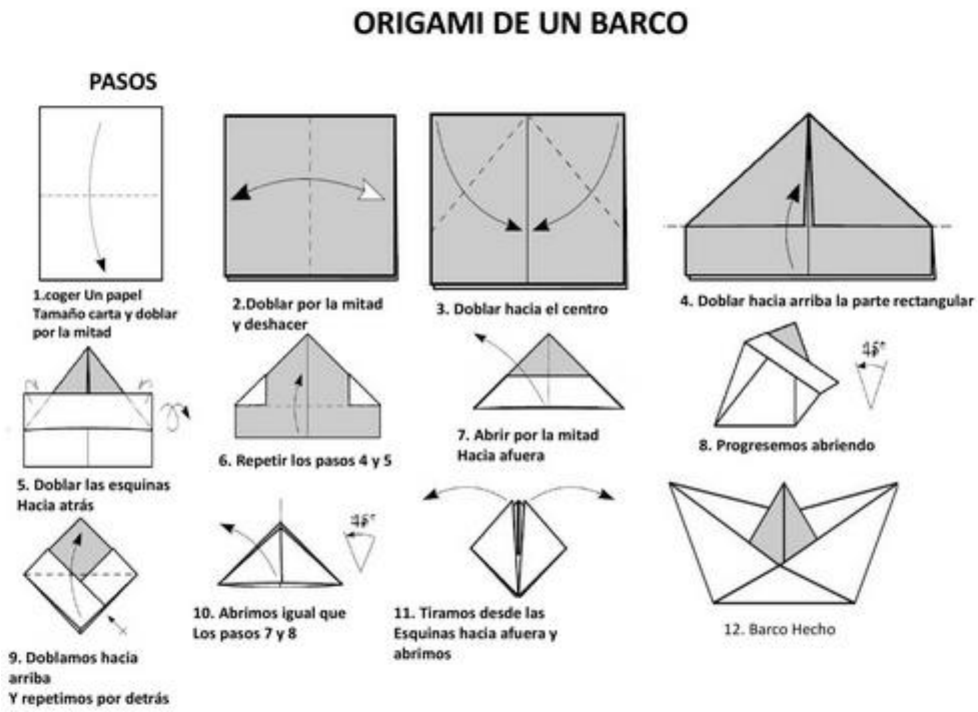
Definitivamente el tiempo empleado fue insuficiente y, en un futuro, de llevarlo al aula posiblemente fuera como taller extraordinario para aquellos alumnos más interesados en el tema, con el correspondiente estudio de actividades asociadas, por supuesto.

6.4.5.2. Barquito de papel

Se adjunta ficha con las características más relevantes relativas a la construcción del barco de papel llevada al aula:

Construcción de barco de papel
Construcción

Se sigue la construcción típica del barquito de papel:



Construcción de barco de papel. Fuente: Pinterest.

Resultado final

Barquito de papel. Fuente: elaboración propia.

Duración

La construcción del barquito de papel llevó 8-10 minutos.

Desarrollo de la actividad

La actividad se desarrolló según lo esperado. Todos los alumnos llegaron al resultado final ya que no se trata de una construcción complicada. También es cierto que el grupo adquirió soltura en el manejo del papel. Fue bonito percibir la ilusión de los chicos cuando llegan al resultado y de algunos de ellos al darse cuenta de que la figura va a resultar un barco. Se trata de una construcción tan típica que incluso algunos pocos alumnos se adelantaron a la construcción definitiva en los pasos finales.
Valoración
Desgraciadamente el tiempo de intervención de la papiroflexia en el aula fue limitado y no hubo tiempo de realizar actividades relacionadas a la construcción del barquito de papel. Creo que realizar una propuesta completa del barco de papel, con actividades asociadas a la construcción, podría haber sido más que interesante en cuanto dicha construcción conectaba la parte emocional del alumno con las matemáticas. Al final, esta propuesta no figuraba inicialmente en el proyecto y aparece aquí porque fueron los propios alumnos quienes la pidieron. Pienso que si empezamos una actividad con motivación e ilusión, será más fácil enganchar la parte lúdica de la construcción con la práctica de ejercicios.

6.5. Cuestionarios

Una vez finalizada la unidad didáctica y las actividades con papel desarrolladas en el aula para repasar la unidad, se realizaron dos cuestionarios (uno a alumnos, otro a la profesora de matemáticas y tutora Mª Carmen Hurtado) con el fin de recoger la opinión de los alumnos y la valoración de la actividad por parte de la profesora.

6.5.1. Cuestionario realizado a los alumnos

La sesión previa a la realización del examen de la unidad “Geometría del plano” se dedicó exclusivamente a repasar los contenidos abordados en la unidad mediante la realización de problemas referentes a cada uno de los puntos vistos. En los primeros minutos de la sesión se entregó a los alumnos un cuestionario relativo al uso de la papiroflexia durante el desarrollo de la unidad. El fin del cuestionario es recoger la visión de los alumnos sobre las actividades de origami y de repaso desarrolladas en el aula, así como su visión más general sobre la papiroflexia. En cierto modo con el cuestionario se buscó contrastar si mi percepción de la propuesta como docente se correspondía con la visión que los propios alumnos habían tenido al realizar la misma.

Al pasar el cuestionario se les comentó a los estudiantes que lo realizaran de forma anónima con el fin de recoger su opinión más sincera.

Este cuestionario, cuyo detalle puede consultarse en el Anexo III, consta de dos partes bien diferenciadas: una asociada a afirmaciones sencillas y la otra a preguntas más abiertas. Ambas se presentarán con más detalle a continuación:

6.5.1.1. Parte I del cuestionario – Afirmaciones

Esta primera parte del cuestionario consta de diez afirmaciones que los alumnos debían valorar con la opción que más se acercase a su opinión dentro de cuatro posibilidades: “Nada” (1), “Poco” (2), “Bastante” (3) y “Mucho” (4).

En la tabla de abajo se muestra el número de alumnos que señalaron cada opción en cada una de las diez afirmaciones planteadas (el recuento total es sobre 24 ya que el día en el que se entregó el cuestionario un alumno causó baja):

ID	**AFIRMACIÓN**	**Número de respuestas**			
		1	**2**	**3**	**4**
A1	Me ha gustado el uso de papiroflexia en matemáticas.	-	-	4	20
A2	Había utilizado la papiroflexia anteriormente como “hobbie”.	10	13	1	0
A3	Había utilizado la papiroflexia anteriormente en un aula.	13	11	-	-
A4	Las construcciones que hemos realizado me han parecido interesantes.	-	-	11	13

A5	Los problemas asociados a cada construcción han sido interesantes y entretenidos.	-	7	5	12
A6	El tiempo dedicado a cada una de las propuestas ha sido el adecuado.	-	4	4	16
A7	La dificultad de las actividades ha sido adecuada.	1	3	8	12
A8	Las actividades propuestas me han ayudado a repasar para el examen de la unidad.	1	4	7	12
A9	El uso de la papiroflexia me ha ayudado a comprender mejor la geometría.	1	2	10	11
A10	Me gustaría seguir utilizando la papiroflexia para explicar conceptos geométricos en próximos cursos.	-	-	3	21

6.5.1.2. Análisis de las respuestas a las afirmaciones

La aplicación de la papiroflexia en el aula de 3º B fue todo un éxito como muestran las respuestas de los alumnos a las afirmaciones planteadas.

Más del 83% de los alumnos (20 de los 24) eligen la mejor opción en la afirmación “me ha gustado el uso de papiroflexia en matemáticas”. Más importante aún, el 87’5% (21 de los 24) señala estar completamente de acuerdo en emplear papiroflexia para explicar geometría en próximos cursos. Estos datos reflejan efectivamente lo que yo percibía en sus caras durante las sesiones: alumnos encantados con el uso de papiroflexia y completamente implicados.

Me parece especialmente llamativo que más de la mitad de los alumnos no hubiesen utilizado la papiroflexia previamente en el aula. Pienso que esto se puede deber a que los docentes lo podemos ver como tiempo perdido, pero a mí me pareció todo lo contrario con mi experiencia. Sin ninguna duda, el ambiente que se creó en clase durante esas sesiones fue magnífico, con interacción constante entre profesor-alumno y alumno-alumno, y con chicos que habitualmente están más desconectados de la clase sintiéndose completamente partícipes de ella. Además de esto, se cumplió el objetivo con creces: repasar para el examen de la unidad. Aunque a esta cuestión las respuestas son más diversas, 19 de los 24 alumnos consideran que las actividades vinculadas a las construcciones les han ayudado bastante o mucho a repasar los contenidos de la unidad.

Por otra parte, la mayoría de alumnos (80%) considera que se ha dedicado el tiempo adecuado a cada propuesta y que la dificultad de las actividades ha sido adecuada. Estos ítems me interesaban especialmente porque no quería añadir ni actividades muy sencillas ni muy complejas; y pese a que algunas fueron realmente retadoras para el grupo, la valoración final de los alumnos es positiva.

6.5.1.3. Parte II del cuestionario – Cuestiones

Esta segunda parte del cuestionario consta de cuatro preguntas abiertas donde se pretende recoger la opinión del alumnado sobre:

- Valoración positiva de la experiencia.
- Valoración negativa de la experiencia.
- Otras construcciones a realizar.
- Sugerencias para aplicaciones posteriores de la actividad.

La siguiente tabla recoge las respuestas de cinco de los alumnos:

Pregunta	Respuestas de los alumnos
¿Qué es lo que más te ha gustado de las sesiones dedicadas a trabajar geometría con papiroflexia? ¿Por qué?	**Alumno 1:** • Las actividades que hemos hecho en clase me han gustado ya que después a la figura desdoblada aplicábamos los contenidos explicados. **Alumno 2:** • Las figuras porque te ayuda a verlo todo mucho mejor y luego mi hermana se ponía súper feliz porque se lo regalo, entonces a ella también le encanta. **Alumno 3:** • Me han gustado las figuras y también algunos de los ejercicios en la pizarra. **Alumno 4:** • El buen rato que supone y lo divertido que es. **Alumno 5:** • Que han sido muy entretenidas y me han ayudado a enterarme más.
¿Qué es lo que menos te ha gustado de las sesiones dedicadas a trabajar geometría con papiroflexia? ¿Por qué?	**Alumno 1:** • Que a veces me agobia tanto número en las figuras. **Alumno 2:** • Cuando te pierdes o alguien se pierde porque se pierde tiempo. **Alumno 3:** • Que a veces los dibujos eran algo complejos. **Alumno 4:** • La complicación de los problemas ya que algunas cosas no las entendía. **Alumno 5:** • Los problemas porque se me dan mal.

¿Qué otras construcciones te gustaría haber hecho?	**Alumno 1:** • Un barco de papel. **Alumno 2:** • Un barquito de papel o una muñeca para mi hermana. **Alumno 3:** • Alguna otra cualquiera pero estas me han gustado mucho. **Alumno 4:** • Una corbata. **Alumno 5:** • Cualquiera.
Escribe cualquier comentario/sugerencia que consideres sobre el uso de la papiroflexia en clase de matemáticas	**Alumno 1:** • Que me ha gustado trabajar con papiroflexia ya que es una actividad dinámica con la que aprendemos. **Alumno 2:** • Me parece muy interesante y sí que ayuda a verlo todo mejor y más rápido. **Alumno 3:** • Me ha ayudado a comprender más el tema. **Alumno 4:** • Se debería de hacer más y está muy bien la actividad. **Alumno 5:** • Hacer más.

6.5.1.4. Análisis de las respuestas a las cuestiones

Las respuestas de los alumnos dejaron varias conclusiones:

En general lo que más valoran de las propuestas es la construcción de la figura por lo divertido que es y el resultado final. No obstante, varios estudiantes señalaron el uso de la papiroflexia como técnica positiva a la hora de comprender mejor los contenidos y trabajar los problemas de la unidad de forma diferente. Por otra parte, lo que menos ha gustado, como me imaginaba, ha sido la complejidad y resolución de problemas. Algunos de ellos pedían más construcciones y menos problemas, lo cual no quita que en el momento de realizar las actividades se creó un ambiente de trabajo estupendo, con alumnos implicados en la tarea y preguntando cuestiones referentes a la misma.

La construcción más demandada fue el barco de papel, de ahí que finalmente regresara al aula para construir con ellos conjuntamente un barquito. Otras peticiones se encaminaban a elaborar más animales.

Los alumnos quedaron encantados con la actividad, como muestra el último ítem, donde el comentario más repetido es el deseo de realizar más actividades como esta.

6.5.2. Cuestionario realizado a la profesora de matemáticas de 3º ESO B

El cuestionario realizado a Mª Carmen Hurtado, profesora de matemáticas académicas del grupo 3º ESO B, se envió una vez finalizaron las actividades con papiroflexia a la dirección de su correo para que fuese rellenado.

El cuestionario pretende recoger la valoración de Mª Carmen Hurtado de la experiencia piloto haciendo un análisis más profundo que el de los alumnos, señalando además los puntos fuertes y puntos débiles de la propuesta percibidos desde fuera. Su opinión viene recogida a continuación:

Pregunta	Respuesta
¿Qué valoración haces de la experiencia realizada con tus alumnos sobre el uso de la papiroflexia en el aula de matemáticas para explicar mejor la geometría?	Los alumnos están encantados con la actividad. Está perfectamente ubicada en Matemáticas Académicas 3º ESO, porque calcular áreas descomponiendo la figura en figuras más sencillas, calcular ángulos, reconocer triángulos semejantes y aplicar la semejanza para calcular ángulos y longitudes son objetivos del tema de Geometría plana.

¿Habías aplicado anteriormente técnicas de papiroflexia en tus clases? ¿Piensas incorporarlas en el futuro?	No había aplicado esta técnica anteriormente y sí pienso incorporarla en el futuro. Como explico abajo, de forma secuencial, empezando desde 1º ESO.
¿Cuáles consideras que son las principales ventajas de utilizar papiroflexia en clase de matemáticas?	Una ventaja es romper la dinámica habitual de la clase, pasar de un trabajo intelectual a otro manipulativo para enseguida volver al intelectual. Por otra parte creo que se entrenan destrezas geométricas relacionadas con el plegado que no trabajamos normalmente.
¿Y cuáles consideras que son las principales limitaciones?	El tiempo que lleva la manipulación y la dificultad que encuentran los alumnos en darse cuenta de las propiedades relacionadas con el plegado. Creo que esta última se puede mejorar si empezamos a entrenar esas destrezas desde 1º ESO.
Otras observaciones que quieras comentar sobre las actividades con papel desarrolladas en el aula	Como ocurre siempre que se realiza una actividad diferente, cambian los roles en la clase y alumnos a los que les cuesta la asignatura son fuertes en las actividades con papel y al revés. Y esto es positivo.

7. Conclusiones

Finalizada la experiencia piloto, y con las respuestas de docente y alumnos a los cuestionarios de valoración de la actividad, podemos afirmar que se ha tratado de una experiencia muy enriquecedora tanto para el alumnado como el profesorado.

Considero que la aplicación práctica del proyecto ha cumplido notablemente el objetivo propuesto: preparar y repasar los contenidos encuadrados en la unidad didáctica “Geometría plana” de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 3º de ESO. Más generalmente, este trabajo consigue mostrar la utilidad de la papiroflexia como recurso didáctico en la asignatura de matemáticas. La papiroflexia tiene numerosas ventajas para el alumno, destacando, sobre todo, la motivación que despierta en el estudiante. Por ello se trata de un recurso de gran valor para evitar el cansancio y aburrimiento del alumnado.

Por otro lado, se ha visto la multitud de opciones de implementación de este recurso en un aula de matemáticas, puesto que se pueden crear numerosas actividades basadas en las construcciones con papel y que además cumplan con los contenidos establecidos en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Este trabajo es un ejemplo de ello, aunque, no obstante, es importante recordar que las actividades han de estar bien seleccionadas de forma que se adapten al contexto específico del aula y sean bien acogidas por el alumnado. Este trabajo recae directamente sobre el docente, que es quien debe buscar la forma de crear y adaptar las actividades al temario.

Personalmente, ha sido una experiencia magnífica poder llevar este proyecto al aula. Pese a no ser posible abordar todas las actividades que aquí se incluyen, estoy muy contento y agradecido a Mª Carmen Hurtado y los chicos y chicas de 3º ESO B del IES Ángel Corella por lo bien que acogieron el uso de la papiroflexia en el aula de matemáticas. He disfrutado muchísimo con ellos y pienso seguir empleando la papiroflexia en la enseñanza de geometría.

8. Referencias

- Asociación Española de Papiroflexia [AEP]. (2022). Pajarita. Página de la Asociación Española de Papiroflexia: http://www.pajarita.org

- Atkinson, J.W. (1964). An introduction to motivation. Priceton, NJ: Van Nostrand.

- Ausubel, D. P. (1963). The psychology of meaningful verbal learning.

- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1976). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

- Azcoaga, L. (2013). El origami como herramienta educativa: experiencias docentes en el conurbano bonaerense. Encuentro Hacia Una Pedagogía Emancipatoria En Nuestra América, 1-7.

- BOCM (2015). Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 14 de mayo de 2015.

- BOCM (2017). Decreto 39/2017, de 4 de abril, del Consejo de Gobierno, por el que se modifica el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 4 de abril de 2017.

- BOCM (2018). Decreto 18/2018, de 20 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se modifica el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 20 de marzo de 2018.

- BOE (1996). Real Decreto 83/1996, de 26 de enero, por el que se aprueba el Reglamento orgánico de los institutos de Educación Secundaria. Boletín Oficial del Estado, 26 de enero de 1996.

- BOE (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado, 9 de diciembre de 2013.

- BOE (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 26 de diciembre de 2014.

- BOE (2015). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 21 de enero de 2015.

- Coll Salvador, C. (1990). Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. En Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento (pp. 206-206).

- Decio, F., & Battaglia, V. (2017). Origamis tradicionales japoneses. RBA.

- de la Peña Hernandez, J. (2001). Matemáticas y papiroflexia. Asociación Española de Papiroflexia.

- Engel, P. (1994). Origami from angelfish to Zen. Courier Corporation.

- Esteban Sanz, L. (2021). La papiroflexia, una herramienta didáctica para aprender matemáticas en Bachillerato.

- Garrido, B. G. (2016). Orisangakus: desafíos matemáticos con papiroflexia. Ediciones SM España.

- Hull, T. (2012). Project origami: activities for exploring mathematics. CRC Press.

- Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures (Vol. 22). Psychology Press.

- Ledesma, A. (1992). Geometría en un folio. Epsilon. Revista de la Asociación de Matemáticas Thales.

- Mayo Rivera, R. (2018). El Origami aplicado a la educación. Unidad didáctica del bloque de expresión y comunicación técnica de 1º de ESO.

- Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. Human development, 15(1), 1-12.

- Prieto, J. I. R. (2000). Matemáticas y papiroflexia. Universidad Pais Vasco.

- Proyecto Educativo IES Ángel Corella (2019). Proyecto educativo de centro. IES Ángel Corella. Curso 2018/2019 (última revisión en marzo de 2019).

- Robichaux, R. R., & Rodrigue, P. R. (2003). Using origami to promote geometric communication. Mathematics Teaching in the Middle School, 9(4), 222-229.

- Rodríguez Arocho, W. (1999). El legado de Vygotski y Piaget a la Educación. En revista latinoamericana de psicología. Vol. 31.

- Rodríguez, L. (2012) Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel. Universidad Central de Venezuela.

- Row, T. S. (1917). Geometric exercises in paper folding. Open Court Publishing Company.

- Ruiz-López, N. (2010). Medios y recursos para la enseñanza de la Geometría en la educación obligatoria. Didácticas Específicas, (3), 8-25.

- Saldarriaga-Zambrano, P. J., Bravo-Cedeño, G. D. R., & Loor-Rivadeneira, M. R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. Dominio de las Ciencias, 2(3 Especial), 127-137.

- Sarmentero Medina, E. (2021). La papiroflexia, una herramienta didáctica para aprender Matemáticas en la ESO.

- Villarejo, M. L. B., & Rubio, D. G. (2015). Experiencia docente del uso del Origami para la mejora del análisis y visión espacial. Aula de Encuentro, 17(2).

9. Anexos

Anexo I. Índice de ilustraciones

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Anexo II. Virtudes del plegado de papel como recurso educativo

VIRTUDES DE LA PAPIROFLEXIA	(Azcoaga, 2013)
Habilidades	
1. Perceptivas. - Tamaño y escalas. - Composición. - Transición del plano al espacio. - Lateralidad. Simetrías. 2. Motricidad fina. 3. Herramienta democrática.	
Valores sociales	
1. Cooperación y colaboración. 2. Herramienta para construir espíritu de grupo y pertenencia a la escuela. 3. Valoración entre pares. Autoestima. 4. Involucramiento en el proceso de aprendizaje.	
Valores institucionales	
1. Uso de los recursos TICs. 2. Colectivo educativo. 3. Situaciones de conflicto. 4. Visibilidad para el esfuerzo docente.	
Multiplicidad de contenidos	
1. El origami no es una materia. 2. Matemáticas y geometría. 3. Todos los niveles de la educación obligatoria.	

Anexo III. Cuestionario realizado a los alumnos

CUESTIONARIO
Uso de papiroflexia en clase de matemáticas

Parte 1 – Afirmaciones.

- **Señala con una "X" para cada una de las siguientes afirmaciones la opción que mejor recoja tu opinión, siendo:**

1 = "Nada", 2 = "Poco", 3 = "Bastante", 4 = "Mucho"

AFIRMACIONES	VALORACIÓN			
	1	**2**	**3**	**4**
Me ha gustado el uso de papiroflexia en matemáticas.				
Había utilizado la papiroflexia anteriormente como "hobbie".				
Había utilizado la papiroflexia anteriormente en un aula.				
Las construcciones que hemos realizado me han parecido interesantes.				
Los problemas asociados a cada construcción han sido interesantes y entretenidos.				
El tiempo dedicado a cada una de las propuestas ha sido el adecuado.				
La dificultad de las actividades ha sido adecuada.				
Las actividades propuestas me han ayudado a repasar para el examen de la unidad.				
El uso de la papiroflexia me ha ayudado a comprender mejor la geometría.				
Me gustaría seguir utilizando la papiroflexia para explicar conceptos geométricos en próximos cursos.				

Parte 2 – Cuestiones.

- **Responde a las siguientes preguntas con la mayor sinceridad posible.**

¿Qué es lo que más te ha gustado de las sesiones dedicadas a trabajar geometría con papiroflexia? ¿Por qué?

¿Qué es lo que menos te ha gustado de las sesiones dedicadas a trabajar geometría con papiroflexia? ¿Por qué?
¿Qué otras construcciones te gustaría haber hecho?
Escribe cualquier comentario/sugerencia que consideres sobre el uso de la papiroflexia en clase de matemáticas