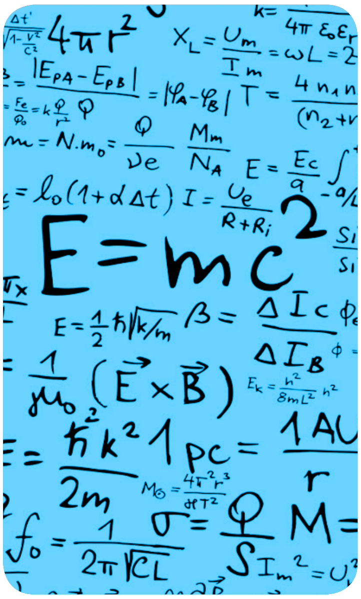




MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de Profesorado y Educación / 14-15

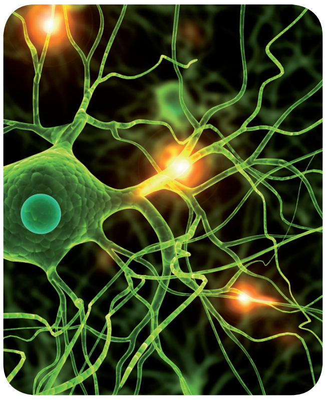
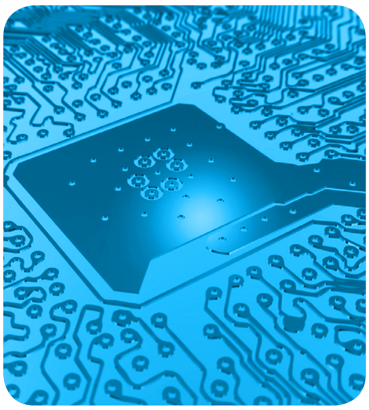
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Campus Internacional excelencia UAM CSIC+

Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

Coloreando la Geometría. Cómo los colores favorecen la comprensión del bloque de Geometría de 3º de E.S.O.

Beatriz Bravo Santos


UAM EDICIONES

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Coloreando la Geometría

Cómo los colores favorecen la comprensión del bloque de Geometría de 3º de E.S.O.

Autora: Beatriz Bravo Santos
Director: Eugenio Hernández

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
Curso: 2014/2015

Euclides escribió hace más de 2000 años el libro que se utilizó para aprender geometría hasta finales del siglo XIX. En 1847 Oliver Byrne publicó los seis primeros libros de los Elementos de Euclides con símbolos y diagramas coloreados para que los entendieran mejor los estudiantes. En este trabajo se trata de recobrar el valor del razonamiento que contienen los libros de Euclides utilizando los diagramas y símbolos de colores del libro de Oliver Byrne.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 7
ELEMENTOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE DE GEOMETRÍA 9
Estructura. 9
Justificación. 9
Descripción de las Unidades Didácticas. 9
Contextualización en la programación. 9
Relación con otras materias del currículo. 9
Objetivos. 10
Relación de la Unidad Didáctica con las Competencias Clave: 10
Comunicación lingüística. 10
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. 11
Competencia digital. 11
Aprender a aprender. 11
Competencias sociales y cívicas. 11
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. 11
Conciencia y expresiones culturales. 12
Contenidos Mínimos Exigibles. 12
Evaluación. 12
Criterios de Evaluación 12
Metodología. 14
Materiales didácticos y otros recursos 15
Temporalización de las sesiones 15
UNIDAD 1. PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL PLANO 19
1.1 Ángulos en un Polígono 21
Suma de los Ángulos de un Triángulo 21
Suma de los Ángulos de un Polígono de n lados 21
Ángulo Interior de un Polígono Regular 21
1.2 Ángulos en la Circunferencia 21
Ángulo Central 21
Ángulo Inscrito 22
Ángulos rectos inscritos 22
Generalización 22
1.3 Semejanza de Triángulos 24
Triángulos Semejantes. 24
Triángulos en posición de Thales. 24

Un Criterio de Semejanza de Triángulos. 25
1.4 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones 25
Teorema de Pitágoras. 25
Demostración china del Teorema de Pitágoras. 25
Algunas Aplicaciones del Teorema de Pitágoras 26
1.5 Lugares Geométricos 26
Mediatriz 26
Bisectriz 26
1.6 La geometría del triángulo 27
Circuncentro 27
Incentro 27
Ortocentro 28
Baricentro 29
1.7 Las cónicas como lugares geométricos 29
Circunferencia 30
Elipse 30
Parábola 31
Hipérbola 32
1.8 Perímetro de un Polígono 32
1.9 Áreas de Polígonos 33
Área de polígonos 33
Otra demostración del Teorema de Pitágoras: La demostración de Pappus 34
1.10 Longitudes de figuras curvas 35
1.11 Áreas de figuras curvas 36
UNIDAD 2. CUERPOS GEOMÉTRICOS 37
2.1 Poliedros 39
Fórmula de Euler 39
Poliedros Regulares y Semirregulares 40
2.2 Prismas y Pirámides 41
Teorema de Pitágoras en el espacio 41
2.3 Cuerpos de revolución 42
2.4 Simetría en poliedros y figuras redondas 42
Planos de simetría del cubo 42
Planos de simetría de prismas 43
Planos de simetría del cilindro 43
2.5 Ejes de giro de una figura 43
Ejes de giro del cubo 43

Ejes de giro de la esfera. ... 43
2.6 Superficie de cuerpos geométricos ... 44
Superficie de un poliedro ... 44
Superficie de un cilindro ... 44
Superficie de un cono ... 44
Superficie de un tronco de cono ... 44
Área de la esfera ... 45
2.7 Volumen de cuerpos geométricos ... 45
Volumen del prisma y el cilindro. ... 45
Volumen de la pirámide y el cono ... 46
Volumen de la esfera ... 47
2.8 Áreas y volúmenes de cuerpos compuestos ... 48
2.9 Intersecciones de planos y esferas ... 48
2.10 La Tierra. Meridianos y paralelos ... 49
Meridianos y husos ... 49
Paralelos y zonas ... 49
2.11 Coordenadas geográficas ... 50
2.12 Sistemas de representación geográfica. Mapas ... 50
Proyecciones cilíndricas ... 50
Proyecciones cilíndricas ... 52
Proyecciones cenitales o acimutales ... 52
UNIDAD 3. TRASFORMACIONES GEOMÉTRICAS ... 53
3.1 Movimientos en el plano ... 55
3.2 Vectores en el plano ... 55
Suma de vectores ... 55
3.3 Traslaciones ... 55
3.4 Giros ... 56
Cómo obtenemos el centro de un giro ... 56
Figuras con centro de giro ... 56
3.5 Simetrías ... 56
Figuras simétricas ... 57
3.6 Composición de movimientos ... 57
Composición de dos traslaciones ... 57
Composición de dos giros ... 57
Composición de dos simetrías ... 58
Composición de una traslación con una simetría ... 59
3.7 Mosaicos, cenefas y rosetones ... 59

Mosaicos 59
Frisos o cenefas 61
Rosetones 61
CONCLUSIONES 63
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 64
ANEXO 1. Notación y Leyenda de Símbolos por colores. 65

INTRODUCCIÓN

La idea principal de este Trabajo es trasladar la idea que expone Oliver Byrne en su versión ilustrada de los Elementos de Euclides a la programación del Bloque de Geometría de un aula de 3º de E.S.O. En este texto, se sustituyen las notaciones e ideas abstractas de la obra original por una simbología basada en los colores y desarrollada mediante diagramas. Con esto, se pretende tanto facilitar la adquisición de los conocimientos científicos como acortar y amenizar el tiempo de estudio.

Como señala el autor en su obra, se podría pensar que el objetivo principal de este trabajo es la mera ilustración, esto es, que los colores sirven únicamente como diversión a través de las diferentes combinaciones de colores y formas, sin embargo, lo que se pretende es ayudar el proceso mental de aprendizaje aumentando las capacidades de instrucción y favoreciendo el conocimiento permanente.

Resulta evidente que la rama de las Matemáticas más indicada para comenzar con este método de enseñanza es la Geometría que, aunque se puede estudiar de forma muy teórica y sin ejemplos ni representaciones gráficas, es la rama más estrechamente relacionada con el estudio a través de ilustraciones y diagramas. Además, si nos centramos en la Geometría Euclídea, que es la que se desarrolla en los centros de enseñanza secundaria se trata de una de las ramas más relacionadas tanto con otras ramas de las Matemáticas que estudian nuestros alumnos así como con otras ciencias e ingenierías y con la vida cotidiana de nuestros alumnos.

Para cualquier estudiante es muy importante la primera toma de contacto con cada una de las ciencias (así como con el resto de las materias), y colocar delante de un alumno primerizo una lista de proposiciones matemáticas formales puede producir en este un prejuicio negativo que influya directamente en su futuro estudio de esta ciencia. En palabras de Byrne:

> *"... las formalidades y parafernalias del rigor son puestas tan ostentosamente que parecen esconder la realidad. Repeticiones interminables y desconcertantes, las cuales no aportan mayor exactitud al razonamiento, vuelven las demostraciones enredadas y oscuras, y ocultan al estudiante la consecución de la evidencia."*

Así, aunque apenas estén empezando a estudiar Matemática y no se desarrollen ni realicen demostraciones de los resultados y proposiciones que utilizan, si no se imparte adecuadamente esta materia, se puede favorecer, involuntariamente, la creación de un sentimiento de aversión hacia la Geometría. De la misma forma, se puede fomentar el pensamiento cerrado que lleva a considerar el aprendizaje como un simple ejercicio de memorización, en detrimento del aprendizaje por descubrimiento y razonamiento en que se basan todas las ramas de la ciencia.

Para evitar esto, se pretende introducir una metodología en la que se motive a los alumnos a través del sentido de la vista considerado como el sentido que "deja mejor huella" en la mente humana:

> *"Lo que entra al oído conmueve el espíritu con menos fuerza que lo que se pone ante el ojo fidedigno."* Horacio. Arte Poética (1777).

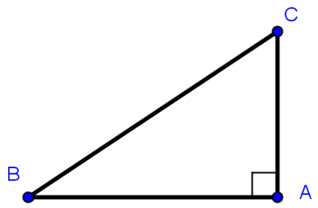
Por consiguiente, usaremos los colores y diagramas coloreados con el objetivo de llamar su atención e incentivar su curiosidad por la Geometría y, en general, por las Matemáticas.

Generalmente, el razonamiento geométrico se realiza mediante palabras, letras y diagramas sin color, sin embargo, numerosos experimentos han confirmado que el sistema de símbolos, signos y diagramas coloreados creado por Byrne puede conseguir que la Geometría recogida en la obra Euclides se pueda interiorizar en un tercio del tiempo empleado al estudiarla de forma tradicional lo que puede resultar chocante teniendo en cuenta que, en general, los cambios son pocos y obvios. De hecho, la idea principal surge al darse cuenta de que las letras que se asocian a los diferentes puntos, rectas o elementos de un diagrama geométrico no son más que nombres arbitrarios que los representan en la demostración de un resultado. Así, en lugar de asociar una letra a cada elemento, este se coloreará de un color y su representación en la demostración será su forma coloreada.

Ponemos un ejemplo para que quede más claro. La forma habitual de enunciar el Teorema de Pitágoras es:

En un triángulo rectángulo ABC, si BC es la hipotenusa, entonces:

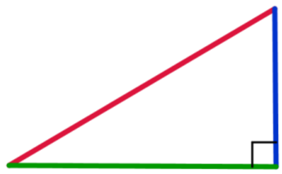
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$



En el sistema de Byrne, el enunciado sería:

En un triángulo rectángulo cualquiera de lados , y , si es la hipotenusa, entonces:

 ² + ² = ²



Aunque este es un ejemplo muy sencillo y es un resultado conocido por todos, se puede apreciar que, en el segundo caso, es más rápido y seguro nombrar la forma y el color del elemento del que se habla que nombrar las letras a las que se asocia, sobre todo si no estamos familiarizados con el diagrama con el que estemos trabajando o no hemos visto el proceso de realización del mismo. De esta forma, si en una explicación oral en clase nombramos al segmento azul, el ángulo rojo, etc., conseguiremos que todos nuestros alumnos vean inmediatamente el objeto nombrado, lo que no siempre ocurre si nombramos el segmento AB o el ángulo ABC.

Como última observación al sistema, es importante tener cuidado de destacar que tal y como ocurre cuando nombramos cada elemento con letras, los colores no son más que la forma de nombrar a cada una de las formas de nuestras figuras y que dará igual asignar a un segmento el rojo o el azul.

ELEMENTOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE DE GEOMETRÍA

Estructura.

El bloque de Geometría de 3º de ESO consta de tres unidades didácticas diferentes:

1. Problemas métricos en el plano.
2. Cuerpos Geométricos.
3. Transformaciones Geométricas.

Justificación.

En los últimos años, la Geometría ha ido perdiendo importancia en la Educación. En particular, ha desaparecido del currículo de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria el estudio de la Geometría Euclídea como tal, para estudiar, de forma casi exclusiva, teoría y problemas asociados al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de figuras planas y cuerpos en el espacio. En particular, las dos primeras unidades didácticas se dedican a ejercitar este tipo de cálculos. Sin embargo, el tercer tema es una de las pocas excepciones que podemos encontrar en la geometría que se desarrolla en la E.S.O. en las que se trabaja las características manipulativas y visuales de la Geometría, proporcionando una motivación extra para que los alumnos se interesen por la asignatura de Matemáticas y, en concreto, por la Geometría.

Descripción de las Unidades Didácticas.

En la Unidad 1. Movimientos métricos en el plano, se trabajarán algunas propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia, la semejanza de triángulos (el Teorema de Thales), aplicaciones del teorema de Pitágoras, lugares geométricos y áreas de figuras planas.

En la Unidad 2. Cuerpos Geométricos, se trabajarán los poliedros regulares y semirregulares, la Fórmula de Euler, planos de simetría y ejes de giro de una figura, superficie y volumen de cuerpos geométricos, la esfera y Coordenadas Geográficas y mapas.

Por último, en la Unidad 3. Transformaciones Geométricas, se pretende estudiar los Movimientos en el plano: Traslaciones, Giros y Simetrías, realizando una descripción detallada de cada uno de ellos en particular para conocer qué los caracteriza y cuáles son sus elementos y propiedades.

Contextualización en la programación.

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO

Bloque 3. Geometría (R.D 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la E.S.O. y el Bachillerato)

Relación con otras materias del currículo.

Este Bloque se relaciona principalmente con el Bloque 3. Dibujo Técnico de la Materia optativa Educación Plástica, Visual y Audiovisual. 1º ciclo ESO.

También se producirá una gran relación con la asignatura de Física y Química de 2º y 3º de la E.S.O. en aquellas relaciones físicas que involucren medidas de superficie y de volumen (presión, densidad, etc.)

Por otra parte, algunas actividades propuestas permitirán la interacción con otras materias como, por ejemplo, Biología y Geología (Movimientos presentes en la naturaleza) o Geografía e Historia (Movimientos presentes en el Arte y la Arquitectura).

Objetivos.

1.1 Conocer las relaciones angulares en los polígonos y en la circunferencia.

1.2 Conocer los conceptos básicos de la semejanza y aplicarlos a la resolución de problemas.

1.3 Dominar el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.

1.4 Conocer el concepto de lugar geométrico y aplicarlo a la definición de las cónicas.

1.5 Hallar el área de una figura plana.

2.1 Conocer las características y propiedades de las figuras espaciales (poliédricas, cuerpos de revolución y otras).

2.2 Calcular áreas de figuras espaciales.

2.3 Calcular volúmenes de figuras espaciales.

2.4 Calcular las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.

2.5 Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

3.1 Conocer y distinguir los distintos movimientos en el plano a través de sus propiedades.

3.2 Saber identificar los elementos más característicos de los movimientos presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

3.3 Aplicar uno o más movimientos a una figura geométrica.

3.4 Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, y aplicar dichos movimientos.

3.5 Aplicar las características y propiedades de los distintos movimientos a la resolución de situaciones problemáticas.

Relación de la Unidad Didáctica con las Competencias Clave:

Comunicación lingüística.

CL1 Extraer la información geométrica de un texto dado.
CL2 Saber describir un objeto utilizando el lenguaje geométrico.

CL3 Explicar de forma clara y concisa procedimientos y resultados geométricos.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

CM1 Dominar todos los elementos de la geometría plana para poder resolver problemas.
CM2 Usar adecuadamente los términos de la geometría para describir elementos del mundo físico.
CM3 Dominar los elementos de la geometría del espacio como medio para resolver problemas.
CM4 Dominar las traslaciones, los giros, las simetrías y la composición de movimientos como medio para resolver problemas geométricos.
CM5 Describir fenómenos del mundo físico con la ayuda de los conceptos geométricos aprendidos en esta unidad.

Competencia digital.

CD1 Utilizar diferentes programas informáticos como GeoGebra para la creación de movimientos.
CD2 Utilizar internet para la recopilación de información.

Aprender a aprender.

AA1 Valorar los conocimientos geométricos adquiridos como medio para resolver problemas.
AA2 Ampliar sus conocimientos sobre el arte, tanto actual como histórico, a través de la búsqueda de información.
AA3 Ser capaz de analizar el propio dominio de los conceptos geométricos adquiridos en esta unidad.
AA4 Ser consciente de las carencias en los conocimientos adquiridos en esta unidad.

Competencias sociales y cívicas.

CS1 Valorar el uso de la geometría en gran número de actividades humanas.
CS2 Identificar, analizar, describir y construir transformaciones geométricas de figuras planas presentes tanto en el medio social como natural, y utilizar las propiedades geométricas asociadas a las mismas en las situaciones requeridas.
CS3 Aprovechar el estudio de las transformaciones geométricas para que los estudiantes descubran estos elementos en objetos artísticos, arquitectónicos, de decoración, de ingeniería… y sean conscientes de la necesidad de preservarlos para el futuro.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

SI1 Elegir la mejor estrategia para resolver problemas geométricos en el plano.
SI2 Elegir, entre las distintas características de los cuerpos espaciales, la más idónea para resolver un problema.

SI1 Saber qué movimientos hay que aplicar a una figura para conseguir el resultado pedido.

SI2 Entre todas las formas de resolver un problema, seleccionar una resolución en particular para obtener el resultado pedido.

Conciencia y expresiones culturales.

CC1 Describir elementos artísticos con la ayuda de los conocimientos adquiridos sobre movimientos en el plano.

CC2 Crear elementos artísticos con los conocimientos adquiridos en esta unidad, dotándolos de belleza y armonía.

CC3 Estudiar elementos artísticos presentes en muchas culturas, como la árabe, la cristiana medieval e incluso manifestaciones artísticas del siglo XX.

Contenidos Mínimos Exigibles.

1. Geometría del plano.

Rectas y ángulos en el plano. Relaciones entre los ángulos definidos por dos rectas que se cortan.
Lugar geométrico: mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo.
Polígonos. Circunferencia y círculo. Perímetro y área.
Teorema de Thales. División de un segmento en partes proporcionales.
Teorema de Pitágoras. Aplicación a la resolución de problemas.
Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.

2. Geometría del espacio

Poliedros, poliedros regulares. Vértices, aristas y caras. Teorema de Euler.
Planos de simetría en los poliedros.
La esfera. Intersecciones de planos y esferas

3. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.

4. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Evaluación.

Criterios de Evaluación

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, se especifican los criterios de evaluación relativos a este Bloque así como los Estándares de Aprendizaje Evaluables correspondientes:

1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.

1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos.

1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.

2. Utilizar el teorema de Thales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.

2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.

2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.

2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Thales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.

3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.

4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.

5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

Metodología.

El bloque de Geometría de 3º de la E.S.O. se divide en tres unidades didácticas, luego, aunque se persigue una metodología global para toda la asignatura, es importante distinguir algunos aspectos en cada una de ellas. Exponemos por tanto una metodología general para el bloque y después distinguiremos algunos aspectos particulares de cada Unidad Didáctica.

En general, en cada sesión se seguirá una metodología que favorezca la participación del alumnado en el proceso de aprendizaje y que facilite la asimilación de los contenidos. Para ello, se intentará partir de los conocimientos previos de nuestros alumnos.

Al comienzo de cada sesión se hará un breve resumen de los conceptos aprendidos en las sesiones anteriores, sobre todo aquellos que vayan a ser necesarios a lo largo de la sesión.

En las explicaciones del profesor, se incluirán ejemplos que respondan a los intereses y aficiones del grupo.

Según se vayan introduciendo conocimientos nuevos, se plantearán ejercicios básicos de aplicación para desarrollar en clase y asimilar los nuevos conceptos y procedimientos aprendidos.

El trabajo diario es fundamental para el aprendizaje. Por ello, en cada sesión se propondrán ejercicios para realizar en casa que les ayude a asimilar e incluso que les exija mayor reflexión que los ejemplos realizados en clase para fomentar su autoaprendizaje, dando especial importancia a la aplicación de lo aprendido a problemas de la vida cotidiana de manera que el alumnado pueda desarrollar sus competencias clave. Al día siguiente, durante la primera parte de la clase, se corregirán en la pizarra los problemas propuestos haciendo especial hincapié en aquellos errores que consideramos más frecuentes o que ya han aparecido previamente así como en los problemas que han surgido a los alumnos a la hora de resolverlos.

Se fomentará la participación en clase y la el trabajo colaborativo de los alumnos de forma que aquellos que tienen mayor facilidad con la materia puedan ayudar a quienes presenten mayores problemas de aprendizaje, utilizando una metodología equitativa. El trabajo diario individual, la participación en clase y el trabajo grupal formará parte de la evaluación.

Si nos centramos ahora en cada una de las Unidades Didácticas:

La unidad Problemas métricos en el plano es una unidad en la que la mayor parte de los contenidos ya se han estudiado el curso anterior y por tanto el principal objetivo de esta unidad será reforzar y consolidar las definiciones y resultados más importantes de la Geometría Plana así como conseguir que nuestros alumnos sean capaces de aplicar estos conceptos a solucionar problemas presentes en su vida cotidiana.

La unidad didáctica Cuerpos geométricos exige de los alumnos una visión espacial adecuada para el análisis de los poliedros, para ello será importante el trabajo manipulativo de figuras geométricas y el uso de herramientas informáticas como Geogebra, para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tras el desarrollo de estas dos unidades didácticas, reservaremos un día para realizar una síntesis de todo lo aprendido, una sesión para la evaluación de ambas unidades y dedicaremos la última de las sesiones a corregir la prueba de evaluación para que el alumno pueda reflexionar y aprender de los errores cometidos.

Por último, la unidad Transformaciones Geométricas tiene un carácter más intuitivo que las dos anteriores. Además, a diferencia de las otras dos, su contenido es totalmente novedoso para los alumnos. Por ello, al iniciar la Unidad Didáctica, y al introducir los diferentes conceptos, se pretenderá que los alumnos intenten obtener las definiciones o las características de éstos a través de su intuición. De esta forma, trataremos de trabajar la unidad a través de tareas de construcción de significados y de actividades motivadoras, visuales y manipulativas.

Además, el carácter manipulativo de esta unidad nos permite utilizar como método de evaluación y de consolidación de los conceptos, la realización de varios trabajos en grupos de 4-5 alumnos donde deberán construir diferentes figuras establecidas (mosaicos, cenefas...) y analizar los movimientos del plano presentes en ellas, pudiendo estudiar alguna de las muchas muestras de utilización de los movimientos en el arte y la arquitectura.

Materiales didácticos y otros recursos

Libro de texto.

Ordenador y proyector con conexión a internet (principalmente para aquellas actividades que impliquen visualización y análisis de imágenes o figuras).

Programas informáticos: Utilización del Software GeoGebra.

Búsqueda de información e imágenes en Internet para interpretar los movimientos geométricos en diferentes contextos (Arquitectura, Pintura, Mosaicos…).

Temporalización de las sesiones

<table>
<tr><th>Unidad Didáctica</th><th>Fase Inicial</th><th>Fase de Desarrollo</th><th>Fase de Consolidación</th><th>Fase de Evaluación</th></tr>
<tr><td>1.</td><td rowspan="2">1</td><td>5</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>1</td><td>7</td><td>-</td><td>1</td></tr>
</table>

En general, el esquema de la sesiones será parecido en todas las unidades didácticas, los primeros 10 minutos[1] de cada sesión se dedicarán a corregir y repasar los ejercicios que se hayan mandado a casa en la sesión anterior. Después explicaremos el contenido correspondiente ilustrándolo con ejemplos y ejercicios resueltos en clase. Al final, se mandarán nuevos ejercicios para que los alumnos resuelvan en casa.

[1] Todos los tiempos son aproximados y están sujetos a posibles modificaciones según se desarrolle la clase.

Ahora, se especifica una posible estructuración de las clases según el contenido que se desarrolla en la siguiente sección.

<u>Unidad 1</u>

Sesión 0:

- Introducción a la nueva metodología por colores. Puesto que este trabajo es una propuesta de metodología, nuestros alumnos no están acostumbrados a trabajar con colores y debemos explicarles cómo vamos a trabajar la Geometría. Para ejemplificar este método podemos utilizar el contenido de Geometría de cursos anteriores haciendo un repaso y permitiéndonos conocer el nivel inicial de los alumnos (Evaluación Inicial).

Sesión 1.1:

- Ángulos de un Polígono. (15 minutos)
- Ángulos en una circunferencia. (20 minutos)
- Semejanza de Triángulos. Teorema de Thales. (20 minutos)

Sesión 1.2:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Teorema de Pitágoras. Demostración y Aplicaciones (40 minutos)

Sesión 1.3:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Lugares Geométricos: Mediatriz, Bisectriz y Arco Capaz (15 minutos)
- Las cónicas como lugares geométricos. (25 minutos)

Sesión 1.4:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Perímetro y área de polígonos (40 minutos)

Sesión 1.5:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- <u>Longitud y área de figuras curvas. (40 minutos)</u>

<u>Unidad 2</u>

Sesión 2.1:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Poliedros. La fórmula de Euler (40 minutos)

Sesión 2.2:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Prismas y Pirámides (10 minutos)
- El Teorema de Pitágoras en el espacio. (20 minutos)
- Cuerpos redondos. (10 minutos)

Sesión 2.3:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Simetrías y ejes de giro de un figura (40 minutos)

Sesión 2.4:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Áreas de cuerpos geométricos (40 minutos)

Sesión 2.5:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Volúmenes de cuerpos geométricos (40 minutos)

Sesión 2.6:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos compuestos (40 minutos)

Sesión 2.7:

- Intersección de planos y esferas (10 minutos)
- La Tierra. Meridianos y paralelos (10 minutos)
- Coordenadas geográficas (15 minutos)
- Representación geográfica. Mapas. (20 minutos)

Sesión de Consolidación:

- Repaso de los dos tema anteriores, resolución de dudas y corrección de ejercicios pendientes de cara a la realización de la prueba escrita.

Sesión de Evaluación:

- Prueba escrita para evaluar los conocimientos adquiridos de las unidades 1 y 2 por los alumnos.

Unidad 3

Sesión 3.1:

- Introducción a la Unidad 3. (10 minutos)
- Trasformaciones y Movimientos en el plano. (10 minutos)
- Vectores en el plano (30 minutos)

Sesión 3.2:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Traslaciones (40 minutos)

Sesión 3.3:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)

- Giros (40 minutos)

Sesión 3.4:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Simetrías (40 minutos)

Sesión 3.5:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Composición de movimientos (40 minutos)

Sesión 3.6:

- Corrección de los ejercicios de casa de la sesión anterior (10 minutos)
- Mosaicos, cenefas y Rosetones (30 minutos)
- Descripción del Trabajo en Grupo

Sesión 3.7:

- Corrección y exposición de los trabajos en grupo (50 minutos)

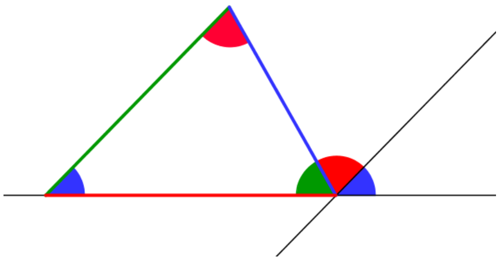
UNIDAD 1. PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL PLANO

1.1 Ángulos en un Polígono

Suma de los Ángulos de un Triángulo

Si , y son los ángulos de un triángulo, entonces + + =**180º**.

<u>Demostración:</u>



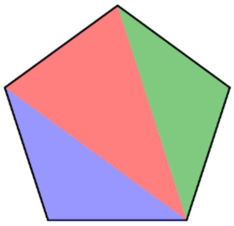
q.e.d.

Suma de los Ángulos de un Polígono de n lados

La suma de los ángulos de un Polígono de n lados es **180º · (n - 2)**.

<u>Demostración para n = 5</u>:

Si dividimos el pentágono en triángulos como en la imagen, la suma de los ángulos del pentágono es 3 veces la suma de los ángulos de un triángulo y, por lo anterior, la suma de los ángulos de un pentágono es 3·180º = (5 - 2)·180º.



q.e.d.

Ángulo Interior de un Polígono Regular

Si un polígono de n lados es regular, todos sus ángulos son iguales y miden $\frac{\mathbf{180^\circ\cdot(n-2)}}{\mathbf{n}}$.

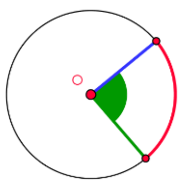
1.2 Ángulos en la Circunferencia

Ángulo Central

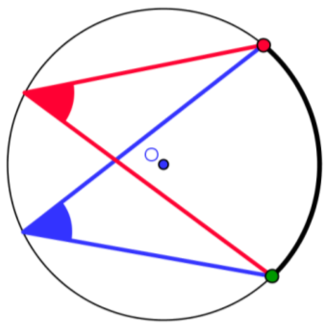
es un arco de circunferencia y tiene dos tipos de medidas, una medida lineal que llamamos longitud, y una medida angular, llamado ángulo central, que es el ángulo comprendido entre y con vértice •.

La medida angular de un arco es la misma que la del ángulo central correspondiente, .

= .



Ángulo Inscrito

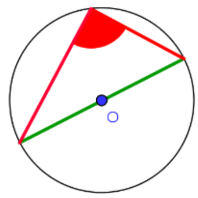


Decimos que un ángulo está **inscrito** en una circunferencia si su vértice está sobre ella.

y son ángulos inscritos.

Se dice que dos ángulos inscritos en una circunferencia, y , abarcan el mismo arco , si los dos lados cortan a la circunferencia en los mismos puntos y .

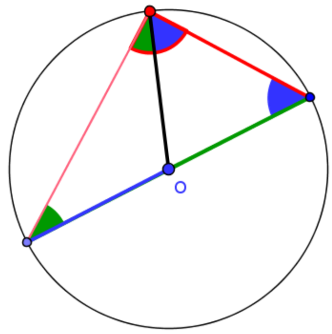
Ángulos rectos inscritos



Si es un diámetro de una circunferencia, el ángulo inscrito que determina abarca un arco de 180º. Por tanto:

=

<u>Demostración:</u>



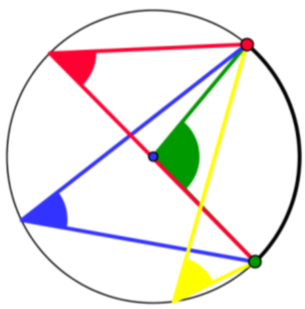
Si trazamos el segmento , como = = por ser tres radios de una circunferencia, los triángulos , , y , , son isósceles y, en cada triángulo, los dos ángulos inscritos son iguales.

Considerando el triángulo grande, la suma de los ángulos es 180º es decir:

2· +2· = 2·(+) = 180º $\Rightarrow$ + = 90º =

q.e.d.

Generalización



El resultado anterior se puede generalizar a cualquier ángulo inscrito en una circunferencia, independientemente del arco que abarque:

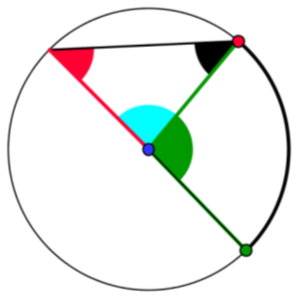
La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco que abarca: $= \frac{1}{2} \cdot$

Además de este resultado se deduce rápidamente que:

Dos ángulos que abarcan el mismo arco son iguales: = =

Demostración:

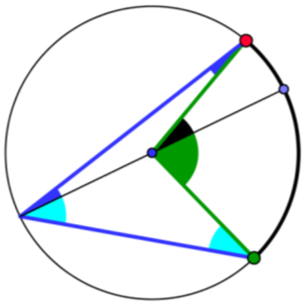
Para demostrar esta proposición, vamos a distinguir tres casos:



- **Caso 1**: Si uno de los lados del ángulo es una diagonal.

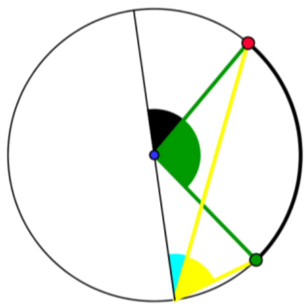
En este caso, como = por ser radios de la circunferencia, el triángulo , , es isósceles y = .

Por otro lado, los ángulos de un triángulo suman 180º luego + + = 180º y por ser ángulos suplementarios, + = 180º e, igualando las dos expresiones obtenemos que 2· = + = y, por tanto, $= \frac{1}{2} \cdot$.



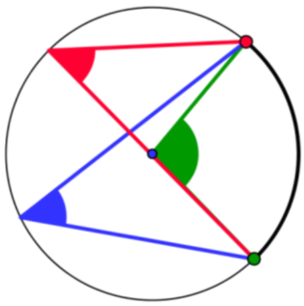
- **Caso 2**: Si la diagonal que pasa por el vértice del ángulo inscrito, , divide el ángulo en dos partes y , como se ve en la imagen.

En esta situación, el caso 1 nos asegura que $= \frac{1}{2} \cdot$ y $= \frac{1}{2} \cdot$. Sumando, tenemos que $= \frac{1}{2} \cdot$.



- **Caso 3**: La diagonal que pasa por el vértice, solo toca al ángulo en el vértice.

De nuevo usamos el caso 1 y tenemos que $= \frac{1}{2} \cdot$ y $= \frac{1}{2} \cdot$. Restando las expresiones, tenemos que $= \frac{1}{2} \cdot$.

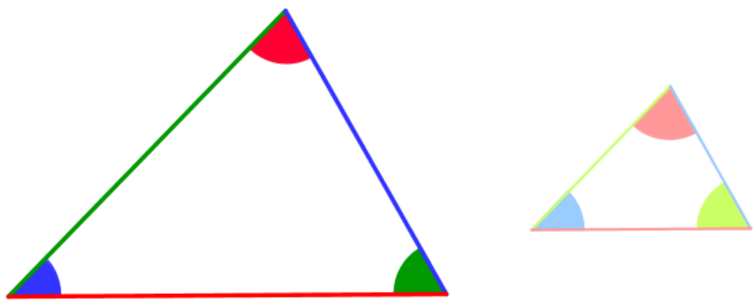


- Para finalizar, si dos ángulos, y , abarcan el mismo arco, entonces $= \frac{1}{2} \cdot$ y $= \frac{1}{2} \cdot$. Por tanto, = .

q.e.d.

1.3 Semejanza de Triángulos

Triángulos Semejantes.



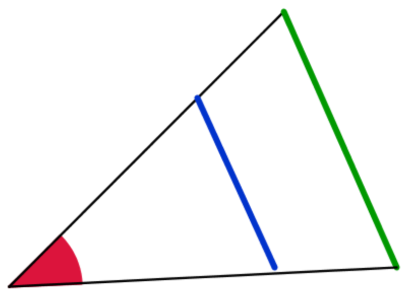
Dos triángulos son **semejantes** si se cumple una de estas dos condiciones:

- Sus lados correspondientes son proporcionales: : = : = : = razón de semejanza.
- Sus ángulos son respectivamente iguales: = , = y = .

En general, dos polígonos cualesquiera son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales o sus ángulos son iguales.

Triángulos en posición de Thales.

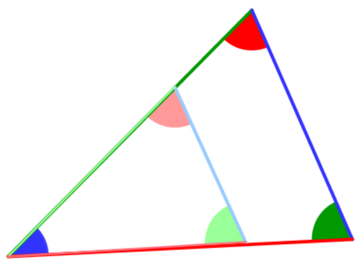
Decimos que dos triángulos están **en posición de Thales** si tienen un ángulo en común, , y los lados opuestos a son paralelos, || .



Dos triángulos en posición de Thales son semejantes.

Dos Triángulos son semejantes si se pueden poner en posición de Thales.

Demostración:



Por ser || , = y = y como es un ángulo común, se verifica que los tres ángulos son iguales y los triángulos son semejantes.

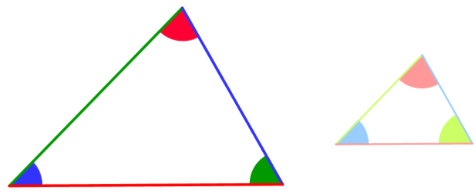
q.e.d.

Un Criterio de Semejanza de Triángulos.

Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, sabemos que son semejantes, es decir, si = , = , entonces:

= y

: = : = :

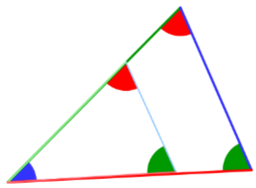


Demostración:

Sabemos que + + = 180º = + + y como = , = ,

+ + = + + ⇨ = .

Por otro lado, como se ve en la imagen, podemos colocar los Triángulos en posición de Thales porque como = , entonces || y por estar en posición de Thales, : = : = :



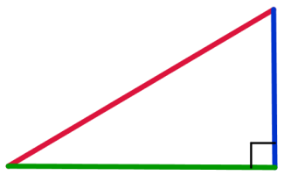
q.e.d.

1.4 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

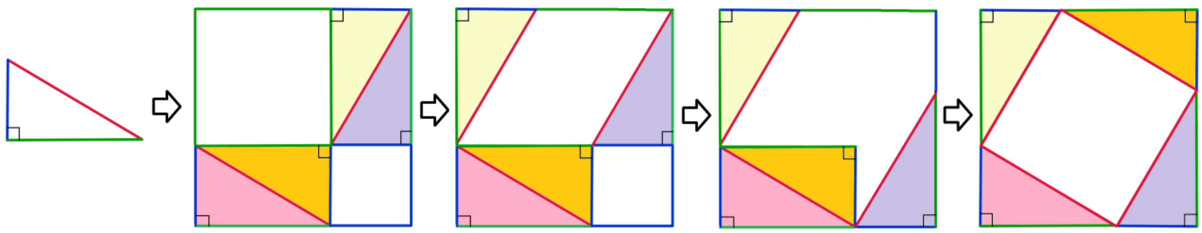
Teorema de Pitágoras.

En un triángulo rectángulo cualquiera de lados , y , si es la hipotenusa, entonces:

$^2 + {}^2 = {}^2$



Demostración china del Teorema de Pitágoras.



q.e.d.

Algunas Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

1. Cálculo de un lado desconocido de un triángulo rectángulo. Para ello basta con despejar en la relación anterior el lado que nos falta:

$$\textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}} = \sqrt{\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}}^2 + \textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}^2}$$

$$\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}} = \sqrt{\textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}^2 - \textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}^2}$$

$$\textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}} = \sqrt{\textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}^2 - \textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}}^2}$$

2. Clasificación de Triángulos en rectángulos, acutángulos y obtusángulos:

Si $\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}}$, $\textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}$ y $\textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}$ son los tres lados de un triángulo y $\textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}$ es el mayor, entonces:

Si $\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}}^2 + \textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}^2 = \textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}^2$, el triángulo es rectángulo.

Si $\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}}^2 + \textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}^2 < \textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}^2$, el triángulo es obtusángulo.

Si $\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}}^2 + \textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}^2 > \textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}^2$, el triángulo es acutángulo.

3. Obtención de un segmento en una figura arbitraria: buscamos triángulos rectángulos en nuestra figura y usamos la aplicación 1.

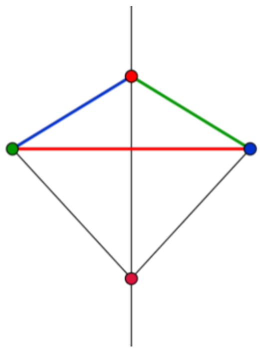
1.5 Lugares Geométricos

Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una propiedad determinada. Como ejemplos, vamos a definir mediatriz y bisectriz como lugares geométricos.

Mediatriz

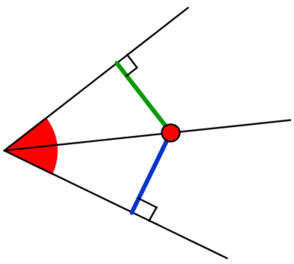
La **mediatriz** de un segmento $\textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}$ es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Si $\textcolor{red}{\bullet}$ es un punto cualquiera de la mediatriz de $\textcolor{red}{\rule{1cm}{2pt}}$, entonces $\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}} = \textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}$. Además, los puntos de la mediatriz son los únicos que lo verifican:



La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Bisectriz



La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta que divide en dos ángulos iguales.

Si $\textcolor{red}{\bullet}$ es un punto de la bisectriz de entonces $\textcolor{blue}{\rule{1cm}{2pt}} = \textcolor{green}{\rule{1cm}{2pt}}$.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de .

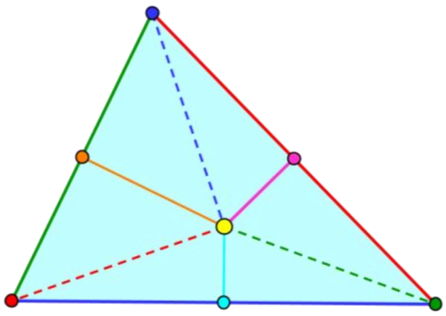
1.6 La geometría del triángulo

Vamos a usar las definiciones anteriores para estudiar dos de los puntos más notables de un triángulo: el **circuncentro** y el **incentro**. Otros dos puntos notables son el **ortocentro** y el **baricentro**.

Circuncentro

Las tres mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto , llamado circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Demostración:



Sea el punto de corte de las mediatrices de y , esto es, el punto de corte de y .

Como es el punto medio de , = luego, si aplicamos el Teorema de Pitágoras dos veces en los triángulos , , y , ; tenemos que ^{2} = ^{2} + ^{2} = ^{2} + ^{2} = ^{2}. Y, por tanto, = .

Razonando igual con el lado , obtenemos que = .

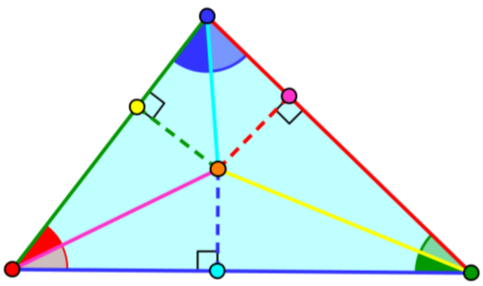
Por tanto, = y como la mediatriz de , , es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de y , el punto debe estar en , y las tres mediatrices se cortan en el circuncentro, .

q.e.d.

Incentro

Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto llamado incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Demostración:



Sea el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos en y , esto es, el punto de corte de y . Trazamos las rectas , y , rectas perpendiculares a las bases por el punto , que cortan a los lados en , y , respectivamente.

Consideramos los triángulos , , y , , .

Como = (por ser bisectriz) y los ángulos en y iguales por ser rectos, los triángulos son semejantes con razón de semejanza : = 1, luego son iguales y = .

Razonando análogamente con los triángulos en el vértice , = y, por tanto, = .

Como la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan del ángulo en , pasa necesariamente por y, por tanto, es punto de intersección de las tres bisectrices del triángulo , , .

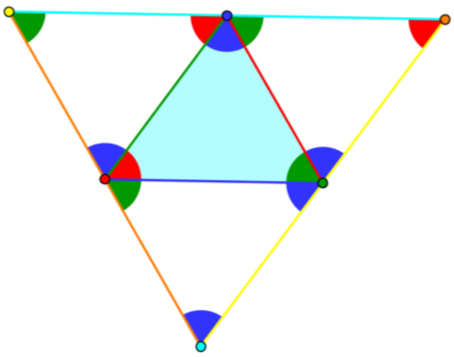
q.e.d.

Ortocentro

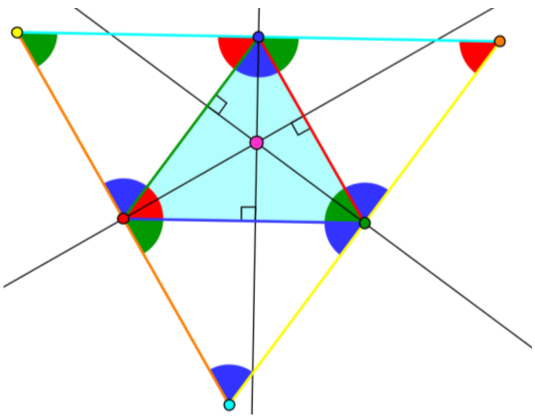
Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto llamado ortocentro.

Demostración:

Para demostrar esta proposición vamos a construir otro triángulo de forma que sus mediatrices coincidan con las alturas de nuestro triángulo original. Para ello trazamos las tres rectas paralelas a los lados de nuestro triángulo pasando por los vértices opuestos, tal y cómo se ve en la imagen:



Por las propiedades de las paralelas de "transportar" ángulos iguales mediante rectas trasversales, todos los ángulos , y son, respectivamente iguales. Así, los cuatro triángulos son semejantes. Además, como los tres triángulos creados comparten un lado correspondiente por semejanza con el triángulo central, todos tienen razón de semejanza 1 con el triángulo central y, por tanto, todos los triángulos son iguales.



Ahora trazamos las alturas del triángulo original , , :

Si consideramos la altura por , por ser ésta perpendicular a y paralela a , la altura por es perpendicular a . Además = por ser lados correspondientes de triángulos iguales. Así, la altura por de , , es la mediatriz de .

Análogamente, las otras dos alturas de , , son las mediatrices de y y podemos deducir que las tres alturas se cortan en , que es el circuncentro de , , .

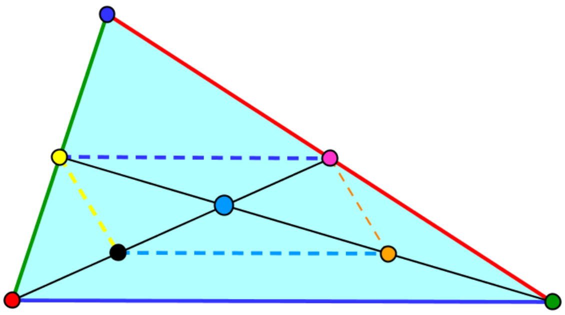
q.e.d.

Baricentro

Una mediana de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto.

> Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto llamado baricentro. Además, la distancia del baricentro a cada vértice es doble que al punto medio del correspondiente lado opuesto.

Demostración:



Trazamos las dos medianas por ● y ●. ● es el punto de intersección entre ambas. Trazamos ....

Como ● y ● son puntos medios de —— y ——, respectivamente, podemos afirmar que los triángulos ●●● y ●●● son semejantes de razón $\frac{1}{2}$ y están en posición de Thales. Por tanto, —— es paralela a .... y —— = 2·....... .

Por otro lado, dibujamos ● y ●, puntos medios de ●——● y ●——●, respectivamente. Por el razonamiento anterior, los triángulos ●●● y ●●● están también en posición de Thales y, por tanto, —— es paralela a .... y —— = 2·....... .

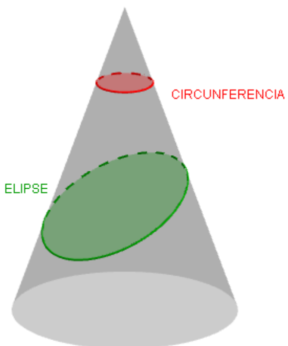
Por tanto, tenemos que .... es paralela a .... y .... =....... y así ●●●● es un paralelogramo y ● es el punto de corte de sus diagonales con lo que ●——● = ●——● = ●——● con lo que queda demostrado que el punto de corte de dos medianas, ●, divide a las medianas de tal forma que la distancia al vértice es el doble que la distancia al punto medio del lado opuesto: ●——● = 2· ●——●.

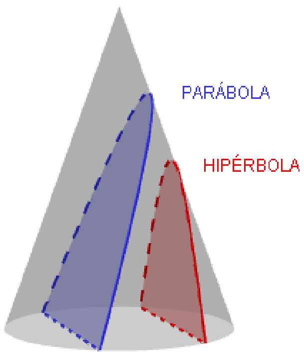
Ahora, si consideramos la tercera mediana, ésta debe pasar necesariamente por ● para que se verifique la propiedad anterior.

q.e.d.

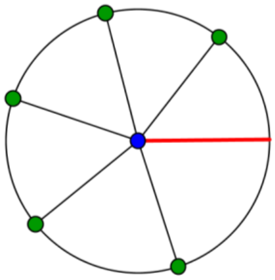
1.7 Las cónicas como lugares geométricos

Llamamos **cónica** a cualquier curva plana que se produce cortando un cono con un plano. Vamos a estudiar alguna de estas curvas: la **circunferencia**, la **elipse**, la **parábola** y la **hipérbola**.





Circunferencia

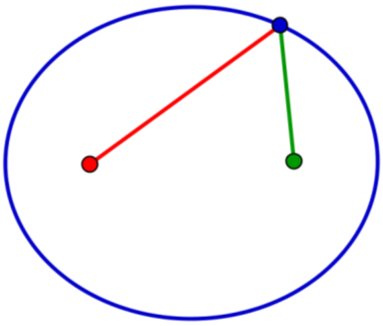


Si cortamos un cono con un plano perpendicular a su eje se obtiene una circunferencia.

Podemos definir la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto concreto, el **centro**. Así:

> Dados • y ——, la circunferencia de centro y radio —— es el conjunto de puntos • tales que •——• = ——.

Elipse



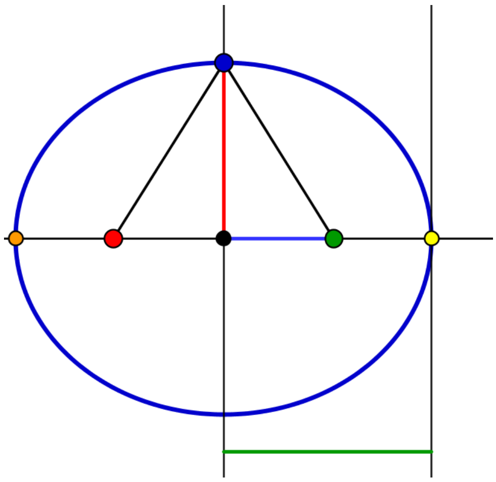
Si el plano que corta al cono tiene una cierta inclinación respecto a su eje (no es ni paralelo ni perpendicular), la línea de corte es una elipse.

La definición de la elipse como lugar geométrico es la siguiente:

> Sean • y • dos puntos fijos (que llamamos focos) y —— una distancia fija. La elipse es el lugar geométrico de los puntos • tales que •——• + •——• = ——.

Elementos característicos de una elipse:

Ya hemos señalados los focos como los puntos más importantes para definir una elipse. Además es importante destacar otros elementos que caracterizan cada elipse:



- Los **focos** • y •.

- El **centro** de la elipse, •, que es el punto medio entre los focos.

- Los **ejes** de la elipse, que son: la recta que pasa por los focos y su perpendicular por •, que es, por definición, la mediatriz de •——•.

- El **semieje mayor**, ——, que es la distancia del centro • a los puntos de corte de la elipse con la recta que pasa por los focos, • y •. Además, se deduce fácilmente en el dibujo que —— es la mitad de la distancia de la que se habla en la definición.

- El **semieje menor**, ——, que es la distancia del centro a los puntos de corte con el eje que no pasa por los focos, •.

- La **semidistancia focal**, ——, que es la distancia del centro a los focos.

- La **excentricidad**, —— : ——.

Una propiedad de la elipse: Veamos que ^{2} = ^{2} + ^{2}.

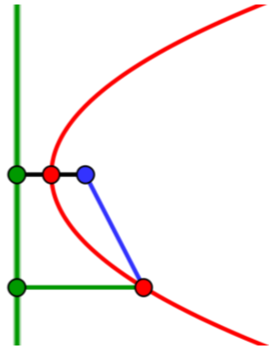
En efecto, si nos fijamos en la imagen, el punto está en la elipse. Por tanto, + = 2· . Ahora bien, = porque está en la mediatriz de luego = y, por el Teorema de Pitágoras, ^{2} = ^{2} + ^{2}.

q.e.d.

Parábola

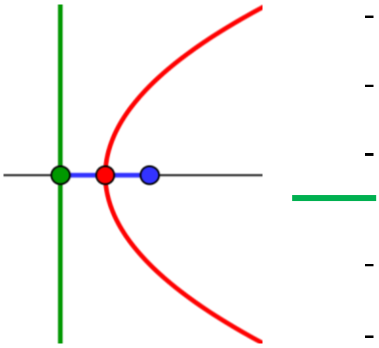
Si el plano que corta al cono es paralelo a una de sus generatrices, se obtiene una parábola.

La definición de la parábola como lugar geométrico es la siguiente:



> Sean una recta fija (recta directriz) y un punto fijo (foco) fuera de . La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de y de , esto es, si está en y es perpendicular a , entonces = .

Elementos característicos de una parábola:



- El **foco** .

- La **generatriz**, .

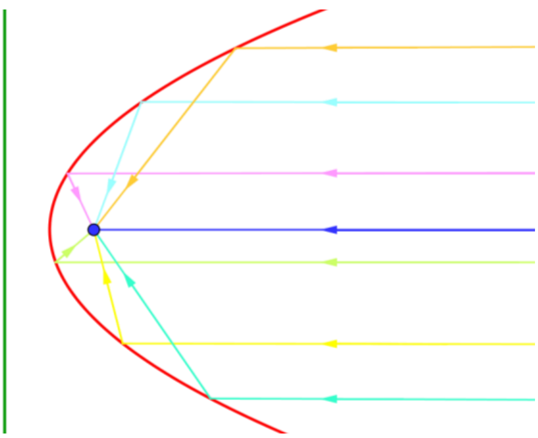
- El eje de la parábola, , que es la recta perpendicular a por .

- ,que es la distancia de a .

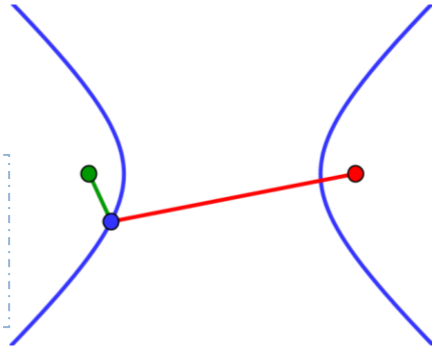
- El **vértice** de la parábola, , que es el punto medio de

- La **excentricidad** que es **1** en cualquier parábola.

Una propiedad de la Parábola: Las rectas paralelas al eje de la parábola se reflejan pasando por el foco de la parábola.



Hipérbola

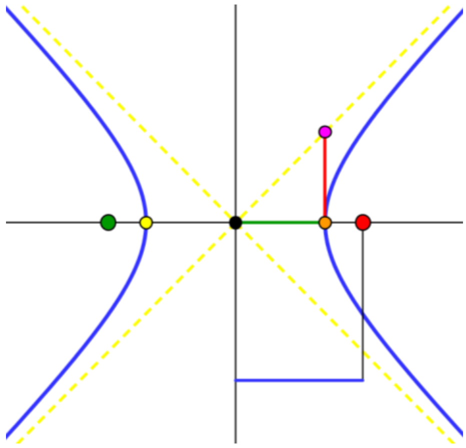


Si tomamos dos conos iguales y opuestos por el vértice y los cortamos ambos por un plano paralelo al eje de giro de los conos que no contenga el vértice, obtenemos una curva con dos ramas que se llama hipérbola.

Sean ● y ● dos puntos fijos (que llamamos focos) y ——— una distancia fija. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos ● tales que:

| ●———● - ●———● | = ———.

<u>Elementos característicos de una hipérbola:</u>



- Los **focos** ● y ●.

- El **centro** de la hipérbola, ●, que es el punto medio entre los focos.

- Los **ejes** de la hipérbola, que son: la recta que pasa por los focos y su perpendicular por ●, que es, por definición, la mediatriz de ●———●.

- El **semieje**, ———, que es la distancia del centro ● a los puntos de corte de la hipérbola con la recta que pasa por los focos, ● y ●. De nuevo, la distancia de la que se habla en la definición de la hipérbola es 2· ———.

- Las dos **asíntotas**, ······· , que son rectas que concurren en ● y a las que se van aproximando las ramas de la hipérbola a medida que nos alejamos de ●.

- ———, que es la longitud del segmento que perpendicular a la recta que pasa por los focos y que empieza en ● y termina en el punto de corte con la asíntota, ●.

- La **semidistancia focal**, ———, que es la distancia del centro a los focos.

- La **excentricidad**, ———:———.

<u>Una propiedad de la hipérbola</u>: ———^{2} = ———^{2} + ———^{2}.

1.8 Perímetro de un Polígono

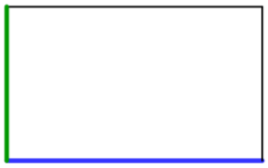
El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

1.9 Áreas de Polígonos

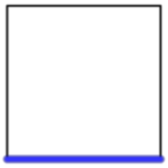
Área de polígonos

Vamos a ver cómo podemos obtener las áreas de cualquiera de los polígonos más conocidos a partir del área del rectángulo:

El área de un **rectángulo** de base y altura es:



$$A_{\text{Rectángulo}} = \cdot$$



El **cuadrado** es un caso particular del rectángulo con = luego A= · = ^{2}.

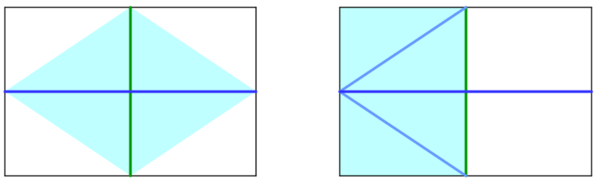
$$A_{\text{Cuadrado}} = \;^2$$

Para obtener el área del **paralelogramo** de base y altura , trasladamos el triángulo rectángulo , , de forma que obtengamos un rectángulo, tal y como se ve en la imagen:

Así, el área del paralelogramo coincide con el área del rectángulo:

$$A_{\text{Paralelogramo}} = \cdot$$

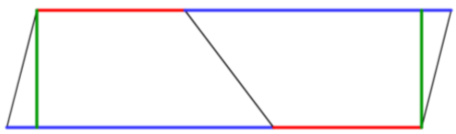
Para calcular el área del **rombo**, trasladamos dos de los triángulos en que las diagonales divide el rombo para rellenar la mitad izquierda del rectángulo en el que el rombo está inscrito:



Así, la superficie del rombo es la mitad de la del rectángulo en el que se inscribe:

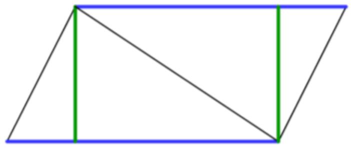
$$A_{\text{Rombo}} = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot$$

Para calcular el área del **trapecio** de bases y y altura , lo duplicamos y colocamos un trapecio junto a otro formando un paralelogramo cómo el de la figura. Así, con la fórmula de área del paralelogramo obtenemos que el área del trapecio es la mitad del paralelogramo formado, que tiene altura y base + . Por tanto,



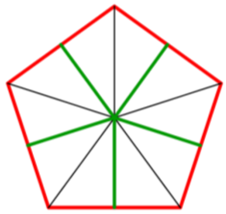
$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{1}{2}\cdot(\underline{\qquad} + \underline{\qquad})\cdot\underline{\qquad}.$$

Para calcular el área de un **triángulo**, tal y cómo hemos hecho con el trapecio, duplicamos la figura y obtenemos un paralelogramo y así el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo:



$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2}\cdot\underline{\qquad}\cdot\underline{\qquad}.$$

Por último, cualquier **polígono regular de n lados** se puede dividir en n triángulos de base el lado, $\underline{\qquad}$, y altura el apotema, $\underline{\qquad}$. Así, el área es n veces el área de este triángulo, esto es,

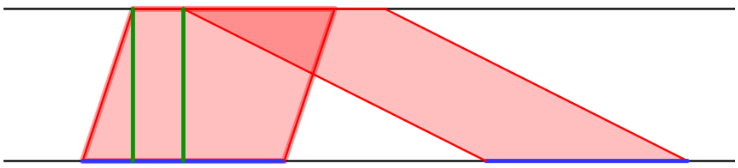


$$A = \frac{1}{2}\cdot n\cdot\underline{\qquad}\cdot\underline{\qquad}.$$

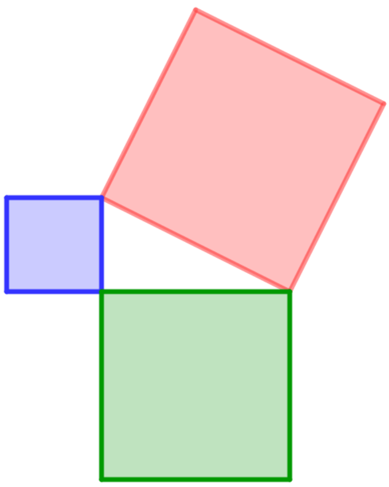
Otra demostración del Teorema de Pitágoras: La demostración de Pappus

Al principio de la unidad hemos visto la demostración china del teorema de Pitágoras, pero podemos usar el cálculo de áreas de paralelogramos para realizar otra demostración diferente.

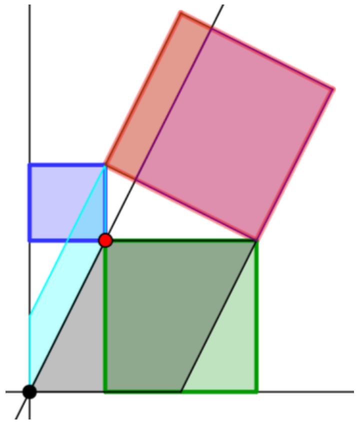
Primero observamos que $A_{\text{Paralelogramo}} = \underline{\qquad}\cdot\underline{\qquad}$ luego dos paralelogramos con la misma base, $\underline{\qquad}$ y la misma altura, $\underline{\qquad}$, tienen el mismo área. En particular, dos paralelogramos con bases iguales y paralelas tienen el mismo área:



Una vez observado esto vamos a demostrar el Teorema de Pitágoras partiendo de la siguiente imagen:



Prolongamos los segmentos y paralelos al triángulo hasta que se corten en •. Trazamos la recta por • y •, el vértice del ángulo recto del triángulo. Así, dividimos en dos cuadriláteros, y .



Si usamos ahora la observación anterior, tenemos:

- Área( ) = Área ( ) y Área( ) = Área ( ) luego:

Área( ) = Área ( )

- Área( ) = Área ( ) y Área( ) = Área ( ) luego:

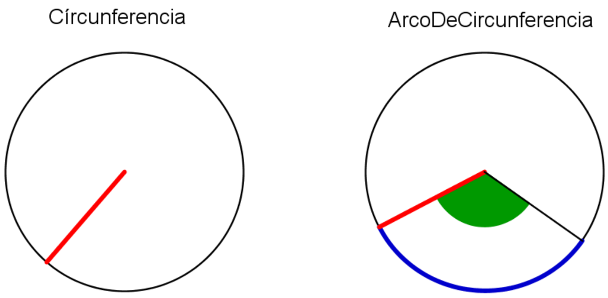
Área( ) = Área ( )

Entonces, Área( ) = Área( ) + Área( ) = Área( ) + Área( ) y como , y son cuadrados:

$$^2 = \ ^2 + \ ^2$$

q.e.d.

1.10 Longitudes de figuras curvas



El número π se define como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Por tanto, podemos escribir la longitud de una **circunferencia** de radio como:

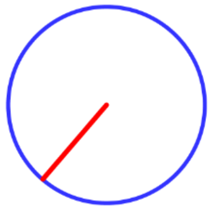
$$L_{\text{Circunferencia}} = 2 \cdot \pi \cdot$$

Por otro lado, si buscamos la longitud de un **arco de circunferencia** determinado por un ángulo , podemos considerar la circunferencia como un arco de 360º, luego la longitud de un arco de 1º será $\frac{1}{360} \cdot L_{\text{Circunferencia}}$ y, por consiguiente, bastará multiplicar esta longitud por el ángulo que precisemos:

$$L_{\text{Arco}} = \frac{2\pi}{360} \cdot \quad \cdot$$

1.11 Áreas de figuras curvas

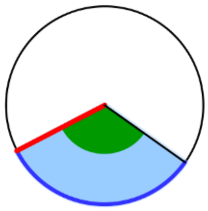
El área del **círculo** es:



$$A_{Círculo} = \pi\cdot \underline{\qquad}^{2}$$

Es bastante evidente ver que ese área se puede escribir también en función de la longitud de la circunferencia:

$$A_{Círculo} = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot\pi\cdot \underline{\qquad})\cdot \underline{\qquad} = \frac{1}{2}\cdot \underline{\qquad}\cdot \underline{\qquad}$$



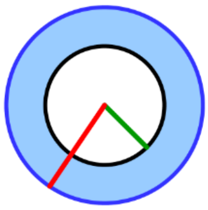
Como ocurría con la longitud de un **arco circular**, podemos obtener el área de un sector circular a partir del área del círculo dividiendo por 360º y multiplicando por el ángulo:

$$A_{Sector\ Circular} = \frac{\pi}{360}\cdot \underline{\qquad}^{2}\cdot$$ 

Esto también nos permite escribir este área en función de la longitud:

$$A_{Sector\ Circular} = \frac{1}{2}\cdot \underline{\qquad}\cdot \underline{\qquad}$$

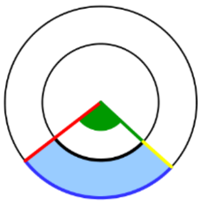
El área de una **corona circular** es muy sencilla de calcular, basta restar el área del círculo menor al área del círculo mayor:



$$A_{Corona} = \pi\cdot(\underline{\qquad}^{2} - \underline{\qquad}^{2})$$

Y en función de las longitudes:

$$A_{Corona} = \frac{1}{2}\cdot(\underline{\qquad}\cdot \underline{\qquad} - \underline{\qquad}\cdot \underline{\qquad})$$



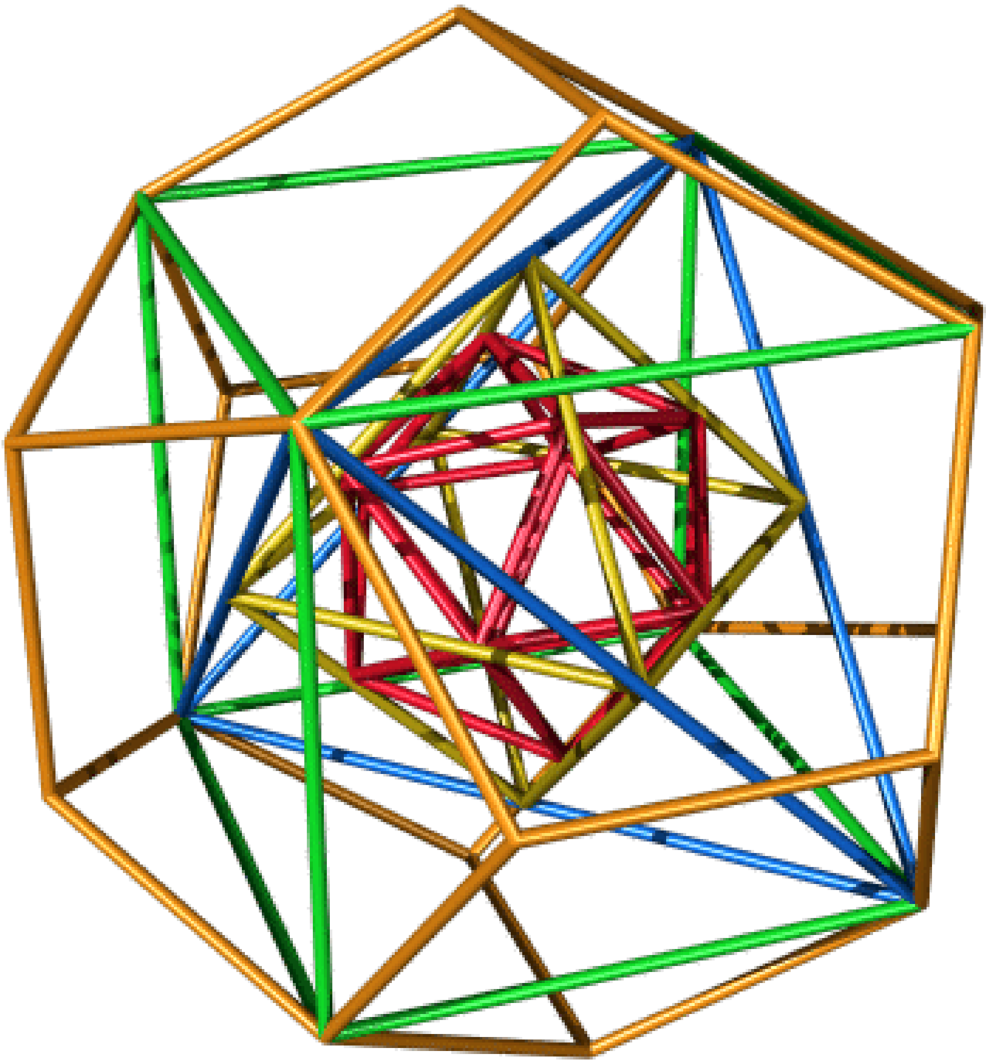
De forma análoga a la fórmula del **sector circular**, el área de un Trapecio Circular es:

$$A_{Trapecio\ Circular} = \frac{\pi}{360}\cdot(\underline{\qquad}^{2} - \underline{\qquad}^{2})\cdot$$ 

Y en función de las longitudes,

$$A_{Trapecio\ Circular} = \frac{1}{2}\cdot(\underline{\qquad}\cdot \underline{\qquad} - \underline{\qquad}\cdot \underline{\qquad})$$

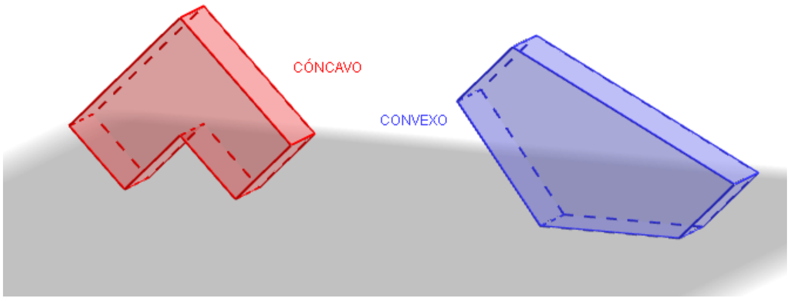
UNIDAD 2. CUERPOS GEOMÉTRICOS



2.1 Poliedros

Llamamos **poliedro** a un cuerpo geométrico limitado por polígonos.

Un poliedro es **cóncavo** si alguna de sus caras no se puede apoyar sobre un plano. Un poliedro es **convexo** si todas sus caras se pueden apoyar sobre un plano.



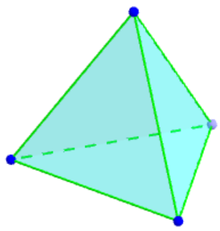
Los poliedros que no tienen orificios se llaman **simples**.

Fórmula de Euler

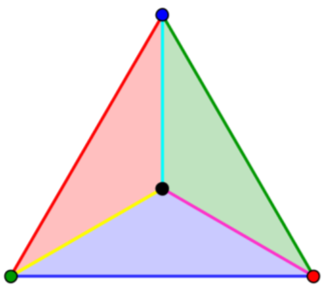
Si un poliedro simple tiene C caras, V vértices y A aristas, entonces se verifica que:

$$C + V - A = 2$$

Vamos a ver como ejemplo el caso de un tetraedro:



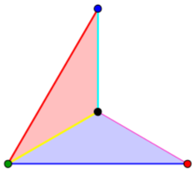
Para comprobar la fórmula, vamos a eliminar una de las caras (c = C - 1) y vamos a deformar la figura resultante hasta tener una figura plana:

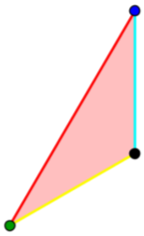


En este ejemplo resulta muy sencillo contar las caras (c = 3), aristas (A = 6) y vértices (V = 4) y, teniendo en cuenta que hemos eliminado una cara (C = 3+1), comprobar que se cumple la fórmula de Euler: 4 + 4 - 6 = 2.

Sin embargo, podemos seguir este otro procedimiento:

- Si eliminamos el segmento , estamos eliminando también la cara  luego en la fórmula eliminamos una cara (signo positivo) y una arista (signo negativo) y se mantiene la relación: (c - 1) + V - (A - 1) = c - 1 + V - A + 1 = c + V - A.





- Si ahora eliminamos , eliminamos , y y, como en el paso anterior, se mantiene la relación: (c - 2) + (V-1) - (A - 3) = c + V - A

- Hemos llegado a obtener un triángulo donde, por definición, $C_{Triángulo} + V_{Triángulo} - A_{Triángulo} = 1 + 3 - 3 = 1$ y, como hay que añadir la cara que habíamos eliminado al principio, tenemos que C + V - A = 2.

q.e.d.

Este procedimiento se puede realizar de forma similar para otros poliedros simples.

Poliedros Regulares y Semirregulares

Se dice que un poliedro es **regular** si cumple las siguientes condiciones:

1. Su caras son polígonos regulares idénticos.

2. En cada uno de los vértices del poliedro concurre el mismo número de caras que en el resto de vértices.

Se puede demostrar fácilmente que sólo existen cinco poliedros regulares, también llamados sólidos platónicos:

Primero observamos que, para que nuestra figura sea tridimensional, los ángulos que concurren en cada vértice deben sumar menos de 360º.

Demostración:

- Primero buscamos los poliedros regulares que tienen como caras triángulos regulares. En este caso, en cada vértice pueden concurrir tres caras (3·60 = 180 < 360º), cuatro caras (4·60 = 240 < 360º) o cinco caras (5·60 = 300 < 360º) pero no más de cinco (si n > 6, n·60 ≥ 6·60 = 360º).

- Si un vértice une tres triángulos, entonces obtenemos un **Tetraedro**.
- Si un vértice une cuatro triángulos, obtenemos un **Octaedro**.
- Si un vértice une cinco triángulos, obtenemos un **Icosaedro**.

- Si las caras del poliedro regular son cuadrados, en cada vértice sólo pueden concurrir tres cuadrados (3·90 = 270 < 360º, pero si n > 3, n·90 ≥ 4·90 = 360º)

- Si un vértice une tres cuadrados obtenemos un **Cubo**.

- Si las caras del poliedro son pentágonos, en cada vértice sólo pueden concurrir tres caras (3·108 = 324 < 360º, pero si n > 3, n·108 ≥ 4·108 = 432 > 360º)

- Si un vértice une tres pentágonos obtenemos un **Dodecaedro**.

- Si las caras son polígonos regulares de seis caras o más (m ≥ 6), y en cada vértice concurren como poco 3 caras (n ≥ 3), entonces $n\cdot\frac{180^\circ\cdot(m-2)}{m} \geq 3\cdot 120 = 360^\circ$. Por tanto, no hay más poliedros regulares que los ya nombrados.

q.e.d.

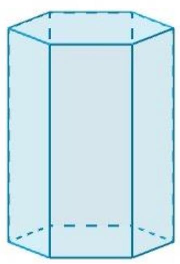
Un poliedro es **semirregular** si sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos y en todos sus vértices concurren el mismo número de caras.

2.2 Prismas y Pirámides

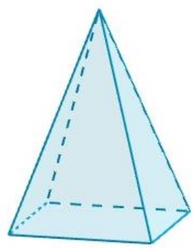
Un **prisma** es un poliedro que tiene dos de sus caras iguales y paralelas (bases) y el resto de caras (caras laterales) son paralelogramos.

Una **pirámide** es un poliedro que tiene como base un polígono cualquiera y como caras laterales triángulos unidos por un vértice común.

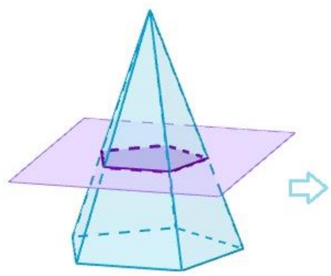
Un **tronco de pirámide** es una pirámide seccionada por un plano paralelo a la base.



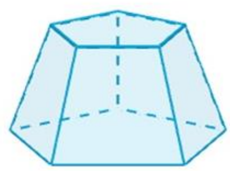
PRISMA



PIRÁMIDE



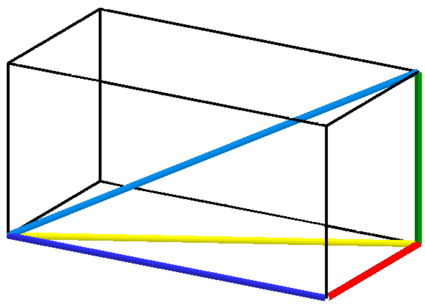
PIRÁMIDE SECCIONADA



TRONCO DE PIRÁMIDE

Teorema de Pitágoras en el espacio

Cuando trabajamos en el espacio, muchas veces no tenemos suficientes datos para aplicar directamente el teorema de Pitágoras tal y cómo lo haríamos si trabajásemos en el plano. Para solucionar esto, debemos buscar en nuestra figura distintos triángulos rectángulos que involucren los datos que tenemos y los que buscamos hallar en diferentes planos.



Por ejemplo, si buscamos la diagonal de un prisma rectangular del que se conocen sus dimensiones , y , debemos aplicar dos veces el

Teorema de Pitágoras:

1º. Hallamos la diagonal de la base:

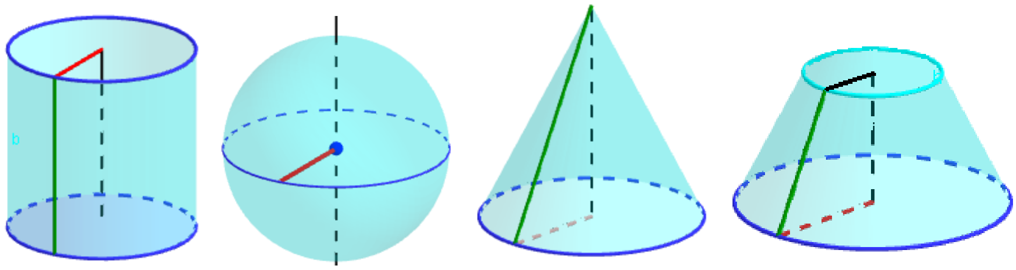
$$\underline{\hspace{1.5cm}} = \sqrt{\underline{\hspace{1.5cm}}^2 + \underline{\hspace{1.5cm}}^2}$$

2º. Aplicamos Pitágoras en el triángulo $\underline{\hspace{1.5cm}}$, $\underline{\hspace{1.5cm}}$, $\underline{\hspace{1.5cm}}$:

$$\underline{\hspace{1.5cm}} = \sqrt{\underline{\hspace{1.5cm}}^2 + \underline{\hspace{1.5cm}}^2} = \sqrt{\underline{\hspace{1.5cm}}^2 + \underline{\hspace{1.5cm}}^2 + \underline{\hspace{1.5cm}}^2}$$

2.3 Cuerpos de revolución

Un **cuerpo de revolución** es una figura geométrica que se obtiene al girar 360º una forma plana alrededor de un eje situado en el mismo plano.



CILINDRO ESFERA CONO TRONCO DE CONO

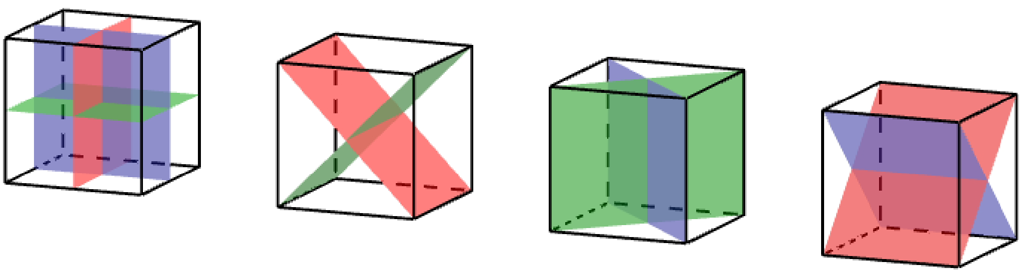
2.4 Simetría en poliedros y figuras redondas

Llamamos **plano de simetría** de un cuerpo a un plano que divide al cuerpo en dos mitades que son imagen especular una de la otra. Veamos algunos ejemplos:

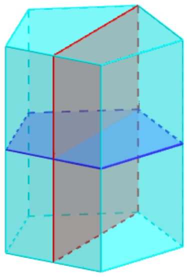
Planos de simetría del cubo

Si consideramos dos caras opuestas del cubo, el plano paralelo entre ellos que divide el cubo en dos prismas iguales es un eje de simetría. Hay tres planos de simetría de este tipo, uno por cada dos caras opuestas.

El plano que pasa por dos aristas opuestas del cubo es un plano de simetría. Hay seis planos de simetría de este tipo.



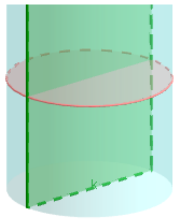
Planos de simetría de prismas



En un prima pentagonal regular hay cinco planos de simetría que contienen cada eje de simetría de las bases.

Al igual que ocurre en el cubo, también tiene otro plano paralelo a las dos bases.

Planos de simetría del cilindro



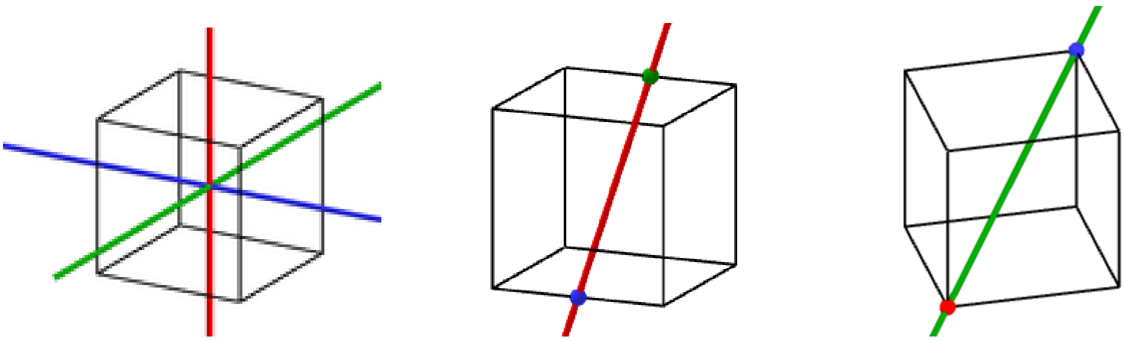
Cualquier plano que contenga el eje del cilindro es un plano de simetría de este. Hay infinitos planos de este tipo.

Además, como en el prisma, hay otro plano de simetría paralelo a las dos bases del cilindro.

2.5 Ejes de giro de una figura

El **eje de giro** de una figura es una recta tal que si giramos la figura un ángulo determinado en torno a esa recta, la figura se superpone con la original. Un eje de giro es de orden n si al girar la figura en torno al eje, la figura ocupa la misma posición n veces. Veamos algunos ejemplos:

Ejes de giro del cubo

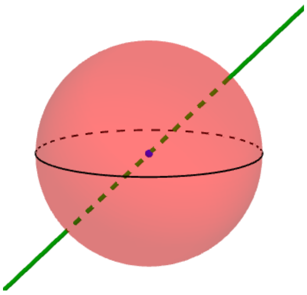


Si unimos los centros de dos caras opuestas, obtenemos un eje de giro de orden 4. Hay tres ejes de este tipo.

Si unimos los centros de dos aristas opuestas por el centro del cubo, obtenemos un eje de giro de orden 2. Hay seis ejes de este tipo.

Si unimos dos vértices opuestos por el centro del cubo, obtenemos un eje de giro de orden 3. Hay cuatro ejes de este tipo.

Ejes de giro de la esfera.



Cualquier recta que pase por el centro es un eje de giro de la esfera. Hay infinitos ejes de giro.

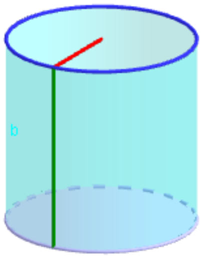
2.6 Superficie de cuerpos geométricos

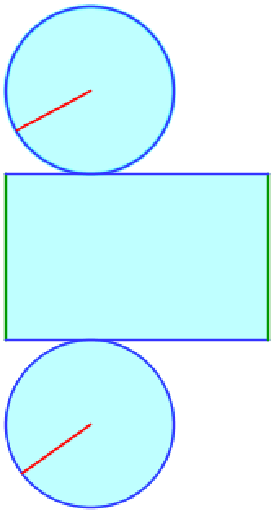
Superficie de un poliedro

El área de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras.

Superficie de un cilindro

La superficie de un cilindro está formada por las dos bases circulares de radio ____ y la superficie lateral de altura ____ y base la longitud de la circunferencia que une el lateral con las bases, ____.





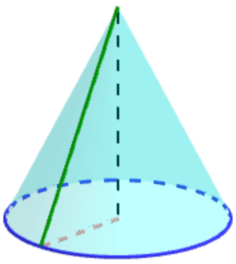
Por consiguiente, tenemos que el área del cilindro es la suma de las áreas de las bases y el área lateral:

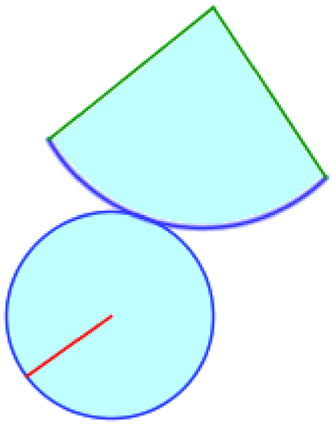
$$A_{Cilindro} = 2\cdot(\pi\cdot \_\_\_^2) + \_\_\_ \cdot \_\_\_ =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot \_\_\_^2 + 2\cdot\pi\cdot \_\_\_ \cdot \_\_\_ .$$

Superficie de un cono

La superficie de un cono está formada por una base circular de radio ____ y la superficie lateral es un sector circular de un círculo de radio ____ que abarca un arco de circunferencia con longitud igual a la longitud de la circunferencia que une el lateral con la base, ____.



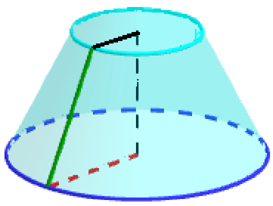


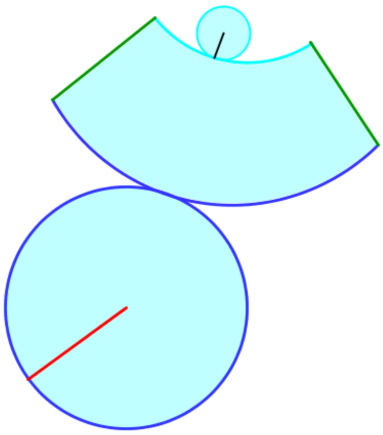
Por consiguiente, tenemos que el área del cono es la suma del área de la base y el área lateral:

$$A_{Cono} = \pi\cdot \_\_\_^2 + \pi\cdot \_\_\_ \cdot \_\_\_ .$$

Superficie de un tronco de cono

Como en el caso del cilindro, la superficie de un tronco de cono consta de dos bases circulares de radios ____ y ____ respectivamente y de una superficie lateral cuya área se calcula a partir del área de un trapecio circular:



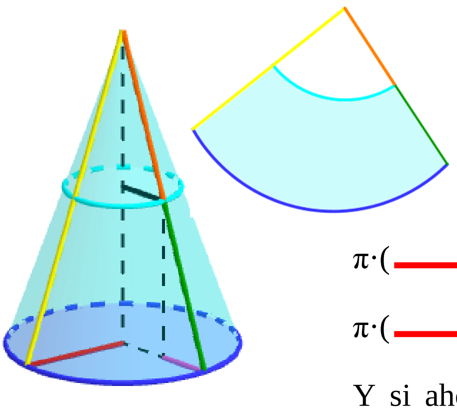


Como primer paso, vamos a usar la semejanza de los triángulos rectángulos ____, ____, _ _ y ____, ____, _ _ que se ven en la imagen del cono completo:

____ : ____ = ____ : ____ ⇨ ____ · ____ = ____ · ____ ⇨

____ · (____ - ____) = ____ · ____

Y, si partimos de la fórmula que obtuvimos para el área del trapecio circular en el tema anterior, tenemos:



$A_{Lateral} = \frac{1}{2}\cdot($ ____ $\cdot$ ____ $-$ ____ $\cdot$ ____ $) =$

$\frac{1}{2}\cdot(2\cdot\pi\cdot$ ____ $\cdot$ ____ $- 2\cdot\pi\cdot$ ____ $\cdot$ ____ $) =$

$\pi\cdot($ ____ $\cdot($ ____ $+$ ____ $) -$ ____ $\cdot$ ____ $) =$

$\pi\cdot($ ____ $\cdot$ ____ $+$ ____ $\cdot$ ____ $-$ ____ $\cdot$ ____ $) =$

$\pi\cdot($ ____ $\cdot$ ____ $+ ($ ____ $-$ ____ $)\cdot$ ____ $)$.

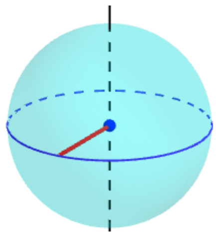
Y si ahora sustituimos la relación obtenida anteriormente por la semejanza de los triángulos ____, ____, – – y ____, ____, – – obtenida en el paso anterior (____ · (____ - ____) = ____ · ____) tenemos:

$A_{Lateral} = \pi\cdot($ ____ $\cdot$ ____ $+$ ____ $\cdot$ ____ $) = \pi\cdot($ ____ $+$ ____ $)\cdot$ ____

Y, sumando el área de las bases:

$A_{Tronco\ de\ Cono} = \pi\cdot$ ____ $^2 + \pi\cdot$ ____ $^2 + \pi\cdot($ ____ $+$ ____ $)\cdot$ ____

Área de la esfera



El área de la superficie esférica de radio ____ es:

$A_{Esfera} = 4\pi\cdot$ ____ ^{2}

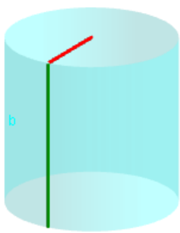
2.7 Volumen de cuerpos geométricos

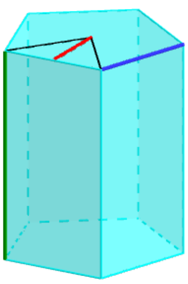
Volumen del prisma y el cilindro.

Los volúmenes del prisma y del cilindro se calculan mediante la siguiente fórmula:

$V = A_{Base}\cdot$ ____ ,

donde ____ es la altura del cuerpo.





De esta forma, el volumen de un prisma con base un pentágono regular de lado ____ y apotema ____, será:

$V = A_{Base}\cdot$ ____ $= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot$ ____ $\cdot$ ____ $\cdot$ ____

Y el volumen de un cilindro de radio ____ será:

$V = A_{Base}\cdot$ ____ $= \pi\cdot$ ____ $^2\cdot$ ____

Volumen de la pirámide y el cono

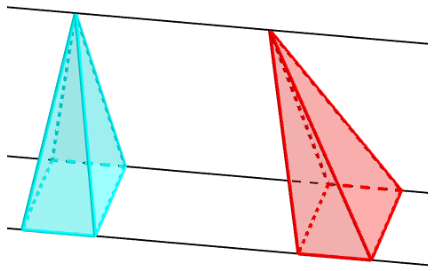
En este caso, tanto el volumen de una pirámide como la de un cono se calculan de la siguiente forma:

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_{Base}\cdot \quad ,$$

donde es, de nuevo, la altura del cuerpo.

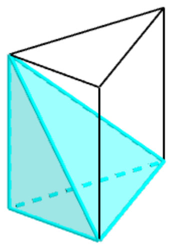
Vamos a probar este resultado para la pirámide de base triangular, lo que nos permite demostrarlo también para cualquier pirámide si triangulamos las bases. Para ello vamos a usar el llamado Principio de Cavalieri que, para este caso particular, nos dice que:

Dos pirámides con la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.

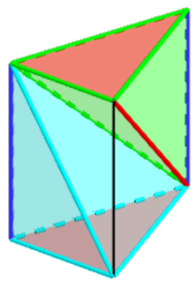


Demostración del área de la pirámide:

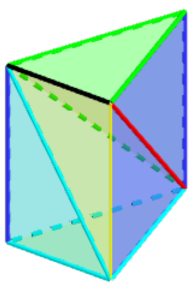
Partiendo de una pirámide triangular, construimos un prisma triangular tal y como se ve en la imagen.



Ahora, dividimos el prisma en tres pirámides triangulares trazando el segmento .



- Si nos centramos en las pirámides con bases las bases del prima, entonces encontramos que sus bases, , son iguales y también lo son sus alturas . Por tanto, tienen el mismo volumen.

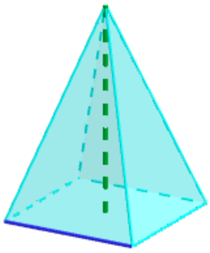


- Por otro lado, si nos centramos en las dos pirámides que hemos construido, y consideramos como sus bases los triángulos coplanarios , entonces sus bases son iguales (porque es la diagonal del rectángulo) y sus alturas, , coinciden. Así, estas dos pirámides también tienen el mismo volumen.

Hemos probado que las tres pirámides en que se divide el prisma tienen el mismo volumen y, por tanto el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma, como buscábamos.

q.e.d.

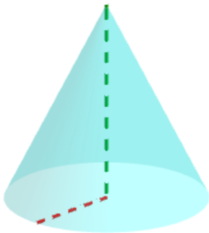
Así, por ejemplo, el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado ______ es:



$$V = \frac{1}{3}\cdot \_\_\_\_\_\_^{2}\cdot \_\_\_\_\_\_$$

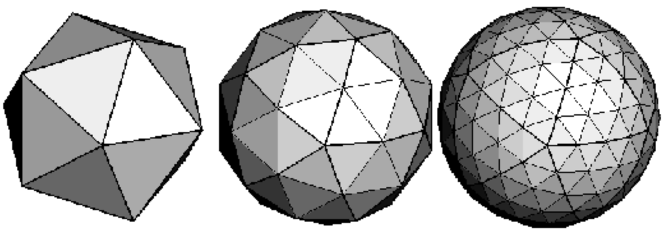
El volumen de un cono de radio ______ es:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot \_\_\_\_\_\_^{2}\cdot \_\_\_\_\_\_$$



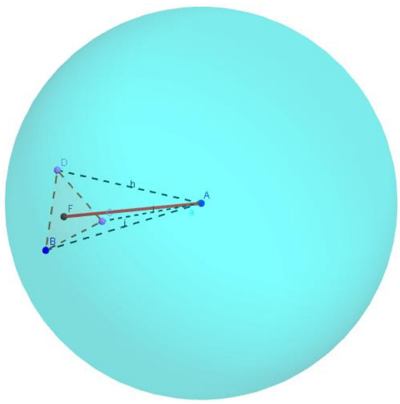
Volumen de la esfera

Para obtener el volumen de la esfera de radio ______, vamos a realizar una aproximación por poliedros:



Como se ve en la imagen, al hacer las caras del poliedro cada vez más pequeñas nos aproximamos cada vez más a la figura esférica y , por tanto podemos aproximar su volumen calculando el volumen de estos poliedros.

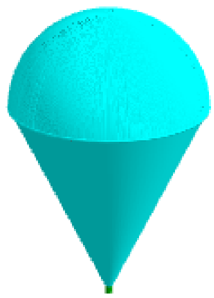
El volumen de un poliedro cualquiera se puede calcular fraccionándolo en pirámides. En este caso nos interesa considerar las pirámides con base una cara del polígono y como vértice el centro del poliedro. Así, la suma de los volúmenes será $\frac{1}{3}\cdot$(nº de caras) $\cdot(A_{Cara})\cdot$altura.



Aproximando, (nº de caras) $\cdot(A_{Cara}) = A_{Esfera}$ y altura = ______. Por tanto,

$$V_{Esfera} = \frac{1}{3}\cdot 4\pi\cdot \_\_\_\_\_\_^{2}\cdot \_\_\_\_\_\_ = \frac{4}{3}\cdot \pi\cdot \_\_\_\_\_\_^{3}.$$

2.8 Áreas y volúmenes de cuerpos compuestos



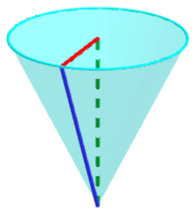
Para calcular el área y el volumen de un cuerpo compuesto basta con calcular el área y el volumen de cada uno de los cuerpos simples que lo componen y después sumarlos todos.

Por ejemplo:

El "cono de helado" de la figura se divide en una semiesfera de radio ______ y un cono (sin base) de radio ______ y altura ______. Por tanto el área será la mitad del área de la esfera más el área lateral del cono.

Observamos que para calcular el área lateral del cono, necesitamos la generatriz ______ y no la altura, pero podemos calcularla fácilmente mediante el teorema de Pitágoras:

$$\underline{\qquad} = \sqrt{\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2}$$



$$A = 2\pi \cdot \underline{\qquad}^2 + \pi \cdot \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$$

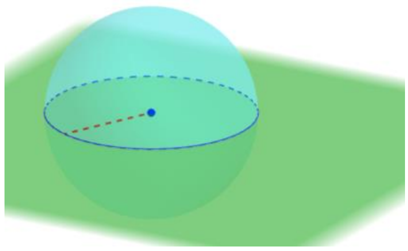
Igualmente, el volumen del cono de helado será la suma del volumen de la semiesfera y el volumen del cono:

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \underline{\qquad}^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \underline{\qquad}^2 \cdot \underline{\qquad}$$

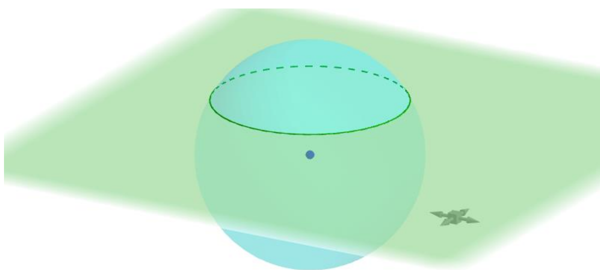
2.9 Intersecciones de planos y esferas

Cuando intersecamos una esfera con planos, podemos obtener estas cuatro figuras geométricas:

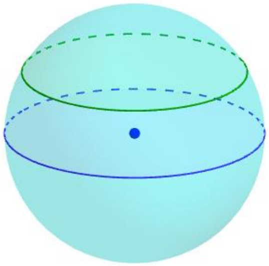
Semiesfera: es cada una de las piezas en que se divide una esfera al cortarla con un plano que pasa por el centro ●



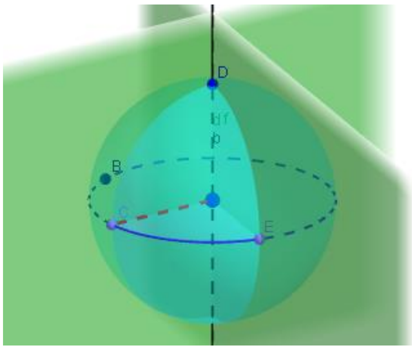
Casquete esférico: cada una de las piezas en que se divide una esfera al cortarla con un plano secante a la esfera que no pase por el centro ●.



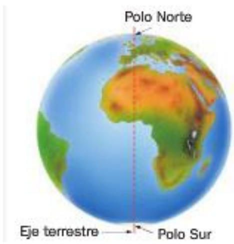
Zona esférica: Trozo de la esfera entre dos planos paralelos secantes a la esfera.



Huso esférico: Trozo de la esfera entre dos planos que pasan por un mismo diámetro de la esfera.

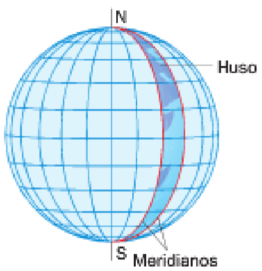


2.10 La Tierra. Meridianos y paralelos



La Tierra tiene, aproximadamente, forma esférica, con un radio medio de 6371 kilómetros. Gira alrededor de una recta imaginaria que se denomina eje terrestre. A los dos extremos de este eje se le llaman Polos: el Polo Norte y el Polo Sur.

Meridianos y husos

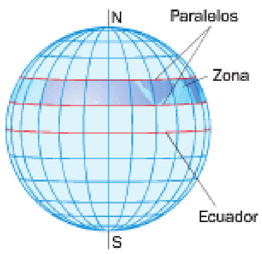


Los meridianos, , son semicircunferencias cuyos extremos coinciden con los polos.

Cada una de las partes de superficie esférica limitada por dos meridianos se llama huso.

La Tierra se divide en 24 husos, que llamamos husos horarios y, salvo excepciones, todos los lugares que pertenecen a un mismo huso horario tienen la misma hora.

Paralelos y zonas

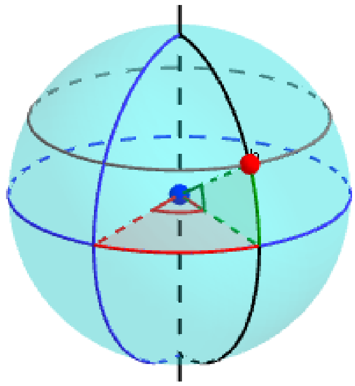


Los paralelos, , son circunferencias sobre la superficie terrestre tales que el plano que las contiene es perpendicular al eje terrestre. Se llama Ecuador al único Paralelo que es una circunferencia máxima (el centro de la circunferencia es el centro de la esfera). La parte de superficie terrestre comprendida entre dos paralelos se llama zona.

2.11 Coordenadas geográficas

Para determinar la posición de un punto sobre la superficie de la Tierra, se utiliza un sistema de coordenadas formado por el ecuador y el meridiano de Greenwich. El origen del sistema es el punto de corte del ecuador y dicho meridiano. La unidad de medida es el grado, º.

En este sistema de coordenadas, cada punto de la superficie terrestre queda determinado por dos coordenadas: la longitud y la latitud.



La longitud de un lugar ● (distinto de los Polos) es la medida en grados del arco , medido sobre el Ecuador, , formado por el meridiano del lugar, , y el meridiano de Greenwich, .

La longitud varía de 0º a 180º en dirección este (E) y de 0º a 180º en dirección oeste (O). Todos los puntos de un mismo meridiano tienen la misma longitud.

La latitud de un lugar ●, es la medida en grados del arco , medido sobre el meridiano que pasa por ●, , formado por el Ecuador, , y el paralelo de ●, .

La latitud varía de 0º a 90º en dirección norte (N) en el hemisferio norte y de 0º a 90º en dirección sur (S) en el hemisferio sur. Todos los puntos del mismo paralelo tienen la misma latitud.

2.12 Sistemas de representación geográfica. Mapas

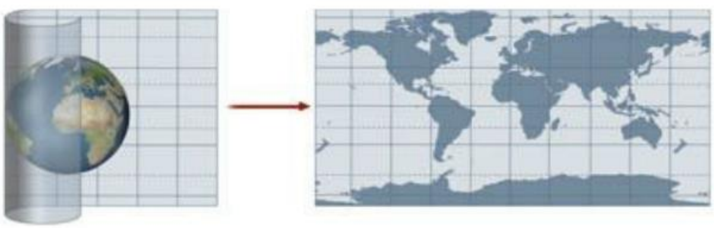
La cartografía es la ciencia que se encarga de la elaboración de de las representaciones de la Tierra o de una parte de ella. Estas representaciones se llaman planos si no tienen en cuenta la curvatura de la Tierra. Sin embargo, cuando la representación si tiene en cuenta la curvatura, la representación se llama mapa.

Los mapas se elaboran mediante distintos tipos de proyecciones:

Proyecciones cilíndricas

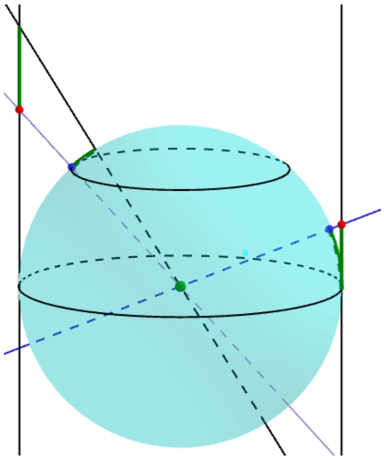
La Tierra se proyecta sobre un cilindro Tangente a la esfera terrestre en el Ecuador. después la imagen sobre el cilindro se extiende sobre el plano cortando el cilindro por una recta paralela al eje central.

Con esta proyección los meridianos y los paralelos son rectas que se cortan perpendicularmente.



La proyección cilíndrica se puede llevar a cabo de dos formas diferentes:

Proyección cilíndrica desde el centro de la Tierra.



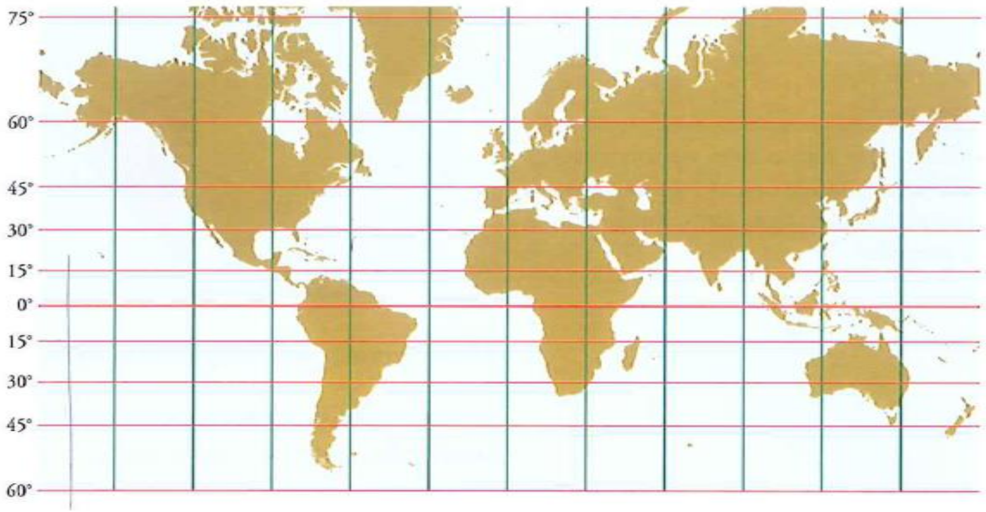
En este caso la imagen ● sobre el cilindro de un punto ● sobre la esfera es el punto de intersección del cilindro con la recta que pasa por el centro de la esfera, ●, y por ●.

En este tipo representación, la máxima precisión se consigue en las proximidades del Ecuador pues, al alejarnos de este, las longitudes aumentan en dos sentidos:

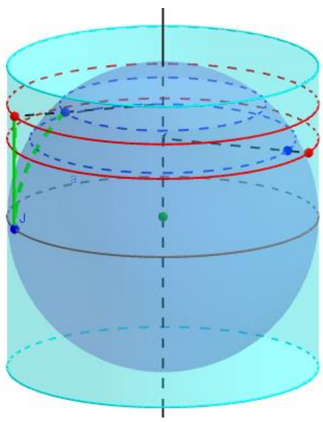
- Los paralelos cada vez están más separados entre sí, es decir dos arcos meridianos cualesquiera ( ) se representan por segmentos muy diferentes en el plano.

- En la Esfera, los paralelos son más cortos a medida que nos acercamos a los Polos. Sin embargo, en la representación, todos los paralelos miden igual.

Esta "ampliación de tamaños, al alejarnos del Ecuador hace que los continentes mantengan la forma pero con una superficie mayor (figuras semejantes).

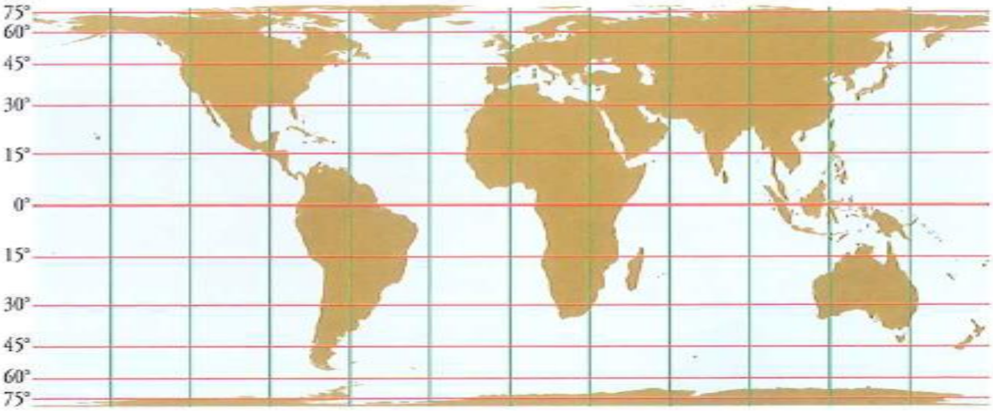


Proyección cilíndrica desde el eje.



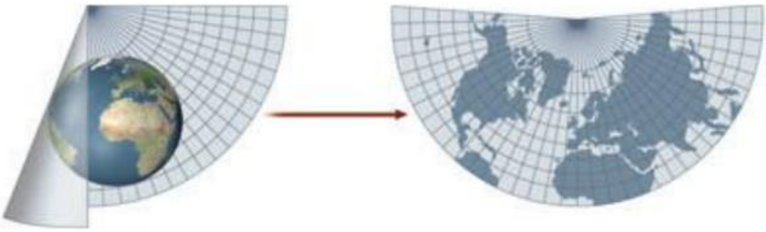
En este caso, las proyecciones se realizan mediante líneas perpendiculares al eje, es decir, cada punto de la esfera, ●, se proyecta en el punto ●, que es la intersección del cilindro con la recta que pasa por ● y es perpendicular al eje .

A diferencia del caso anterior, la distancia entre los paralelos se reduce al acercarnos a los polos. Debido a esto, los continentes se desfiguran a medida que nos acercamos a los Polos, aunque, en este caso, la superficie se mantiene igual:



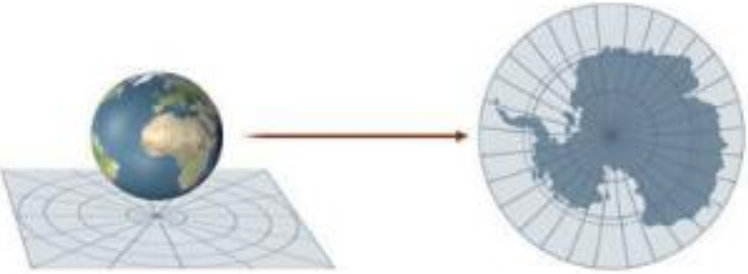
Proyecciones cilíndricas

La Tierra se proyecta sobre un cono tangente a ella en un paralelo determinado. El mapa resultante tiene forma de abanico y distorsiona poco la zona cercana al paralelo de contacto, por lo que se suele usar para representar latitudes medias.



Proyecciones cenitales o acimutales

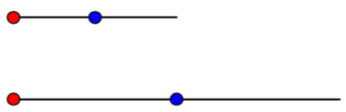
La Tierra se proyecta sobre un plano tangente a un punto de ella. Los mapas son círculos en los que los paralelos son circunferencias concéntricas y los meridianos radios. Se suelen emplear para representar los Polos.



UNIDAD 3. TRASFORMACIONES GEOMÉTRICAS

3.1 Movimientos en el plano

Una **Transformación** en el plano hace corresponder a cada punto del plano otro punto del plano de forma que una figura, por ejemplo, un polígono se transforma en otra figura.



Por ejemplo, la siguiente imagen se representa una goma sujeta por un extremo ● a la pared primero en estado de reposo y después estirada por el extremo suelto. Si pintamos un punto ● en la goma vemos que la trasformación lo aleja del punto de sujeción, ●.

Llamamos **punto doble** o **punto invariante** a aquellos puntos en la figura que se trasforman en sí mismos.

En el ejemplo anterior, ● es el único punto doble.

Un **movimiento** es una trasformación del plano en la que todas las figuras mantienen su forma y su tamaño.

En el ejemplo, la goma mantiene su forma, pero cambia de tamaño (se estira el doble) luego esa trasformación no es un movimiento.

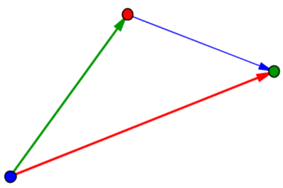
3.2 Vectores en el plano

Llamamos **vector** (⟶) a un segmento orientado ●⟶● cuyo origen es el punto ● y cuyo extremo es el punto ●. Los elementos de un vector son:

- **Módulo**: la longitud de ●▬●. Se denota como |●⟶●| .
- **Dirección**: viene determinada por la recta ●▬●.
- **Sentido**: viene determinado por la orientación en la recta: de ● a ●.

Decimos que dos vectores ●⟶● y ●⟶● son iguales si |●⟶●| = |●⟶●| , ●▬● || ●▬● (o están en la misma recta) y tienen el mismo sentido.

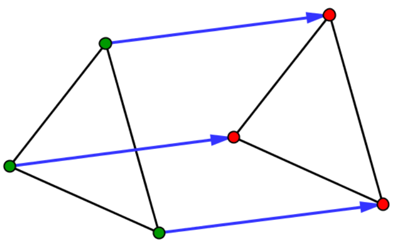
Suma de vectores



Para sumar dos vectores ⟶, con origen ● y extremo ●, y ⟶ gráficamente, colocamos el vector ⟶ de tal forma que su origen coincida con ●. El vector suma ⟶ es el vector de origen ● y de extremo el extremo de ⟶, ●.

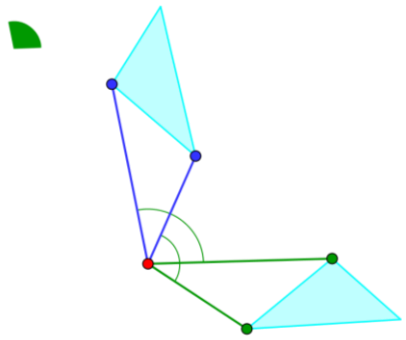
3.3 Traslaciones

Se llama **traslación según un vector** ⟶ a una trasformación que asocia a cada punto ● otro punto ● de forma que ●⟶● = ⟶ .



Las traslaciones no tienen puntos dobles.

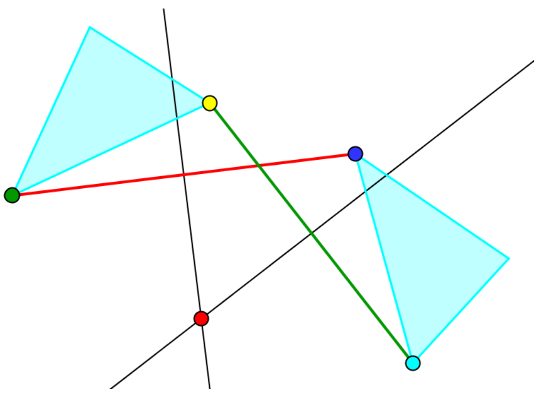
3.4 Giros



Dados un punto ● y un ángulo , se llama **giro de centro ● y ángulo** a una trasformación que hace corresponder a cada punto ● otro punto ● de forma que ●—● = ●—● y ●—●—● = .

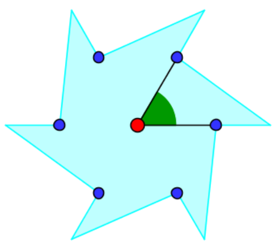
El único punto doble de un giro es el centro de giro ●.

Cómo obtenemos el centro de un giro



Si tenemos dos figuras y sabemos que una de ellas se obtiene mediante un giro de la otra, podemos buscar el centro de giro de la siguiente forma:

- Tomamos dos puntos ● y ● en la primera figura y sus imágenes en la otra figura ● y ●.
- Trazamos ●—● y ●—●.
- Trazamos sus mediatrices.
- El centro del giro es ●, el punto de intersección de las dos mediatrices.



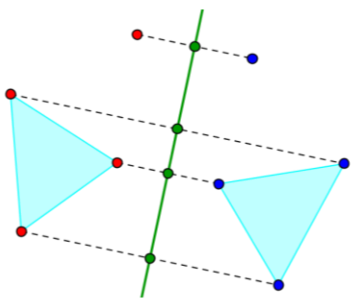
Figuras con centro de giro

Se dice que una figura tiene un **centro de giro ● de orden n** si al girarla alrededor de ●, coincide consigo misma n veces, contando con la posición inicial.

Si el orden de la figura es n, el ángulo de giro es $\frac{360°}{n}$. Por ejemplo, la figura de la imagen tiene el centro de giro ● de orden 6 y el ángulo de giro es de 60º.

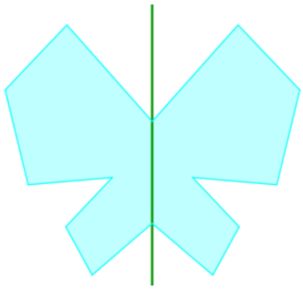
3.5 Simetrías

Se llama **simetría de eje** —— a una trasformación que hace corresponder a cada punto ● del plano otro punto ● tal que —— es mediatriz de ●—●.



Para dibujar la figura simétrica de una figura dada, se realiza lo siguiente:

- Elegimos un punto ● de la figura.
- Trazamos la recta —— que pasa por ● y es perpendicular a —— (se cortan en ●).
- Elegimos ● en —— de forma que ●—● = ●—● y ● está entre ● y ●.



En una simetría, los únicos puntos dobles son los puntos del eje .

Figuras simétricas

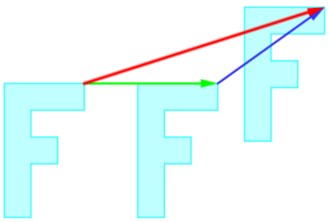
Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una **figura simétrica** y al eje se le llama eje de simetría de la figura.

3.6 Composición de movimientos

Cuando se somete a una figura a dos o más movimientos consecutivos, se dice que la última figura es el resultado de la **composición** de estos sobre la figura de partida.

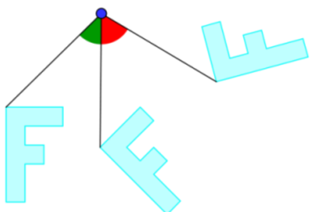
Composición de dos traslaciones

La composición de dos traslaciones de vectores y es otra traslación de vector + .

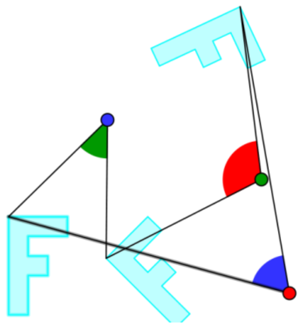


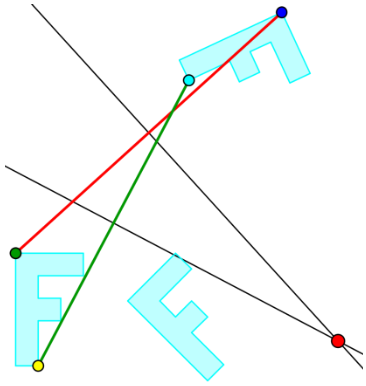
Composición de dos giros

Si los centros de dos giros de ángulos y coinciden en •, al componerlos, obtenemos otro giro de centro • y ángulo + .



Si el centro de los giros no coincide, también obtenemos un giro de ángulo + y, aunque el centro no es tan evidente, ya sabemos cómo calcularlo:



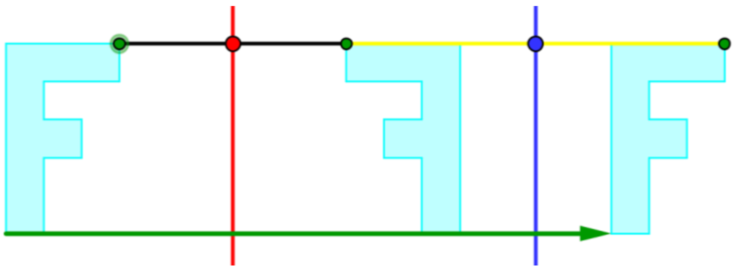


Para hallar el centro del giro, consideramos dos puntos de la figura principal, y , y sus dos imágenes tras los dos giros, y . Trazamos y .

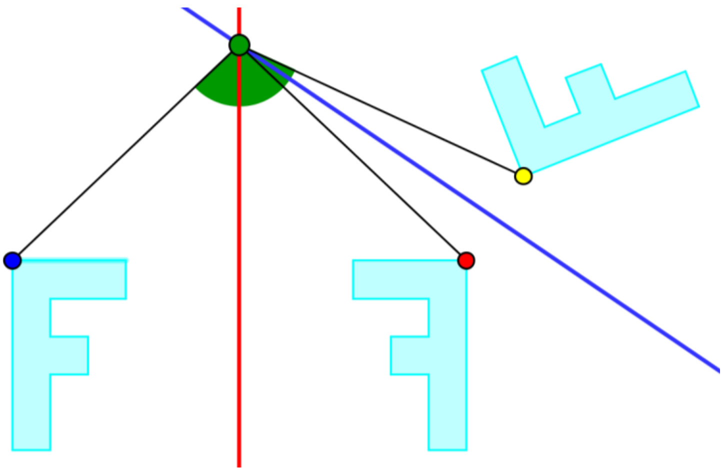
El centro del nuevo giro, ,es el punto de intersección de las mediatrices de y .

Composición de dos simetrías

Si componemos dos simetrías de ejes || obtenemos una traslación de vector , un vector con módulo el doble de la distancia entre los ejes (2·(+)), dirección perpendicular a los ejes y sentido desde hacia .



Si componemos dos simetrías de ejes secantes y , obtenemos un giro de centro el punto de intersección de C y , , y ángulo el doble del ángulo entre los ejes, = 2· .



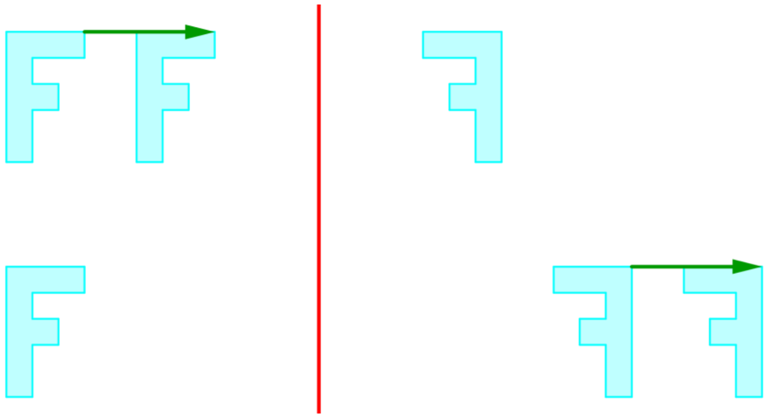
¿A qué se debe esto? Por definición de simetría de eje , es la mediatriz entre un punto de la imagen original, , y su imagen por esta simetría, . Por tanto, = . De la misma forma, considerando la geometría de eje , = . Así, = y, por tanto, está en la mediatriz del segmento .

Razonando igual con otro punto de la imagen original y sus imágenes, , es el punto de intersección de dos mediatrices de dos segmentos que unen un punto de la figura original y su imagen tras las dos simetrías, luego es el centro del giro.

En general, la composición de dos movimientos no es conmutativa, es decir, es importante el orden de aplicación del movimiento. Veamos un ejemplo:

Composición de una traslación con una simetría

Es fácil observar que no obtenemos el mismo resultado si primero realizamos la traslación de vector y luego la simetría de eje que si lo hacemos en el orden inverso.



Como se ve en la imagen, la posición de nuestra figura está más alejada del eje cuando hacemos primero la simetría que cuando hacemos primero la traslación, por lo que se demuestra que la composición de movimientos no siempre es conmutativa.

3.7 Mosaicos, cenefas y rosetones

Todos los movimientos que encontramos pueden encontrarse en multitud de manifestaciones físicas y humanas. En particular vamos a ver tres ejemplos de decoraciones arquitectónicas y artísticas que podemos encontrar, por ejemplo, en catedrales y edificios importantes.

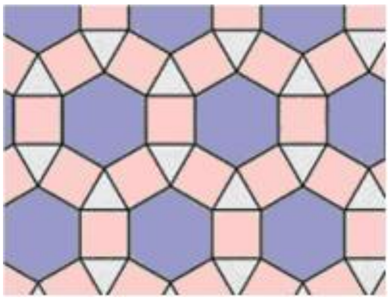
Mosaicos

Un **mosaico** es una configuración geométrica con la que se puede recubrir el plano.

Los mosaicos pueden formarse con una sola pieza o con dos o más piezas. En particular destacamos dos tipos de mosaicos:

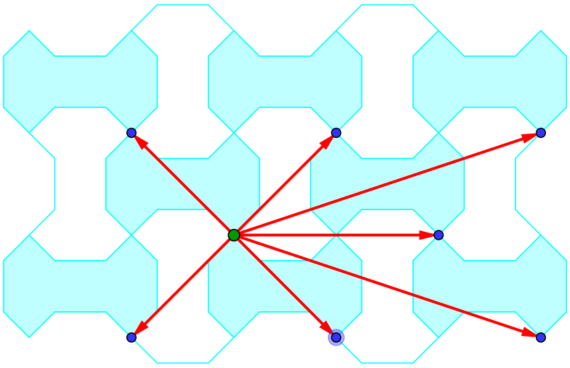
- Los **mosaicos regulares** son los formados por un único tipo de polígono regular. Solo hay tres: con triángulos, cuadrados y hexágonos.

- Los **mosaicos semirregulares** son los formados por dos o más tipos de polígonos regulares.



El siguiente mosaico es conocido como el mosaico "multihueso" y se puede encontrar en la Alhambra de Granada. Vamos a localizar algunos movimientos en este mosaico:

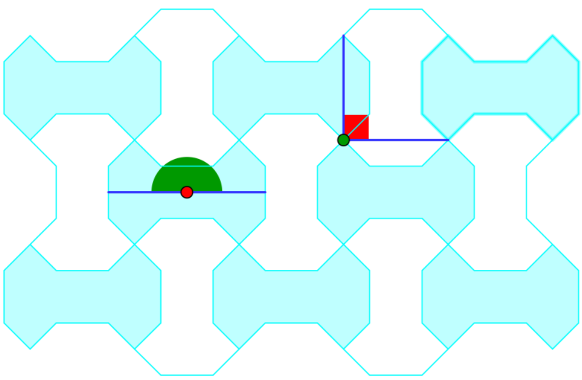
Traslaciones:



Como se ve en la imagen, podemos encontrar muchas traslaciones en el mosaico. Si consideramos un punto concreto, en este caso , que es punto más bajo a la derecha del "hueso" azul de la segunda columna, podemos encontrar todos los vectores que determinan una traslación diferente localizando todos los puntos que cumplan las características de nuestro punto , es decir, los puntos que estén más abajo a la izquierda de un "hueso" azul, que en el dibujo son los puntos .

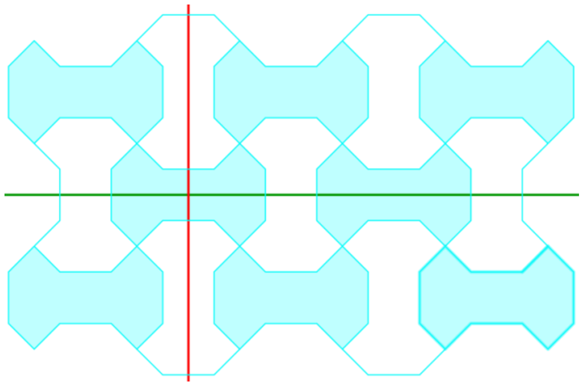
Así pues, las posibles traslaciones del mosaico viene determinadas por cada uno de los vectores .

Giros:



Como se ve en la imagen, podemos encontrar dos tipos de giros. El primero, un giro de centro el centro de cada uno de los "huesos" (también de los blancos), •, y ángulo llano, . El segundo, es un giro de ángulo recto, , con centro en cada vértice en que se unen cuatro "huesos", dos azules y dos blancos.

Simetrías:



Por último, resulta evidente que los ejes de las simetrías del mosaico coinciden con los ejes de simetría de cada uno de los "huesos", es decir las rectas verticales y horizontales por los centros de los huesos, como son y .

Frisos o cenefas

Los **frisos** son adornos longitudinales en los que hay un motivo que se repite mediante traslaciones.

Rosetones

Los **rosetones** son adornos de forma circular en los que hay un motivo que se repite mediante giros.

La imagen de la portada es un ejemplo de rosetón.

CONCLUSIONES

El desarrollo de este trabajo es una muestra de cómo podemos innovar e ir un poco más allá en la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria sin dejar de cumplir la normativa vigente.

Es cierto que muchos resultados matemáticos pueden llegar a ser muy complicados de razonar para nuestros alumnos, pero, gracias a los colores podemos intentar hacerles llegar la idea de cómo se realiza una demostración matemática rigurosa, sin basarse únicamente en ejemplos y casos muy particulares y creados a propósito para obtener algún resultado concreto aunque este no se acerque siquiera a la realidad.

Es claro que esta idea no nos asegura que todos nuestros alumnos sean capaces de comprender todas las demostraciones y todos los razonamientos que explicamos aquí, sin embargo, los colores nos proporcionan otra oportunidad para intentarlo y, aunque no lo consigamos, sí podemos hacer que las matemáticas les resulten más atractivas.

Por otro lado, debemos tener en cuenta también que no todo son ventajas pues, claramente, este tipo de metodología tiene sus límites y sería muy complicado llevarlo a otras ramas de las matemáticas fuera de la geometría. Por tanto, habría que idear otras formas de llegar a nuestros alumnos a la hora de explicárselas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Byrne, Oliver (1847). The first six books of The Elements of Euclid. Londres: TASCHEN.

Colera, J., Gaztelu, I., & Oliveira, Mª.J. (2011). Matemáticas 3. Unidades 9 a 13. Madrid: ANAYA.

DECRETO 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la E.S.O. y el Bachillerato.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Bellón, M., Hervás, J. C. Matemáticas, Pitágoras. 3º ESO. P. Conecta 2.0. LIR. SM

ANEXO 1. Notación y Leyenda de Símbolos por colores.

Por orden de aparición:

: Ángulo o Medida del Ángulo.

: Arco de Circunferencia o Medida del arco (angular o longitudinal).

: Segmento o Longitud del Segmento. También puede representar una recta.

● : Punto.

= : Igualdad de figuras o de medidas.

· : multiplicación de un escalar por una medida o de dos medidas.

: Ángulo Recto.

: : división o razón entre medidas.

|| : Relación de paralelismo entre segmentos (o rectas).

^{2} : Cuadrado de una medida.

+ : Suma de dos medidas.

- : Resta de dos medidas.

< : Menor que.

> : Mayor que.

 : Segmento que une los puntos ● y ●.

| número | : Valor absoluto de número.

: Cuadrilátero

: Triángulo

: Meridiano.

: Paralelo.

: ángulo ● ● ●