



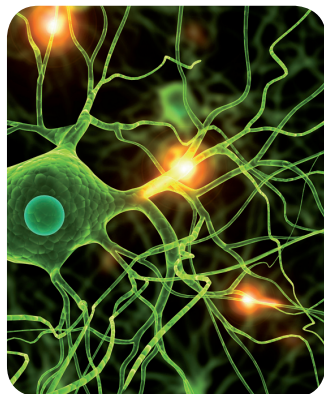
MÁSTERES de la UAM

Facultad de Psicología
/ 14-15

Metodologías
de las Ciencias
del Comportamiento
y de la Salud



**Un Nuevo Estudio
del Análisis
Paralelo en
Escenarios con
Valores Perdidos**
María Dolores Nieto





Un Nuevo Estudio del Análisis Paralelo en Escenarios con Valores Perdidos

Estudiante: María Dolores Nieto

Director: Francisco José Abad

Máster en Metodologías de las Ciencias del Comportamiento y de la Salud

Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Septiembre 2015

A mi familia,

*Y de manera especial a mis padres, Loli y Pedro, y a mis tíos Sole y Jesús,
A Ana, por caminar siempre a mi lado, y a su familia, por ser también la mía,*

*Gracias por todo el amor y apoyo que me habéis dado siempre, pero sobre todo por
haber puesto vuestra confianza en mí.*

Agradecimientos

Quiero dar las gracias:

A mi tutor, Paco Abad, por el enorme aprendizaje que me ha proporcionado durante en estos meses y su dedicación en todo momento con este trabajo,

A Daniel Morillo, por su ayuda en una fase crucial de este trabajo y por haber compartido conmigo su tiempo y sus conocimientos avanzados de informática,

A Luis Garrido, por sus orientaciones tan acertadas siempre y por haber compartido su trabajo y experiencia conmigo.

Por último, quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que han puesto su confianza en mí y que han formado parte de este trabajo de una forma u otra durante estos meses. Gracias por vuestro cariño y apoyo.

Índice

Resumen	2
Introducción.....	3
El Análisis Paralelo.....	3
Valores Perdidos, tipos y métodos de tratamiento.....	4
Software para AP y Valores Perdidos.....	7
Propuesta del Presente Estudio	8
Método.....	9
Diseño	9
Generación de los Datos	11
Generación de valores perdidos	12
Aplicación del AP.....	13
Evaluación del Funcionamiento del AP.....	13
Análisis de Datos	14
Resultados.....	15
Precisión del AP.....	15
Eficiencia	22
Discusión	25
Referencias	31

Resumen

El análisis paralelo de Horn (AP) es una de las técnicas más precisas para evaluar la dimensionalidad de datos continuos, pero su funcionamiento se ve afectado por la presencia de datos perdidos en la matriz de respuestas. En el presente trabajo se evalúa el funcionamiento de tres variantes de AP basadas en diferentes métodos de tratamiento de valores perdidos: *full information maximum likelihood* (FIML), *listwise deletion* (LD) y *pairwise deletion* (PD). Para ello, se realizó un estudio de simulación en el que se manipularon 7 factores (tamaño muestral, número de factores, número de variables por factor, valor de los pesos factoriales, correlación entre factores, mecanismo de pérdida de datos y porcentaje de valores perdidos). Los resultados mostraron que los procedimientos basados en FIML y PD tienen funcionamiento adecuado con muestras de tamaño mediano y grande, siendo el último más preciso con tamaños muestrales pequeños. Por el contrario, al analizar la eficiencia para recuperar la matriz de correlaciones, FIML mostró un rendimiento superior, especialmente en presencia de valores perdidos no ignorables.

Palabras clave: análisis paralelo, análisis factorial exploratorio, valores perdidos

Un Nuevo Estudio del Análisis Paralelo en Escenarios con Valores Perdidos

El análisis factorial exploratorio (AFE) es un conjunto de técnicas ampliamente utilizado en los ámbitos de la psicología y la educación (Beavers et al., 2013; Fabrigar, Wegener, MacCallum, y Strahan, 1999; Floyd y Widaman, 1995). Durante su utilización, el investigador tiene que tomar una serie de decisiones que determinarán la calidad de los análisis realizados. Entre dichas decisiones se encuentra determinar el número de factores que formarán parte del modelo (Fabrigar et al., 1999; Glorfeld, 1995; Velicer, Eaton y Fava, 2000). Para ello, se han propuesto diversos métodos de entre los cuales el análisis paralelo ha demostrado ser el más preciso con variables continuas (Fabrigar et al., 1999; Hayton, Allen y Scarpello, 2004; Henson y Roberts, 2006; Peres-Neto, Jackson, y Somers, 2005; Velicer et al., 2000; Zwick y Velicer, 1986).

El análisis paralelo (AP) fue originalmente propuesto por Horn (1965). En este procedimiento se comparan los autovalores de una muestra (autovalores empíricos) con el promedio de los autovalores de una serie de muestras aleatorias (autovalores aleatorios) obtenidas a partir del número de participantes y variables de los datos empíricos. De esta manera, se retienen tantos factores como autovalores empíricos mayores que autovalores aleatorios se encuentren.

El Análisis Paralelo

En el procedimiento original (Horn, 1965) se proponía: (a) que las muestras aleatorias se generasen a partir de la distribución normal multivariante asumiendo independencia entre las variables, (b) el análisis de componentes principales (ACP) como método de extracción utilizado para obtener los autovalores, y (c) promediar los autovalores aleatorios.

Se han propuesto distintas modificaciones que han dado lugar a diferentes variantes del procedimiento. Entre estas hay que destacar: (a) la generación de muestras aleatorias a partir de permutaciones de los datos empíricos (Buja y Eyuboglu, 1992); (b) métodos de extracción alternativos como el análisis factorial por ejes principales (AFEP) de Humphreys e Ilgen (1969), el cual se basa en el modelo de factor común (Thurstone, 1947), o en el análisis factorial de rango mínimo (AFRM; ten Berge y Kiers, 1991); y (c) un criterio de comparación de autovalores más conservador, el del percentil 95 (PA₉₅; Glorfeld, 1995; Weng y Cheng, 2005).

Garrido, Abad y Ponsoda (2013) y Timmerman y Lorenzo-Seva (2011) encontraron que el AP con ACP es más preciso que cuando se utilizan AFEP y el AFRM como métodos de extracción. Por otro lado, se ha recomendado el uso de permutaciones de los datos empíricos como enfoque no paramétrico que puede dar lugar a muestras aleatorias que representan mejor la distribución univariada de las variables (Garrido et al., 2013, O'Connor, 2000; Steger, 2006). En relación al criterio de cálculo de los autovalores aleatorios, diversas investigaciones han mostrado que el autovalor medio es más preciso con factores correlacionados, mientras que el percentil 95 funciona mejor con estructuras unifactoriales y con factores independientes (Cho, Li y Bandalos, 2009; Crawford et al., 2010; Garrido et al., 2013).

Sin embargo, a pesar de ser extenso el número de investigaciones dedicadas al estudio y recomendación del AP, no parece haberse estudiado su funcionamiento en presencia de un problema prevalente en las ciencias sociales y de la salud: la presencia de valores perdidos. Puesto que los algoritmos de análisis de datos fueron diseñados originalmente para tratar matrices de datos completas (Graham, 2012), no es de extrañar que el AP se vea afectado por las dificultades generadas por la pérdida de datos.

A continuación, se revisan algunos conceptos básicos en relación a los valores perdidos, tipos de valores perdidos, métodos de tratamiento de valores perdidos, e implementación de algunos de estos en el software disponible para aplicar el AP.

Valores Perdidos, tipos y métodos de tratamiento

La presencia de valores perdidos en las respuestas a los ítems es un problema frecuente en las disciplinas como Psicología (Enders, 2010). En 1976, Rubin describe tres mecanismos generales de pérdida de datos: (a) *missing completely at random* (MCAR), (b) *missing at random* (MAR) y (c) *missing not at random* (MNAR). Cuando el mecanismo de pérdida es MCAR, la probabilidad de pérdida en una variable Y dada no está relacionada ni con otras variables observadas X ni con los propios valores de Y. En este caso, los valores observados de Y son una muestra aleatoria de lo que hipotéticamente sería el conjunto de datos completo (Enders y Bandalos, 2001). Por ejemplo, serían valores perdidos de tipo MCAR aquellos que no han sido obtenidos en una encuesta telefónica puesto que los participantes se seleccionan al azar. Por otro lado, se habla de mecanismo MAR cuando la probabilidad de perder datos en una variable Y está relacionada con una o más variables observadas X, pero no con los valores de la variable Y en sí. Para ejemplificar este mecanismo, sean X e Y dos

exámenes que se administran a un grupo de participantes en un contexto de selección de personal. En primer lugar se presenta el examen X y, posteriormente, se seleccionan a aquellos sujetos que han obtenido puntuaciones altas para administrarles el examen Y. Las puntuaciones en el examen Y para participantes con puntuaciones bajas en X son en este caso valores perdidos de tipo MAR. Por último, los valores perdidos son MNAR cuando la probabilidad de pérdida en una variable Y depende de los propios valores de Y, tras haber controlado otras variables. Por ejemplo, se producen datos perdidos de tipo MNAR cuando un participante al que se le administra un test de rendimiento óptimo no responde a aquellos ítems de mayor dificultad porque su nivel de habilidad es bajo. Además, Rubin distingue si la pérdida de datos es ignorable (MCAR, MAR) o no (MNAR) al realizar los análisis. Se habla de pérdida de datos ignorable cuando las estimaciones obtenidas no están sesgadas.

Se han propuestos distintos procedimientos para el tratamiento de valores perdidos que suelen dividirse en métodos clásicos y métodos modernos. En los métodos clásicos, se proponen soluciones basadas en la eliminación de casos o en la imputación de los valores perdidos. Algunos de estos métodos son:

Case Deletion o Listwise Deletion (LD). Se eliminan los casos que presentan algún valor perdido y utiliza solo aquellas observaciones que tienen información en todas las variables. Como consecuencia, se pierde frecuentemente un porcentaje bastante alto de casos para analizar al utilizar este procedimiento.

Pairwise Deletion (PD). Este procedimiento utiliza las puntuaciones que están disponibles para estimar los parámetros deseados. Así, por ejemplo, para calcular la covarianza o la correlación de las variables X_j y X_k , se utilizarán los pares de valores observados en ambas variables.

El uso de estos procedimientos ha sido extensamente criticado debido a que son poco eficientes y pueden producir estimaciones sesgadas, especialmente con datos perdidos no ignorables (Graham, 2009; Little y Rubin, 1987; Peugh y Enders, 2004; Schafer y Graham, 2002; von Hippel, 2004). A pesar de ello, estos métodos son de uso frecuente por hallarse implementados en los paquetes estadísticos más utilizados (Enders, 2013).

Durante las últimas décadas se han hecho avances metodológicos de especial relevancia en el campo del tratamiento de los valores perdidos (West, 2001). Así, actualmente, el denominado “estado del arte” está compuesto por dos métodos más sofisticados denominados modernos: la estimación por máxima verosimilitud y la

imputación múltiple (Schafer y Graham, 2002). A continuación se exponen únicamente algunos procedimientos basados en el primero de ellos puesto que tiene especial importancia para los objetivos del presente trabajo:

Full Information Maximum Likelihood (FIML). Para trabajar con valores perdidos existen diferentes algoritmos basados en ML que, al igual que los procedimientos para matrices completas, asumen normalidad multivariante. El procedimiento FIML fue propuesto originalmente por Finkelstein (1979) para el análisis factorial. El algoritmo utiliza todos los datos disponibles de la matriz de respuestas para estimar parámetros, de tal manera que maximiza la verosimilitud considerando la información disponible para cada caso. En este sentido, puede encontrarse que FIML es un procedimiento conceptualmente análogo al método clásico de PD, si bien en términos matemáticos no guardan ningún tipo de relación (Enders, 2001b). Diversos autores han mostrado que FIML proporciona mejores resultados que los métodos clásicos (e.g., Arbuckle, 1996; Enders y Bandalos, 2001; Schafer y Graham, 2002).

Los métodos modernos no son habitualmente utilizados en la investigación aplicada por tres razones principales (Allison, 2012): (a) su desconocimiento, (b) la falta de conocimientos para implementarlos aunque se conozcan, y (c) la dificultad y tiempo necesarios para implementarlos. Así, por ejemplo, a pesar de que se conocen los beneficios teóricos de los métodos basados en ML, estos no han sido muy utilizados debido a la falta de software estadístico que los implemente (Wothke, 2000).

Diversos estudios han comparado el funcionamiento de ambos tipos de métodos, tradicionales y modernos, pero ninguno en el ámbito de la determinación de la dimensionalidad. Debido a las limitaciones de espacio, aquí se mencionan solo algunas de estas investigaciones, las cuales aportan información relevante para el presente trabajo. Arbuckle (1996), y Enders y Bandalos (2001) compararon el funcionamiento de FIML, PD y LD utilizando modelos de análisis factorial confirmatorio (AFC), mientras que Wothke (2000) lo hace en modelos de curva latente. Por otro lado, Graham, Hofer y MacKinnon (1996) evaluaron el funcionamiento de diversos métodos de ML (entre ellos, FIML y algoritmo EM) y PD al estimar los elementos de la matriz de covarianzas y los coeficientes de regresión. En dichos estudios se encontró de forma general que todos los métodos obtienen estimaciones insesgadas bajo la condición de MCAR, mientras que los métodos clásicos producen estimaciones sesgadas en escenarios MAR (Arbuckle, 1996; Enders y Bandalos, 2001; Graham et al., 1996; Wothke, 2000). Además, FIML mostró inequívocamente una eficiencia mucho mayor que LD, si bien

en algunos casos no estaba tan claro que sucediera lo mismo en relación a PD. Por ejemplo, en Enders y Bandalos (2001), la eficiencia de FIML en relación a PD tanto en la condición MCAR como MAR es más bien modesta, si bien es más notable con pesos altos (0.8) y una proporción alta de valores perdidos (25%). Además, hay que destacar que en estos estudios solo se han manipulado condiciones de datos perdidos ignorables (MCAR y MAR), pero no de tipo MNAR. Por otro lado, entre los escenarios en los que se han evaluado LD, PD y los procedimientos basados en ML, no se encuentra el de determinar el número de factores a extraer. Estos son dos aspectos importantes que no se han observado en los estudios revisados y que son importantes para la presente investigación.

Software para AP y Valores Perdidos

Es difícil encontrar implementados los métodos modernos de tratamiento de valores perdidos durante la ejecución del AP. Esto se debe a que el propio AP no suele incorporarse en los paquetes estadísticos más utilizados, como SPSS, o se ha incluido recientemente, como en el caso de Mplus (Timmerman y Lorenzo-Seva, 2011). En el caso de SPSS se han desarrollado macros como la de O'Connor (2000) que, aunque permite llevar a cabo el AP, no permite trabajar con valores perdidos. Desde su versión 12.0, SPSS incorpora un módulo de tratamiento de valores perdidos denominado *Missing Value Analysis* (MVA; IBM, 2011a), que incorpora cuatro procedimientos: LD, PD, imputación simple mediante regresión y el algoritmo EM, un método de máxima verosimilitud. El uso de los tres primeros ha sido ampliamente criticado en diversos estudios puesto que se sabe que producen estimaciones sesgadas al tratar los valores perdidos (Peugh y Enders, 2004; Schafer y Graham, 2002; von Hippel, 2004). Por otro lado, el software de análisis factorial FACTOR (Lorenzo-Seva y Ferrando, 2006) incorpora en su última versión (10.3.01) un procedimiento de imputación múltiple basado en Lorenzo-Seva y Van Ginkel (2015, in press) al utilizar el AFE. En versiones anteriores se eliminaban los casos con valores perdidos (LD). Por último, existen diversos paquetes para el software de distribución libre R (R Core Team, 2014) que permiten aplicar el AP. Algunos de estos paquetes no permiten utilizar el análisis AP cuando hay valores perdidos, como es el caso de *paran* (Dinno, 2012). El paquete *psych* (Revelle, 2015), utilizado en investigación en los ámbitos de psicología y psicometría, permite realizar el AP con valores perdidos, mediante PD o LD.

Propuesta del Presente Estudio

El presente trabajo se propone estudiar el funcionamiento del AP en presencia de valores perdidos en variables continuas que se distribuyen normalmente. Para ello, se plantea un estudio de simulación en el que se manipularán distintas variables de pérdida de datos (mecanismo de pérdida, proporción de valores perdidos), así como otros factores que afectan al funcionamiento del AP. Así, se presentan tres procedimientos de AP los cuales, mediante la incorporación de métodos específicos de tratamiento de valores perdidos, permiten obtener la matriz de correlaciones a partir de la cual se extraerán los autovalores. Los procedimientos para trabajar con pérdida de datos en los que se basan dichos métodos de AP son: (a) *listwise deletion*, (b) *pairwise deletion* (PD), y *full information maximum likelihood* (FIML). Puesto que en estudios previos FIML ha mostrado ser claramente más eficiente que LD, pero se encuentran resultados heterogéneos en relación PD, se considera oportuno evaluar dichos procedimientos. A su vez, los procedimientos resultantes incorporan aquellas modificaciones del AP para datos completos que han mostrado un funcionamiento óptimo: el análisis de componentes principales (ACP) como método de extracción, la obtención de las matrices de datos aleatorias a partir de permutaciones de la matriz empírica, y el promedio de los autovalores de estas matrices para obtener los autovalores aleatorios (Cho et al., 2009; Garrido et al., 2013, O'Connor, 2000; Timmerman y Lorenzo-Seva, 2011).

Además, con el fin de aportar información complementaria a los resultados de AP, se propone evaluar la eficiencia en la recuperación de la matriz de correlaciones de los métodos de tratamiento de valores perdidos cuando la pérdida de datos afecta a variables continuas que se distribuyen normalmente. De esta manera, permitirá obtener información sobre la eficiencia, según los distintos métodos de tratamiento de valores perdidos (LD, PD y FIML) y para un conjunto de condiciones más amplio que en trabajos previos. Por ejemplo, Wothke (2000) utiliza únicamente tamaños muestrales de 500, mientras que Enders y Bandalos (2001) manipulan los pesos factoriales, el tamaño muestral, la proporción de valores perdidos y el mecanismo de pérdida.

Por otro lado, otro propósito de especial relevancia en este trabajo es el estudio tanto de la precisión del AP como de la eficiencia de diversos métodos de tratamiento de valores perdidos en un escenario de pérdida no ignorable. Tal y como se ha mencionado más arriba, la eficiencia de LD, PD y FIML se ha estudiado

fundamentalmente en contextos con mecanismos de pérdida ignorable (Arbuckle, 1996; Enders y Bandalos, 2001; Graham et al., 1996; Wothke, 2000).

En la presente investigación no se contaba con evidencias empíricas previas en relación a la precisión del AP con valores perdidos. Sin embargo, atendiendo a estudios que han evaluado métodos para tratar la pérdida de datos, se espera que la variante basada en FIML sea más precisa que aquellas basadas en PD y LD. Es esperable que el método de AP con LD tenga un funcionamiento peor, puesto que el número de casos completos será muy reducido y, por tanto, se dispondrá de menos información. Por otro lado, se espera que la presencia de valores perdidos afecte negativamente a la precisión del AP paralelo en todos los procedimientos. Finalmente, se esperan menores diferencias entre los métodos en condiciones MCAR (Arbuckle, 1996; Graham et al., 1996; Wothke, 2000).

Respecto a los objetivos relacionados con la eficiencia de los métodos de tratamiento de valores perdidos en la recuperación de la matriz de correlaciones, se espera que FIML sea más eficiente que los métodos clásicos, especialmente cuando la pérdida de datos no sea completamente aleatoria. Además, se espera que la eficiencia de FIML aumente con mayores proporciones de valores perdidos (Arbuckle, 1996). LD se sabe que ocasiona la pérdida de demasiados casos, por lo que no se espera que recupere de forma adecuada la matriz de correlaciones.

Método

Diseño

Se realizó un estudio de simulación Monte Carlo en el que se utilizó un diseño factorial mixto para evaluar la precisión de los diferentes métodos de AP. Por un lado, se manipuló una variable intrasujetos: la matriz de correlaciones analizada (completa, *listwise deletion*, *pairwise deletion* o *full information maximum likelihood*). Por otro, se manipularon 7 factores intersujetos: tamaño muestral, pesos factoriales, número de variables por factor, número de factores del modelo, correlación entre factores, mecanismo de pérdida y porcentaje de valores perdidos. En la Tabla 1 se presenta un resumen de las condiciones simuladas.

Tabla 1

Niveles de las variables independientes

Variable independiente	Nivel			
	N1	N2	N3	N4
Matriz de correlaciones analizada (AP)	Completa	LD	PD	FIML
Tamaño muestral (N)	200	500	2,000	
Nº de factores (NFAC)	1	2	4	6
Nº variables por factor (VARFAC)	4	6	8	
Pesos factoriales (PESOS)	0.40	0.55	0.70	
Correlación entre factores (CORFAC)	0.3	0.5		
Mecanismo de pérdida (Correlación con factor PO; MECANISMO)	MCAR 0	MNAR (-0.6)		
Porcentaje de valores perdidos (VPERD)	10%	20%	30%	

Atendiendo al factor intrasujetos se distinguen 4 niveles: (a) AP-C, (c) AP-LD, (e) AP-PD, y (g) AP-FIML, donde AP = análisis paralelo, C = completo, LD = *listwise deletion*, PD = *pairwise deletion*, y FIML = *full information maximum likelihood*. En función de los factores intersujetos, el diseño consta de un total de 1134 combinaciones factoriales resultantes de dos escenarios: (a) la condición unidimensional 3 X 3 X 3 X 2 X 3 (Tamaño muestral X Pesos factoriales X Nº variables por factor X Mecanismo de pérdida X Porcentaje de valores perdidos), que da lugar a 162 combinaciones; y (b) la condición multidimensional con un diseño 3 X 3 X 3 X 3 X 2 X 2 X 3 (Tamaño muestral X Nº de factores X Nº variables por factor X Pesos factoriales X Correlación entre factores X Mecanismo de pérdida X Porcentaje de valores perdidos), con un total de 972 combinaciones.

Del total de los 8 factores manipulados, tres de ellos (procedimiento de obtención de la matriz de correlaciones, mecanismo de pérdida y porcentaje de valores perdidos) han sido incluidos por ser relevantes en los estudios de valores perdidos. Así, se utilizaron los métodos de *listwise deletion* (LD) y *pairwise deletion* (PD) para tratar los valores perdidos por ser estrategias habitualmente implementadas en el software que suele emplearse para realizar el AP. Por otro lado, se utilizó FIML, por ser un método moderno de interés para la presente investigación. Además, se utilizó el AP con las matrices de datos completas con el objetivo de establecer una línea base que permitiera comprender mejor el funcionamiento de las variantes para valores perdidos.

Por otra parte, se simularon dos mecanismos de pérdida de datos, MCAR y MNAR, puesto que interesaba conocer el funcionamiento del análisis paralelo cuando la pérdida no puede ser ignorada. Por último, se simularon tres porcentajes de valores perdidos, bajo, medio y alto (10%, 20% y 30%, respectivamente), los cuales han sido utilizados en estudios previos (e.g., Arbuckle, 1996), al mismo tiempo que son representativos de lo que sucede en el ámbito aplicado.

Por otro lado, se han incluido factores que han sido previamente estudiados en la investigación sobre el AP (Beauducel, 2001; Velicer et al., 2000; Zwick y Velicer, 1986). Los niveles de cada factor se eligieron para representar condiciones que se encuentran en investigación aplicada o que han demostrado tener una repercusión importante en el funcionamiento del AP en estudios de simulación. Así, se simularon tamaños muestrales de 200, 500 y 2000 casos, los cuales se consideran pequeño, mediano y excelente (Garrido et al., 2013; Timmerman y Lorenzo-Seva, 2011). El número de factores simulados fue 1, 2, 4 y 6, representando las condiciones unidimensional y bidimensional estructuras factoriales sencillas, mientras que los otros dos niveles constituyen estructuras factoriales más complejas. Por otro lado, se simularon 4, 6 y 8 variables por factor, de tal manera que hubiera desde un indicador por encima del número mínimo recomendado (e.g., Velicer y Fava, 1998) hasta definir un factor moderadamente fuerte (Velicer et al., 2000). Los pesos factoriales de .40, .55 y .70 se eligieron por ser bajos, medios y altos (Comrey y Lee, 1992). Por último, siguiendo a Cohen (1988), se simularon correlaciones moderadas (.30) y fuertes (.50) entre factores.

Generación de los Datos

Para cada de las 1134 combinaciones factoriales descritas se generaron 20 réplicas. En cada una de estas réplicas se obtenía la correspondiente matriz de correlaciones poblacional y la matriz de datos muestral. Para ello, por un lado, se obtuvo la matriz poblacional de correlaciones reproducidas, en cuya diagonal se encuentran las comunalidades:

$$R_R = \Lambda\Phi\Lambda^T, \quad (1)$$

donde R_R es la matriz poblacional de correlaciones reproducidas, Λ es la matriz poblacional de pesos factoriales, y Φ es la matriz poblacional de correlaciones factoriales. Posteriormente, se obtuvo la matriz de correlaciones reproducida (R_P) sustituyendo por unos la diagonal de R_R .

Por otro lado, se obtuvieron las matrices de datos muestrales de acuerdo al modelo factorial:

$$X_j = \lambda_{jm}Z_m + E_j, \quad (2)$$

donde X_j es la puntuación factorial de un sujeto en el ítem j , λ_{jm} es el peso o saturación de la variable j en el factor m , Z_m es una matriz de puntuaciones normales estandarizadas con tantas filas como sujetos simulados y tantas columnas como número de factores. La matriz Z_m incluye las puntuaciones en los rasgos latentes sustantivos (θ) y un factor de propensión a omitir (ξ). E_j es el error de medida del ítem j .

Generación de valores perdidos

Posteriormente, para generar los datos perdidos en las matrices de datos muestrales se utilizó un modelo basado en el de Holman y Glass (2005). En este modelo se sostiene que la pérdida de datos no ignorable está relacionada no solo con el nivel de habilidad del participante (θ), sino también con un rasgo latente de propensión a responder (u omitir) (ξ). Sean X una matriz de I personas y J variables, y D una matriz con las mismas dimensiones formada por variables dicotómicas (d_{ij}) que indican si cada valor x_{ij} ha sido observado ($d_{ij} = 0$) o perdido ($d_{ij} = 1$). En el modelo utilizado se simula la probabilidad de que un dato sea perdido mediante el modelo de Rasch (1960):

$$P(d_{ij} = 1 | \xi, b) = \frac{1}{1 + e^{-(\xi - b)}}, \quad (3)$$

donde ξ es un factor que indica la propensión a omitir y b es un parámetro de dificultad para la omisión. Se estableció el mismo valor de b para todos los ítems, 2.5, 1.65 o 1, para simular 10%, 20% y 30% de valores perdidos, respectivamente. El tipo de datos se manipuló, modificando la distribución conjunta de los rasgos latentes sustantivos y la propensión a omitir, $g(\xi_i, \theta_i | \phi)$, especificando para ello la correlaciones correspondientes entre los factores sustantivos, θ_i , y ξ_i : 0 y -0.6. El primer caso se corresponde con la condición MCAR, mientras que el segundo se corresponde con la condición MNAR. Nótese que la correlación en dicha condición es negativa, puesto cuanto mayor sea el nivel de habilidad de un sujeto, menor será su tendencia a omitir.

Aplicación del AP

El método AP se aplicó considerando las modificaciones que han mostrado un funcionamiento óptimo: el análisis de componentes principales (ACP) como método de extracción, la obtención de las matrices de datos aleatorias a partir de permutaciones de la matriz empírica, y el promedio de los autovalores de estas matrices para obtener los autovalores aleatorios. En su estudio de simulación, Velicer et al. (2000) apenas encontraron diferencias en el funcionamiento del AP utilizando 5 y 100 permutaciones, por lo que el uso de 20 permutaciones se consideró adecuado.

Por cuestiones de coste computacional, las matrices permutadas se calcularon sobre una única réplica en cada condición. Los autovalores aleatorios promedio obtenidos en esa réplica se utilizaban en todas las réplicas de esa condición. Un procedimiento similar se siguió en Garrido et al. (2013), que informan de la obtención de los mismos resultados que cuando se obtienen los autovalores aleatorios para cada réplica por separado.

Evaluación del Funcionamiento del AP

Para conocer mejor el funcionamiento de las variantes de AP para valores perdidos se evaluaron dos aspectos: (a) la precisión de cada método de tratamiento de los valores perdidos para decidir la dimensionalidad con AP, y (b) la eficiencia de los métodos de tratamiento de pérdida de datos al obtener la matriz de correlaciones.

La precisión de cada método de AP se evaluó mediante tres medidas de eficacia de la recuperación de los factores simulados: la proporción de estimaciones correctas o aciertos (PC), el error medio o sesgo (EM), y la raíz del error cuadrático medio (*Root Mean Square Error*; RMSE). Estos criterios se calcularon para cada una de las réplicas y, posteriormente, se promediaron para obtener una única medida por cada combinación factorial. Todos ellos proporcionan información complementaria:

$$PC = \frac{\sum C}{N_s}, \text{ para } C = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\beta} = \beta \\ 0 & \text{si } \hat{\beta} \neq \beta \end{cases}, \quad (4)$$

$$EM = \frac{\sum(\hat{\beta} - \beta)}{N_s}, \quad (5)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum(\hat{\beta} - \beta)^2}{N_s}} \quad (6)$$

donde N_S es el número de réplicas (i.e., 20), $\hat{\beta}$ es el número de factores estimado mediante el procedimiento de AP, y β es el número de factores poblacionales (simulados).

La PC oscila entre 0 y 1, indicando 0 una falta completa de precisión y 1 precisión perfecta. El EM puede tomar valores negativos y positivos, indicando 0 la ausencia completa de sesgo, y valores por encima y por debajo de 0 un número de factores sesgado de forma positiva o negativa, respectivamente. Esta medida no puede utilizarse como única fuente para evaluar la precisión puesto que los errores al obtener un número menor o mayor de factores del que se simuló pueden compensarse unos con otros, produciendo un resultado de falsa precisión. Por ello, se empleó también el RMSE, el cual toma valores de 0 o mayores, indicando 0 una precisión perfecta mientras que a medida que aumenta su valor, menor será la precisión.

Además, se obtuvo la eficiencia relativa (ER) de los métodos clásicos de tratamiento de valores perdidos con respecto a FIML. Este indicador se obtiene como el cociente entre el error cuadrático medio que se comete al estimar las correlaciones por los métodos clásicos (LD o PD) y el error cuadrático medio que se comete al utilizar FIML. Por ejemplo, la eficiencia relativa al comparar PD y FIML se obtiene como:

$$ER(PD/FIML) = \frac{\sum(r_P - r_{PD})^2}{\sum(r_P - r_{FIML})^2}, \quad (7)$$

donde en el numerador es la suma de las diferencias cuadráticas entre las correlaciones poblacionales y las correlaciones estimadas por PD, mientras que el denominador es la suma de las diferencias cuadráticas entre las correlaciones poblacionales y las estimadas por FIML. Valores por encima de 1 indican una mayor eficiencia por parte de FIML.

Para generar los datos simulados y obtener las medidas de precisión y eficiencia se utilizó el software de libre distribución R en su versión 3.1.2 (R Core Team, 2014). Entre los paquetes utilizados se encuentran *psych* (Revelle, 2015) y *lavaan* (Rosseel, 2012).

Análisis de Datos

Para evaluar la precisión del AP y qué factores repercuten en esta, se realizó un análisis de varianza (ANOVA) de medidas repetidas utilizando la matriz de correlaciones analizada (completa, obtenida por PD, obtenida por LD, obtenida por FIML) como variable intrasujetos, los siete factores manipulados como variables intersujetos, y el RMSE como variable dependiente. Posteriormente, se realizó un

ANOVA para cada procedimiento de AP con el fin de evaluar la repercusión que tiene cada factor intersujetos en el funcionamiento individual de cada variante. En el ANOVA no se incluyó la condición unidimensional puesto que para esas condiciones no se puede considerar la correlación entre factores como variable independiente.

De igual manera, se realizó un análisis de varianza para organizar los resultados referentes a la eficiencia de los métodos de tratamiento de los valores perdidos, donde se utilizó como variable dependiente la eficiencia y como variables independientes los factores manipulados.

Para llevar a cabo estos análisis se utilizó el paquete estadístico SPSS en su versión 21 (IBM Corp, 2012). Los gráficos fueron obtenidos con R en su versión 3.1.2 (R Core Team, 2014).

Resultados

Los resultados se exponen en dos bloques diferenciados atendiendo a: (a) la precisión de los métodos de AP estudiados, y (b) la eficiencia de los métodos de tratamiento de valores perdidos al obtener la matriz de correlaciones.

Precisión del AP

Al utilizar el método de LD se obtuvieron 59 matrices de datos completamente vacías (sin ningún caso completo) de un total de 22.680 muestras simuladas. Dichas matrices se obtuvieron en su mayoría en la condición multidimensional con tamaños muestrales bajos (200), una estructura factorial compleja (6 factores), un número alto de variables por factor (8), con pesos factoriales de tamaño bajo (.4) o medio (.55), y una proporción elevada de valores perdidos (30%). Sin embargo, aunque esta cantidad supone un porcentaje despreciable, el número de casos en promedio para cada condición disminuye a medida que hay una mayor proporción de valores perdidos (ver Tabla 2).

Tabla 2

Número medio de sujetos en cada combinación de tamaño muestral y porcentaje de valores perdidos tras aplicar LD

VPERD	N		
	200	500	2000
10%	54	134	538
20%	24	60	241
30%	11	27	108

Nota. N = tamaño muestral; VPERD = porcentaje de valores perdidos.

De esta manera, en las condiciones con tamaños muestrales pequeños (200) y adecuados (500), tras aplicar LD se dispone de un número demasiado bajo de sujetos con información completa. Con tamaños muestrales grandes (2.000) sucede lo mismo cuando la proporción de valores perdidos es elevada (30%). Puesto que se sabe que la precisión del AP se ve afectada con tamaños muestrales pequeños, en los resultados de precisión y eficiencia no se utilizaron los datos referentes a LD por presentar un funcionamiento pésimo en la mayoría de condiciones. Únicamente quedaba un número de sujetos que pudiera ser adecuado para el AP en las combinaciones de 2000 sujetos y porcentajes bajos (10%) y medios (20%) de valores perdidos.

Con el método de AP-PD se obtuvieron 325 matrices que no eran definidas positivas, si bien el porcentaje sobre el total de réplicas simuladas (19,440) fue muy pequeño (0,01%).

En la Tabla 3 se recogen los resultados referentes a la precisión de los distintos procedimientos de AP atendiendo al tipo de mecanismo y al porcentaje de datos perdidos. De manera general, puede observarse que el funcionamiento de AP-FIML y AP-PD no se ve afectado por el tipo de mecanismo de pérdida de datos (e.g., para AP-FIML, con 30% de valores perdidos y mecanismos MCAR y MNAR respectivamente, $PC[AP-FIML_{MCAR-30\%}] = PC[AP-FIML_{MNAR-30\%}] = 0.78$), si bien parece que AP-PD parece funcionar ligeramente mejor en las condiciones MNAR con mayor porcentaje de valores perdidos (e.g., en las condiciones de MCAR y MNAR respectivamente, $PC[AP-PD_{MCAR-20\%}] = 0.83 < 0.85 = PC[AP-PD_{MNAR-20\%}]$). Además, la precisión de las variantes de AP-PD y AP-FIML sí se ve afectada por el aumento de la proporción de valores perdidos respecto al funcionamiento del AP con datos completos. En ambos casos, a medida que aumenta el porcentaje de valores perdidos, disminuye la precisión de los procedimientos (e.g., para AP-FIML en la condición de MCAR con 20% y 30%

de valores perdidos, $PC[AP-FIML_{MCAR-20\%}] = 0.83 > 0.78 = PC[AP-FIML_{MCAR-30\%}]$. Con proporciones bajas y medias de valores perdidos, AP-PD y AP-FIML muestran una precisión similar (e.g., $RMSE[AP-PD_{MNAR-10\%}] = 0.32 \approx 0.35 = RMSE[AP-FIML_{MNAR-10\%}]$, en la condición de MNAR), pero con un porcentaje elevado de valores perdidos AP-PD es más preciso que AP-FIML (e.g., en la condición de MNAR, $RMSE[AP-PD_{MNAR-30\%}] = 0.48 < 0.61 = RMSE[AP-FIML_{MNAR-30\%}]$). Por otro lado se observa que todos los métodos de AP tienden a estimar un número más bajo de factores del que realmente se ha simulado en cualquier condición de pérdida, siendo más marcada esta tendencia a medida que aumenta la proporción de valores perdidos (e.g., para AP-FIML en la condición de MCAR, $EM[AP-FIML_{MCAR-10\%}] = -0.25 > -0.34 = EM[AP-FIML_{MCAR-20\%}]$). Además, FIML tiende a estimar un número menor de factores en mayor grado que PD, siendo esto más notable cuando hay una proporción alta de valores perdidos que no pueden ignorarse ($EM[AP-PD_{MNAR-30\%}] = -0.29 > -0.46 = EM[AP-FIML_{MNAR-30\%}]$).

Tabla 3

Precisión del análisis paralelo en función del tipo y porcentaje de valores perdidos (los resultados para la matriz completa de datos se presentan como línea base)

		MCAR			MNAR		
Método		10%	20%	30%	10%	20%	30%
PC	AP-C	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	0.88
	AP-PD	0.86	0.83	0.80	0.86	0.85	0.82
	AP-FIML	0.86	0.83	0.78	0.86	0.83	0.78
EM	AP-C	-0.18	-0.18	-0.18	-0.19	-0.17	-0.20
	AP-PD	-0.23	-0.29	-0.36	-0.19	-0.22	-0.29
	AP-FIML	-0.25	-0.34	-0.48	-0.24	-0.30	-0.46
RMSE	AP-C	0.28	0.27	0.27	0.29	0.26	0.29
	AP-PD	0.34	0.41	0.52	0.32	0.38	0.48
	AP-FIML	0.36	0.45	0.63	0.35	0.44	0.61

Nota. MCAR = missing completely at random; MNAR = missing not at random; PC = proporción de estimaciones correctas; EM = error medio o sesgo; RMSE = error de la raíz cuadrática media; AP-C = análisis paralelo aplicado a la matriz de correlaciones completa; AP-FIML = análisis paralelo basado en full information maximum likelihood; AP-PD = análisis paralelo basado en pairwise deletion.

Se realizó un ANOVA de medidas repetidas con el fin de evaluar la precisión de las distintas variantes de AP para valores perdidos. Se incluyó el procedimiento que utilizaba la matriz de correlaciones obtenida a partir de los datos completos (AP-C) para comparar su funcionamiento con el de los métodos de AP para valores perdidos. Gran parte de los efectos fueron significativos debido al uso de un tamaño muestral elevado. Para cuantificar el tamaño del efecto, se utilizó la medida de eta cuadrado parcial (η_p^2). Atendiendo al criterio establecido por Cohen (1988), valores de 0.01, 0.06 y 0.14 indican, respectivamente, efectos de tamaño pequeño, medio y grande. Así, el tipo de método de tratamiento de valores perdidos empleado para obtener la matriz de correlaciones tuvo un tamaño del efecto grande ($\eta_p^2 = 0.61$). En relación a las interacciones con los factores intersujetos, cuatro de ellas relacionadas con la proporción de valores perdidos alcanzaron tamaños del efecto por encima de 0.14: AP \times VPERD ($\eta_p^2 = 0.32$), AP \times N \times VPERD ($\eta_p^2 = 0.23$), AP \times NFAC \times VPERD ($\eta_p^2 = 0.21$), y AP \times NFAC \times VPERD \times N ($\eta_p^2 = 0.16$). Puesto que la interacción doble (AP \times VPERD) y las dos interacciones triples (AP \times N \times VPERD y AP \times NFAC \times VPERD) están incluidas en la interacción cuádruple (AP \times NFAC \times VPERD \times N), a continuación se expone esta interacción de orden superior.

La interacción cuádruple AP \times NFAC \times VPERD \times N se recoge en la Figura 1. Por un lado, se observa que a medida que aumenta el número de factores del modelo, se produce una pérdida de precisión tanto con las matrices de datos completas como para las matrices con datos perdidos. Además, puede observarse como a medida que aumenta el porcentaje de valores perdidos, el AP resulta menos preciso, siendo mayor el error en el caso de AP-FIML. Este efecto es mayor cuanto mayor es el número de factores y menor es el tamaño de la muestra. Sin embargo, el efecto del número de factores, de la pérdida de datos y del método de tratamiento de estos, se reduce a medida que se incrementa el tamaño muestral.

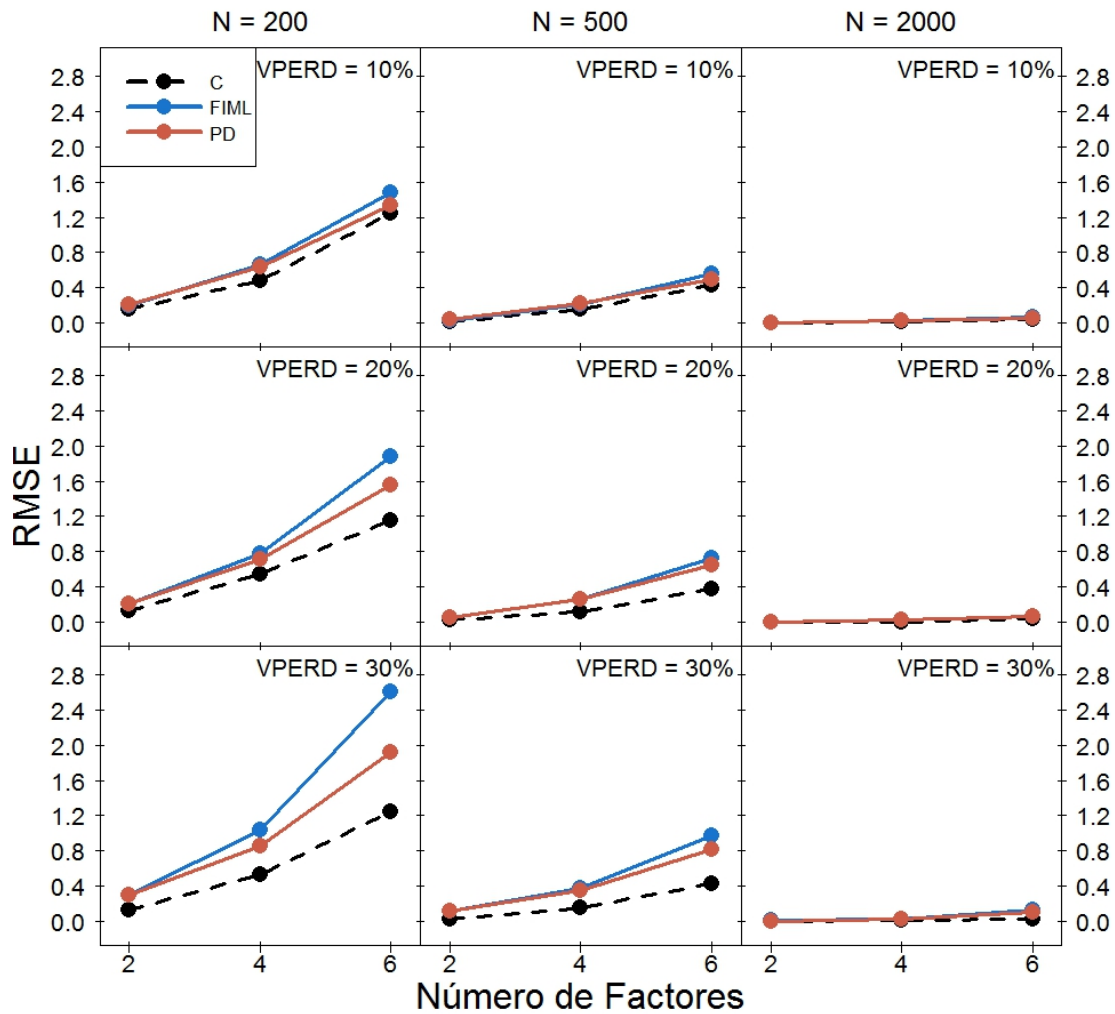


Figura 1. Interacción cuádruple de AP \times NFAC \times VPERD \times N con RMSE como variable dependiente. VPERD = porcentaje de valores perdidos; N = tamaño muestral. C = AP con datos completos; FIML = AP basado en full information maximum likelihood; PD = AP basado en pairwise deletion.

En la Tabla 4 se muestran los tamaños del efecto para los factores principales en cada uno de los ANOVAs, aplicado a las condiciones con datos completos e incompletos, diferenciando según el método de tratamiento de los valores perdidos. No se incluyen los valores para el factor mecanismo puesto que no tuvo un efecto estadísticamente significativo. Las variables que tuvieron un mayor tamaño del efecto fueron el tamaño muestral, el número de factores y los pesos.

Tabla 4

Tamaños del Efecto de los Análisis de Varianza para Cada Método de Análisis Paralelo

Método AP	N	NFAC	VARFAC	PESOS	CORFAC	VPERD
AP-C	0.22	0.16	0.08	0.19	0.09	-
AP-PD	0.28	0.21	0.08	0.26	0.11	0.02
AP-FIML	0.29	0.24	0.06	0.22	0.11	0.03

Nota. N = tamaño muestral; NFAC = número de factores; VARFAC = número de variables por factor; CORFAC = correlación entre factores; VPERD = porcentaje de valores perdidos; AP-C = análisis paralelo para datos completos; AP-FIML = análisis paralelo basado en máxima verosimilitud; AP-PD = análisis paralelo basado en pairwise deletion.

En el caso del tamaño muestral, el impacto fue similar en ambas variantes de AP para valores perdidos ($\eta_{P-PD}^2 = 0.28 \approx 0.29 = \eta_{P-FIML}^2$), mientras que el número de factores parece afectar en mayor grado al AP-FIML ($\eta_{P-FIML}^2 = 0.24 > \eta_{P-PD}^2 = 0.21$), y el tamaño de los pesos factoriales al AP-PD ($\eta_{P-PD}^2 = 0.26 > \eta_{P-FIML}^2 = 0.22$). Por otro lado, las variables restantes mostradas en la tabla tuvieron un efecto medio (correlaciones entre factores, $\eta_P^2 = 0.11$ para ambos métodos; número de variables por factor, $\eta_{P-PD}^2 = 0.08$ y $\eta_{P-FIML}^2 = 0.06$) o pequeño (proporción de valores perdidos, $\eta_{P-PD}^2 = 0.02$, $\eta_{P-FIML}^2 = 0.03$).

En la tabla 5 se presenta el funcionamiento de cada variante de AP para valores perdidos en cada uno de los niveles de las variables independientes. Aquí se presentan los resultados para la condición unidimensional en el correspondiente apartado del número de factores. AP-FIML y AP-PD mostraron una gran precisión con tamaños muestrales elevados, menor número de factores, factores bien definidos (número alto de indicadores por factor, saturaciones altas), correlaciones moderadas entre factores, y una proporción baja de valores perdidos. Así, su funcionamiento en dichas condiciones es similar. El mecanismo de pérdida no parece ser un factor que afecte de forma importante a la precisión de ambos métodos.

Tabla 5

Precisión de los Métodos de AP para Valores Perdidos Para Cada Uno de los Niveles de las Variables Independientes

Método	N			NFAC			VARFAC			PESOS			CORFAC		MECANISMO		VPERD			
	200	500	2,000	1	2	4	6	4	6	8	0.4	0.55	0.7	0.3	0.5	MCAR	MNAR	10%	20%	30%
PC																				
AP-C	0.75	0.92	0.99	1	0.98	0.89	0.79	0.81	0.90	0.94	0.75	0.92	0.98	0.95	0.83	0.89	0.88	0.89	0.89	0.88
AP-PD	0.66	0.87	0.99	0.99	0.95	0.84	0.72	0.76	0.86	0.90	0.67	0.88	0.96	0.91	0.77	0.83	0.84	0.86	0.84	0.81
AP-FIML	0.62	0.86	0.98	0.99	0.95	0.83	0.68	0.75	0.85	0.88	0.65	0.86	0.95	0.90	0.75	0.82	0.82	0.86	0.83	0.78
EM																				
AP-C	-0.42	-0.13	-0.01	0.00	-0.01	-0.13	-0.41	-0.35	-0.14	-0.06	-0.39	-0.13	-0.03	-0.04	-0.33	-0.18	-0.19	-0.18	-0.18	-0.19
AP-PD	-0.58	-0.20	-0.02	0.01	0.00	-0.19	-0.60	-0.47	-0.22	-0.10	-0.53	-0.21	-0.06	-0.06	-0.46	-0.29	-0.24	-0.21	-0.25	-0.33
AP-FIML	-0.77	-0.23	-0.02	0.01	-0.01	-0.23	-0.79	-0.54	-0.29	-0.20	-0.66	-0.28	-0.09	-0.12	-0.57	-0.36	-0.33	-0.24	-0.32	-0.47
RMSE																				
AP-C	0.62	0.19	0.01	0.02	0.05	0.22	0.55	0.47	0.22	0.14	0.60	0.18	0.05	0.12	0.43	0.27	0.28	0.28	0.26	0.28
AP-PD	0.86	0.33	0.03	0.04	0.10	0.34	0.78	0.63	0.35	0.25	0.85	0.28	0.09	0.22	0.60	0.42	0.39	0.33	0.39	0.50
AP-FIML	1.02	0.36	0.04	0.04	0.10	0.38	0.94	0.69	0.41	0.32	0.93	0.36	0.13	0.25	0.70	0.48	0.47	0.36	0.44	0.62

Nota. N = tamaño muestral; NFAC = número de factores; VARFAC = número de variables por factor; CORFAC = correlación entre factores; VPERD = porcentaje de valores perdidos; MCAR = missing completely at random; MNAR = missing not at random; PC = proporción de estimaciones correctas; EM = error medio o sesgo; RMSE = error de la raíz cuadrática media; AP-C = análisis paralelo para datos completos; AP-FIML = análisis paralelo basado en máxima verosimilitud; AP-PD = análisis paralelo basado en pairwise deletion.

Todas las variantes de AP para valores perdidos muestran una tendencia a estimar menos dimensiones de las que se simularon. Esto es más notable especialmente cuanto mayor es el número de factores, cuando estos están estrechamente relacionados, o además hay una proporción elevada de valores perdidos (e.g., para AP-FIML con 200 casos, 6 factores, 4 variables, saturaciones de 0.4, correlación entre factores de 0.5, y 30% de valores perdidos, $EM[AP-FIML] = -0.77, -0.79, -0.54, -0.66, -0.57$ y -0.47 , respectivamente).

En resumen, para cada una de las variantes de AP se observan los valores más altos y más bajos de precisión en las variables independientes que repercuten de manera importante (Tabla 4) en el funcionamiento de cada procedimiento (e.g., para tamaños muestrales de 200 y 2,000, $PC[AP-FIML] = 0.62$ y 0.98 , respectivamente, siendo los valores más bajos y más altos de precisión para este procedimiento).

Eficiencia

A continuación se recogen los resultados de la eficiencia relativa de PD y FIML. Los resultados para LD no se exponen puesto que, tal y como se especificó en el apartado anterior, al utilizarse dicho método se perdían demasiados sujetos en la mayoría de condiciones del diseño. Esto ya indica que LD va a estar notablemente más sesgado que FIML, como se ha encontrado en investigaciones previas.

En la Tabla 6 se presentan los resultados de eficiencia relativa global al obtener las matrices de correlaciones con los dos métodos de tratamiento de valores perdidos, PD y FIML. De forma global, puede observarse que tanto FIML como PD presentan un funcionamiento similar cuando el mecanismo es MCAR, si bien FIML parece ser ligeramente más eficiente, especialmente cuando aumenta la proporción de valores perdidos (e.g., $ER[PD/FIML_{MCAR-20\%}] = 1.05 > 1.03 = ER[PD/FIML_{MCAR-10\%}]$). Estas diferencias entre procedimientos se acentúan en presencia de valores perdidos no ignorables (mecanismo MNAR). Además, en este caso se observa de manera mucho más clara como se va incrementando la superioridad de FIML sobre PD a medida que hay más valores perdidos.

Tabla 6

Eficiencia relativa global de PD con respecto a FIML al estimar las matrices de correlaciones con valores perdidos

VPERD	MCAR	MNAR
10%	1.03	1.15
20%	1.05	1.24
30%	1.06	1.27

Nota. VPERD = porcentaje de valores perdidos; MCAR = missing completely at random; MNAR = missing not at random.

Con el fin de conocer más detalladamente el funcionamiento de FIML y PD, se realizó un ANOVA para estudiar qué factores repercuten al recuperar la matriz de correlaciones. De nuevo, gran parte de los efectos alcanzaron la significación estadística. Así, el tamaño muestral ($\eta_p^2 = 0.96$), el número de variables por factor ($\eta_p^2 = 0.17$), los pesos factoriales ($\eta_p^2 = 0.98$), el mecanismo de pérdida de datos ($\eta_p^2 = 0.95$), y la proporción de valores perdidos ($\eta_p^2 = 0.74$), tuvieron tamaños del efecto grandes siguiendo el criterio de Cohen (1988). A su vez, el número de factores tuvo un tamaño del efecto pequeño ($\eta_p^2 = 0.02$). Además, se destacan cinco interacciones importantes por su tamaño del efecto: $N \times \text{VARFAC} \times \text{VPERD}$, ($\eta_p^2 = 0.17$), $N \times \text{NFAC} \times \text{VPERD}$ ($\eta_p^2 = 0.21$), $\text{MECANISMO} \times \text{PESOS} \times \text{VPERD} \times N$ ($\eta_p^2 = 0.37$), $\text{MECANISMO} \times \text{PESOS} \times \text{NFAC} \times N$ (0.14), y $\text{MECANISMO} \times \text{PESOS} \times \text{VARFAC} \times N$ ($\eta_p^2 = 0.14$). Además, se incluye la interacción de $\text{VPERD} \times \text{VARFAC} \times \text{NFAC} \times N$ por tener un tamaño del efecto medio ($\eta_p^2 = 0.07$), y por incluir las dos interacciones triples anteriormente mencionadas. Aunque todas estas interacciones son relevantes para los objetivos del presente trabajo, debido a las limitaciones de espacio se van a exponer con mayor detalle únicamente dos de ellas: por un lado, $\text{MECANISMO} \times \text{PESOS} \times \text{VPERD} \times N$ por ser la de mayor tamaño del efecto; por otro, $\text{VPERD} \times \text{VARFAC} \times \text{NFAC} \times N$ por explicar las dos interacciones triples de gran tamaño.

Atendiendo a la interacción $\text{MECANISMO} \times \text{PESOS} \times \text{VPERD} \times N$ (Figura 2), inicialmente puede observarse que, a medida que aumenta el tamaño de los pesos, FIML parece ser más eficiente que PD cuando el mecanismo de pérdida es MNAR, o lo que es lo mismo, la matriz de correlaciones obtenida por PD parece estar más sesgada que la obtenida por FIML cuando la pérdida de datos no puede ignorarse. Este funcionamiento superior por parte de FIML se ve de manera mucho más clara a medida que aumenta la proporción de valores perdidos, alcanzando su valor máximo con tamaños muestrales

grandes. La línea discontinua señala el valor de 1 para la eficiencia relativa. Valores por encima de 1 indican un mejor funcionamiento por parte de FIML.

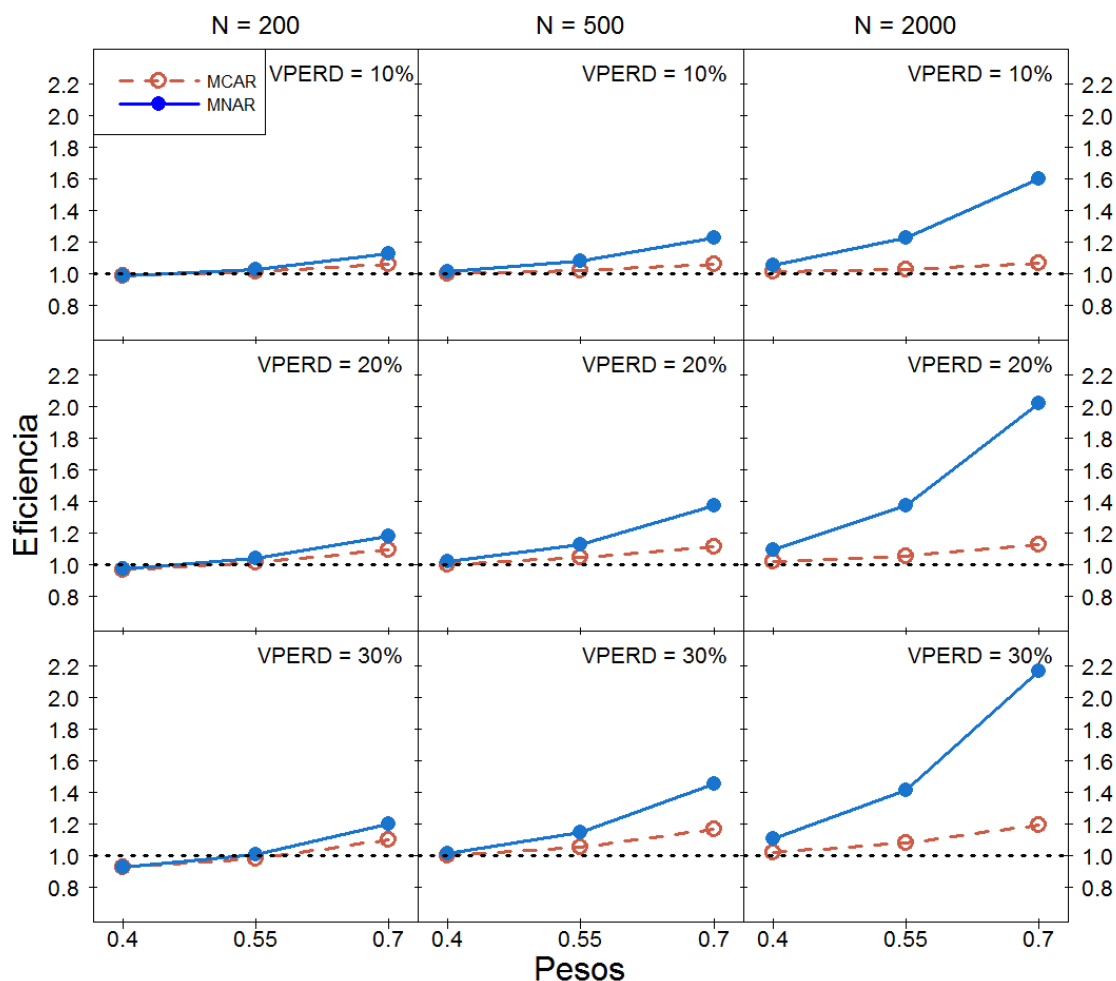


Figura 2. Interacción cuádruple de MECANISMO \times PESOS \times VPERD \times N con la eficiencia relativa como variable dependiente. VPERD = porcentaje de valores perdidos; N = tamaño muestral; MCAR = missing completely at random; MNAR = missing not at random.

Por otro lado, se presenta la interacción VPERD \times VARFAC \times NFAC \times N (Figura 3). Se observa como la eficiencia de FIML con una proporción elevada de valores perdidos disminuye con tamaños muestrales pequeños, a medida que hay más factores y la estructura está mejor definida (la ratio variables por factor es mayor). Esto puede explicarse debido a que, con muchos factores, y poco tamaño muestral, la eficiencia de FIML se ve afectada. Esto deja de suceder a medida que aumenta el tamaño muestral, funcionando de manera más eficiente FIML cuanto mejor definido

está cada factor. La línea discontinua señala el valor de 1 para la eficiencia relativa. Valores por encima de 1 indican un mejor funcionamiento por parte de FIML.

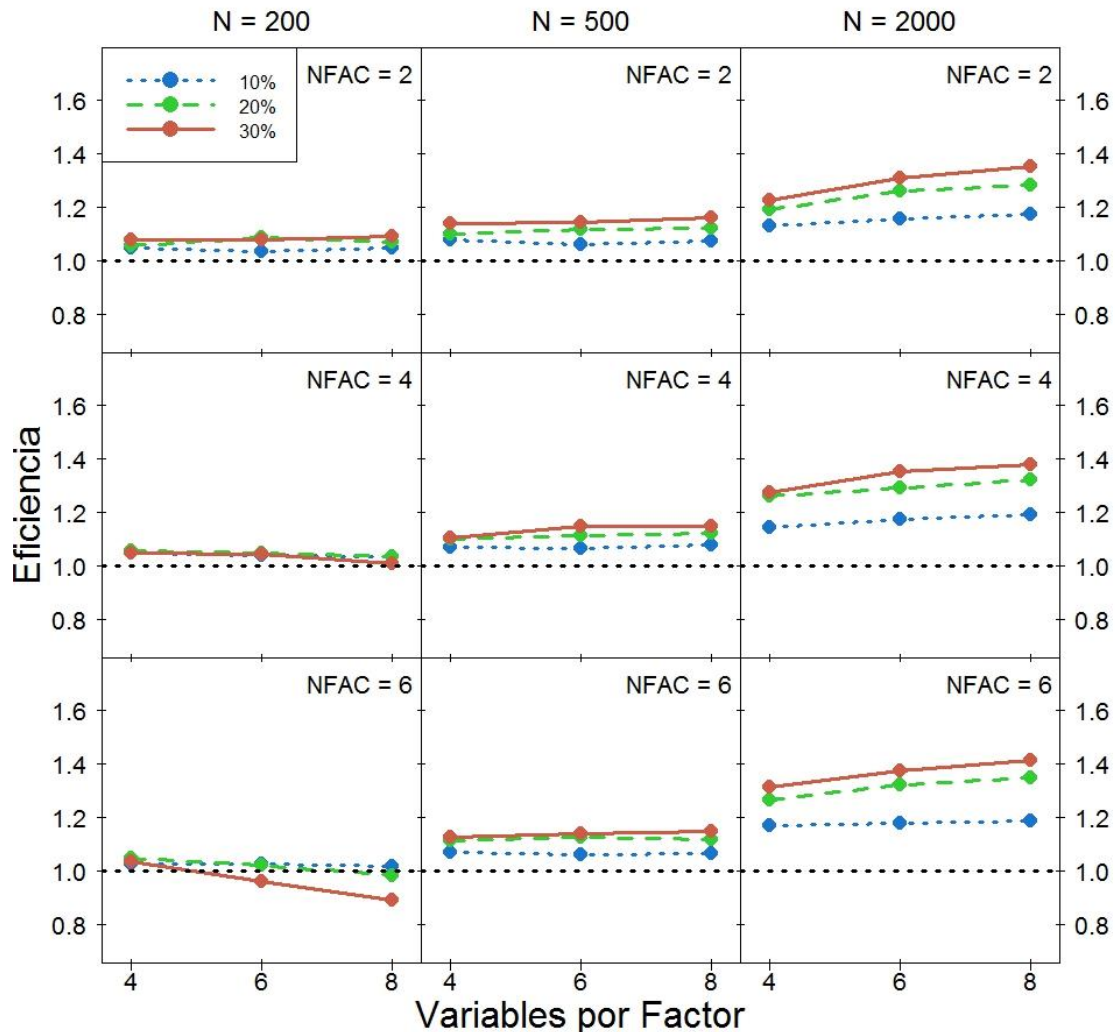


Figura 3. Interacción cuádruple de VPERD X VARFAC X NFAC X N con la eficiencia relativa como variable dependiente. NFAC = número de factores; N = tamaño muestral; MCAR = missing completely at random; MNAR = missing not at random.

Discusión

El análisis paralelo (AP) es un método ampliamente recomendado por su precisión para decidir el número de factores a retener durante la realización del AFE (Velicer et al., 2000; Zwick y Velicer, 1986). Sin embargo, su funcionamiento puede verse afectado cuando hay datos perdidos en la matriz de respuestas, y esto no ha sido estudiado previamente. El presente estudio ha revisado los métodos que se utilizan para tratar los valores perdidos en algunos paquetes estadísticos que permiten aplicar el AP.

A pesar de que actualmente se dispone de métodos sofisticados para trabajar cuando hay pérdida de datos, es habitual optar por procedimientos clásicos que, aunque son sencillos de utilizar, no tienen ninguna base teórica (Wothke, 2000). Por ello, se han evaluado tres variantes de AP basadas en algunos de estos métodos de tratamiento de valores perdidos: *listwise deletion* (LD), *pairwise deletion* (PD) y *full information maximum likelihood* (FIML).

El presente estudio tenía como objetivo principal evaluar estos métodos de AP para valores perdidos con el fin de aportar herramientas que permitieran determinar la dimensionalidad adecuada en presencia de valores perdidos. En relación a esto, hay que destacar dos aportaciones relevantes. Por un lado, se encontró que los métodos de AP basados en PD y en FIML se ven afectados por la proporción de datos perdidos pero no por el mecanismo de pérdida. De esta manera, a medida que aumenta la proporción de valores perdidos en la matriz de respuestas, la precisión de ambos procedimientos se aleja del funcionamiento del AP con datos completos. Por otra parte y en contraposición a una de las hipótesis formuladas, en ciertas condiciones el AP basado en PD, un método clásico, tiene un funcionamiento más preciso que AP-FIML, un método más sofisticado. Esto sucede principalmente con tamaños muestrales pobres (200), mayor número de factores (6 factores) y porcentajes medios-altos de valores perdidos (20-30%). A medida que aumenta el tamaño muestral, las diferencias entre ambos métodos se reducen, siendo igual de precisos en condiciones con gran cantidad de información (tamaños muestrales elevados y cualquier porcentaje de datos perdidos). En relación a la variante de AP-PD, hay que mencionar que las matrices no eran definidas positivas en algunos casos. Este resultado va en la línea de investigaciones previas (e.g., Enders y Bandalos, 2001). Es habitual que al utilizar PD se obtengan matrices que no son definidas positivas; esto puede ocasionar problemas en algunos contextos, como es el de los modelos de ecuaciones estructurales, en donde dificultan la identificación de un modelo (Wothke, 1993).

En relación al método AP-LD, el presente estudio muestra que no es una alternativa viable, dado que el número de sujetos disponible se reduce drásticamente al aumentar la proporción de valores perdidos. Arbuckle (1996) ya encontró que, con tamaños muestrales pequeños (145 sujetos) y una proporción elevada de valores perdidos (30%), había problemas de estimación en algunas réplicas al utilizar LD, obteniendo valores de eficiencia elevados a favor de FIML. Por ello, no se incluyeron

los resultados de LD en los ANOVAs, puesto que el AP no podría obtener soluciones óptimas con tamaños muestrales tan bajos en la mayoría de condiciones del estudio.

Por otro lado, en relación al impacto que tienen las variables incluidas así como sus interacciones en la precisión de los métodos de AP para valores perdidos, se encontraron diversos resultados de especial relevancia. Como ya se ha esbozado previamente, se encontraron grandes diferencias entre el funcionamiento de los distintos métodos de AP evaluados ($\eta_p^2 = 0.61$). Los métodos de AP para valores perdidos muestran un patrón de comportamiento similar al procedimiento para datos completos, si bien su funcionamiento se ve afectado por la pérdida de datos especialmente cuando el número de factores es elevado y/o el tamaño muestral es pequeño. En relación a este resultado, cabe decir que el tamaño muestral parece tener un efecto especialmente importante puesto que, a medida que aumenta el tamaño muestral, el funcionamiento de ambos procedimientos es similar. Este resultado es congruente con la importancia que ha mostrado tener el tamaño muestral a la hora de determinar la dimensionalidad en los estudios de AP con datos completos (e.g., Beauducel, 2001; Garrido et al., 2013). Aun así hay que ser cauteloso al interpretar estos resultados puesto que, como se ha dicho, PD como método de tratamiento de valores perdidos produce estimaciones sesgadas en algunos contextos. A priori, el AP-PD puede parecer una buena opción para determinar el número de factores a retener en el AFE cuando hay valores perdidos y se está trabajando con muestras pequeñas. Sin embargo, habría que ver qué sucedería al usar la matriz de correlaciones muestral obtenida por PD en otros contextos, por ejemplo, al recuperar los pesos factoriales en un modelo de ecuaciones estructurales simulado.

En relación a los ANOVAs individuales realizados para cada método de AP, es llamativo como las variables de valores perdidos tienen un efecto pequeño (en el caso de la proporción) o nulo (en el caso del mecanismo) en su funcionamiento. Otras variables como el tamaño muestral, el número de factores y los pesos mostraron efectos importantes, tal y como han señalado investigaciones previas de AP con datos completos (Beauducel, 2001; Velicer et al., 2000; Zwick y Velicer, 1986).

Otro objetivo que se planteaba en este trabajo hacía referencia a la eficiencia de los métodos de tratamiento de valores perdidos a la hora de obtener la matriz de correlaciones de la que, posteriormente, el AP extraerá los autovalores.

En relación a los factores que afectan a la eficiencia de PD y FIML, se encontraron tamaños del efecto grandes para el tamaño muestral, el número de variables por factor, los pesos factoriales, el mecanismo de pérdida de datos y la proporción de

valores perdidos. En este caso, el número de factores, aunque significativo, tuvo un tamaño del efecto pequeño. Destacan los efectos importantes de dos variables: el mecanismo de pérdida y el tamaño muestral. En relación al mecanismo de pérdida, FIML muestra una mayor eficiencia al recuperar la matriz de correlaciones muestral con datos MNAR, especialmente cuando aumenta el valor de los pesos factoriales y el tamaño muestral. Este resultado va en la línea del estudio de Arbuckle (1996), el cual encontró que, en condiciones de pérdida MCAR, FIML apenas era superior a PD, pero cuando no es completamente aleatoria (en su caso, MAR), las diferencias a favor de FIML eran más notables. Además, este autor también encontró que la eficiencia de FIML aumenta a medida que se incrementa la proporción de valores perdidos. En el estudio presentado se llega a la misma conclusión, y además se observa que el aumento del tamaño muestral también contribuye a una mayor eficiencia de FIML. En relación a esto último, hay que mencionar que en las investigaciones previas se utilizaron tamaños muestrales con un número máximo de 500 o 750 casos (Arbuckle, 1996; Enders, 2001; Enders y Bandalos, 2001; Wothke, 2000) y encuentran ganancias modestas en eficiencia (en torno al 5%). Atendiendo a los resultados de la presente investigación, parece que la diferencia entre la eficiencia de FIML y PD puede verse incrementada con mayores tamaños muestrales.

Para interpretar de forma conjunta los resultados de precisión de AP y de eficiencia de los métodos de tratamiento de valores perdidos hay que recordar que cada bloque de datos recoge información de procedimientos diferentes. Por un lado, la precisión hace referencia al número de veces que el AP determina correctamente la dimensionalidad subyacente a un conjunto de datos, mientras la eficiencia relativa se refiere al error que comete un método de tratamiento de valores perdidos al compararlo con otro procedimiento. Puesto que ambas variables hacen referencia a conceptos distintos, la información que aportan es claramente diferente, sin implicar que no pueda ir en la misma dirección.

El presente trabajo consta de algunas limitaciones que deben tenerse en cuenta al extraerse conclusiones generales. En primer lugar, durante el proceso de simulación, no pudieron generarse factores ortogonales. Esto se debe a que, para obtener valores perdidos MNAR, se establecía una correlación alta con el factor de propensión a omitir del modelo de Holman y Glas (2005), obteniéndose como resultado matrices que no eran definidas positivas. Esto indicaba que, en dicha condición, era imposible simular matrices de datos con una estructura factorial realista (es inviable que varios factores no

guarden ningún grado de relación entre sí, pero sí lo hagan con otro factor). Por ello, se decidió no incluir la condición de correlación nula entre factores.

Por otro lado, se simularon escenarios de pérdida ignorable y no ignorable perfectos, esto es, en cada matriz de datos solo podía darse uno de estos mecanismos. Esto se hizo así puesto es la manera habitual de generar valores perdidos en los estudios de simulación porque permite conocer el tipo de pérdida de datos. Sin embargo, en el ámbito aplicado lo más probable es que se encuentren simultáneamente en la misma base de datos valores perdidos mediante diversos mecanismos. Así lo expresan autores como Yuan y Bentler (2000), siendo habitual que no se pueda determinar el tipo de pérdida que tiene lugar.

Además, el tiempo de cálculo de la matriz de correlaciones por FIML era demasiado elevado en las condiciones en las que las matrices de datos eran de mayor tamaño y había una proporción elevada de valores perdidos. Esto se debe al gran coste computacional del algoritmo EM cuando hay un número elevado de casos y/o un número alto de patrones de pérdida de datos (Arbuckle, 1996). Por ello, se tuvo que optimizar la simulación obteniendo los autovalores aleatorios de cada combinación factorial para una de las réplicas, tal y como hicieron Garrido et al. (2013). Previamente se realizó un estudio piloto obteniendo los autovalores aleatorios para cada una de las réplicas de cada condición, y no se encontraron diferencias importantes respecto a la simulación optimizada. Aun así, el coste computacional para obtener 100 réplicas y generar 100 permutaciones al ejecutar el AP-FIML en cada una de esas réplicas seguía siendo elevado. Debido a las limitaciones de tiempo, se utilizaron 20 permutaciones durante la ejecución de las variantes de AP. Este número se consideró adecuado puesto que Velicer et al. (2000) encontraron un funcionamiento similar del AP al utilizar 5 y 100 permutaciones. De igual manera, se utilizaron 20 réplicas para cada combinación factorial. Aunque podría pensarse que es un número bajo de matrices de datos, lo cierto es que es adecuado para ver la tendencia de las variantes de AP, así como la eficiencia de los métodos de tratamiento de valores perdidos. Aumentar el número de réplicas puede ayudar a definir de manera más notable dicha tendencia.

En conclusión pueden resumirse de la siguiente manera las aportaciones realizadas en el presente trabajo:

1. Se propone una variante (AP-FIML) para la realización del AP con valores perdidos. Esta variante no ha sido propuesta previamente y no se encuentra implementada en ningún paquete estadístico que aplique el AP.

2. Se compara la variante anterior con otra variante, AP-PD, que sí se haya incorporada en alguno de los software citado (i.e., librería *psych*), aunque su funcionamiento no ha sido testado previamente. El presente estudio muestra que AP-PD pudiera ofrecer soluciones adecuadas, especialmente con tamaños muestrales pequeños.
3. El número de factores, la proporción de valores perdidos y el tamaño muestral afectan a la precisión de las dos variantes de AP, sin que haya diferencias en función del tipo de mecanismo de pérdida de datos.
4. A pesar de los resultados obtenidos en relación al AP, FIML es en general más eficiente que PD al recuperar la matriz de correlaciones muestral. La eficiencia de FIML es mayor a medida que se incrementa el tamaño muestral, la proporción de valores perdidos y los pesos factoriales.

Si bien el principal objetivo de esta investigación es estudiar el funcionamiento de dos variantes de AP para valores perdidos, también se evalúa la eficiencia de dos métodos para tratar la pérdida de datos: FIML y PD. Investigaciones previas han simulado distintos contextos (modelos de ecuaciones estructurales, modelos de regresión, etc.,...), encontrándose resultados ambiguos en cuanto a la eficiencia relativa de estos métodos. Este trabajo constituye el inicio de una línea de investigación que se engloba dentro de dos áreas de conocimiento: el de la dimensionalidad, y el de los valores perdidos. Puesto que el AP recientemente está despertando interés en escenarios como el de las variables ordinales (e.g, Cho, Li, y Bandalos, 2009; Garrido, Abad y Ponsoda, 2013; Timmerman y Lorenzo-Seva, 2011; Weng y Cheng, 2005), esta investigación constituye un primer acercamiento para proponer herramientas que permitan determinar la dimensionalidad cuando hay valores perdidos.

Referencias

- Allison. (2012). Handling missing data by maximum likelihood. *SAS Global Forum: Statistics and Data Analysis*.
- Arbuckle, J. L. (1996). Full information estimation in the presence of incomplete data. En G. A. Marcoulides, & R. E. Schumacker (Edits.), *Advanced structural equation modeling* (págs. 243-277).
- Beauducel, A. (2001). Problems with parallel analysis in data sets with oblique simple structure. *MPR Online*, 6(2), 141–157.
- Beavers, A. S., Lounsbury, J. W., Richards, J. K., Huck, S. W., Skolits, G. J., & Esquivel, S. L. (2013). Practical considerations for using exploratory factor analysis in educational research. *Practical assessment, research and evaluation*, 18(3). Obtenido de <http://pareonline.net/getvn.asp?v=18&n=6>
- Buja, A., & Eyuboglu, N. (1992). Remarks on parallel analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 27, 509–540. doi:doi:10.1207/s15327906mbr2704_2
- Cho, S., Li, F., & Bandalos, D. (2009). Accuracy of the parallel analysis procedure with polychoric correlations. *Educational and Psychological Measurement*, 69, 748–759. doi:10.1177/0013164409332229
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2ª ed.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Crawford, A. V., Green, S. B., Levy, R., Lo, W., Scott, L., Svetina, D., & Thompson, M. S. (2010). Evaluation of parallel analysis methods for determining the number of factors. *Educational and Psychological Measurement*, 70, 885–901. doi:10.1177/0013164410379332
- Dinno, A. (2012). paran: Horn's Test of Principal Components/Factors. R package version 1.5.1. Obtenido de <http://CRAN.R-project.org/package=paran>
- Enders, C. K. (2001b). The performance of the maximum likelihood estimator in multiple regression models with missing data. *Educational and Psychological Measurement*, 61(5), 713-740.
- Enders, C. K. (2010). *Applied missing data analysis*. Nueva York: Guildford Press.

- Enders, C. K. (2013). Dealing with missing data in developmental research. *Child Development Perspectives, 7*(1), 27–31.
- Enders, C. K., & Bandalos, L. D. (2001). The Relative Performance of Full Information Maximum Likelihood Estimation for Missing Data in Structural Equation Models. *Educational Psychology Papers and Publications, Paper 64*.
- Fabrigar, L. R., Wegener, D. T., MacCallum, R. C., & Strahan, E. J. (1999). Evaluating the use of exploratory factor analysis in psychological research. *Psychological Methods, 4*, 272–299.
- Finkbeiner, C. (1979). Estimation for the multiple factor model wehn daa are missing. *Psychometrika, 44*(4), 409–420.
- Floyd, F. J., & Widaman, K. F. (1995). Factor analysis in the development and refinement of clinical assessment instruments. *Psychological Assessment, 7*, 286–299.
- Garrido, L. E., Abad, F. J., & Ponsoda, V. (2013). A New Look at Horn's Parallel Analysis With Ordinal Variables. *Psychological Methods, 18*(4), 454–474.
- Glorfeld, L. W. (1995). An improvement on Horn's parallel analysis methodology for selecting the correct number of factors to retain. *Educational and Psychological Measurement, 55*, 377-393. doi:10.1177/0013164495055003002
- Graham, J. W. (2009). Missing data analysis: making It work in the real world. *Annual Review of Psychology, 60*, 549-576.
doi:10.1146/annurev.psych.58.110405.085530
- Graham, J. W. (2012). *Statistics for Social and Behavioral Sciences*. New York: Springer.
- Graham, J. W., Hofer, S. M., & MacKinnon, D. P. (1996). Maximizing the usefulness of data obtained wit planned missing value patterns. *Multivariate Behavioral Research, 31*(2), 197-218.
- Hayton, J. C., Allen, D. G., & Scarpello, V. (2004). Factor retention decisions in exploratory factor analysis: A tutorial on parallel analysis. *Organizational Research Methods, 7*, 191–205.

- Henson, R. K., & Roberts, J. K. (2006). Use of exploratory factor analysis in published research: Common errors and some comment on improved practice. *Educational and Psychological Measurement, 66*, 393–416.
- Holman, R., & Glas, C. A. (2005). Modelling non-ignorable missing-data mechanisms with item response theory models. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 58*, 1–17.
- Horn, J. L. (1965). A rationale and test for the number of factors in factor analysis. *Psychometrika, 30*, 179–185.
- Humphreys, L. G., & Ilgen, D. R. (1969). Note on a criterion for the number of common factors. *Educational and Psychological Measurement, 29*, 571–578.
doi:10.1177/001316446902900303
- IBM. (2011a). Help file for the MVA command. Obtenido de <http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/>
- IBM Corp. Released 2012. *IBM SPSS Statistics for Windows, Version 21.0*. Armonk, NY: IBM Corp.
- Little, R. J., & Rubin, D. B. (1987). *Statistical Analysis with Missing Data*. New York: Wiley.
- Lorenzo-Seva, U., & Ferrando, P. J. (2006). FACTOR: A computer program to fit the exploratory factor analysis model. *Behavior Research Methods, 38*, 88–91.
- Lorenzo-Seva, U., & Van Ginkel, J. R. (In press). Multiple Imputation of missing values in exploratory factor analysis of multidimensional scales : estimating latent trait scores. *Anales de Psicología, 31*.
- O'Connor, B. P. (2000). SPSS and SAS programs for determining the number of components using parallel analysis and Velicer's MAP test. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers, 32*, 396–402.
- Peres-Neto, P., Jackson, D., & Somers, K. (2005). How many principal components? Stopping rules for determining the number of non-trivial axes revisited. *Computational Statistics & Data Analysis, 49*, 974–997.

- Peugh, J. L., & Enders, C. K. (2004). Missing data in educational research: A review of reporting practices and suggestions for improvement. *Review of Educational Research, 74*(4), 525-556.
- R Core Team. (2014). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Obtenido de <http://www.R-project.org/>
- Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment test*. Chicago, IL: University of Chicago.
- Revelle, W. N.-p. (2015). psych: Procedures for Personality and Psychological Research,, Northwestern University, Evanston, Illinois, USA,. Obtenido de <http://CRAN.R-project.org/package=psych> Version = 1.5.4.
- Rosseel, J. Y. (2012). lavaan: An R Package for Structural Equation Modeling. *Journal of Statistical Software, 48*(2), 1-36. Obtenido de URL <http://www.jstatsoft.org/v48/i02/>
- Rubin, D. B. (1976). Inference and missing data. *Biometrika, 3*(63), 581-592.
- Schafer, J. L., & Graham, J. W. (2002). Missing Data: Our View of the State of the Art. *Psychological Methods, 7*(2), 147-177.
- Steger, F. M. (2006). An illustration of issues in factor extraction and identification of dimensionality in psychological assessment data. *Journal of personality assessment, 86*(3), 263–272. doi:10.1207/s15327752jpa8603_03
- ten Berge, J. M., & Kiers, H. A. (1991). A numerical approach to the approximate and the exact minimum rank of a covariance matrix. *Psychometrika, 56*(2), 309-315.
- Timmerman, M. E., & Lorenzo-Seva, U. (2011). Dimensionality assessment of ordered polytomous items with parallel analysis. *Psychological Methods, 16*, 209–220. doi:10.1037/a0023353
- Velicer, W. F., & Fava, J. L. (1998). Affects of variable and subject sampling on factor pattern recovery. *Psychological Methods, 3*(2), 231-251.

- Velicer, W. F., Eaton, C. A., & Fava, J. L. (2000). Construct explication through factor or component analysis: A review and evaluation of alternative procedures for determining the number of factors or components. En R. D. Goffin, & E. Helmes (Edits.), *Problems and solutions in human assessment: Honoring Douglas N. Jackson at seventy* (págs. 41–71). New York, NY: Kluwer Academic/Plenum Publishers.
- von Hippel, P. T. (2004). Biases in SPSS 12.0 missing value analysis. *The American Statistician*, 58(2), 160-164.
- Weng, L., & Cheng, C. (2005). Parallel analysis with unidimensional binary data. *Educational and Psychological Measurement*, 65, 697–716.
doi:10.1177/0013164404273941
- West, S. G. (2001). New approaches to missing data in psychological research: Introduction to the special section. *Psychological Methods*, 6(4), 315-316.
- Wothke, W. (1993). Nonpositive definite matrices in structural modeling. *SAGE FOCUS EDITIONS*, 154, 256-256.
- Wothke, W. I. (2000). Longitudinal and multi-group modeling with missing data. En T. D. Little, K. U. Schnabel, & J. Baumert (Edits.), *Modeling longitudinal and multiple group data: Practical issues, applied approaches and specific examples* (págs. 219-240). Mahwah, NJ : Erlbaum.
- Yuan, K.-H., & Bentler, P. M. (2000). Three Likelihood-Based Methods For Mean and Covariance Structure Analysis With Nonnormal Missing Data. *Sociological Methodology*, 30, 165–200.
- Zwick, W. R., & Velicer, W. F. (1986). Comparison of five rules for determining the number of components to retain. *Psychological Bulletin*, 99, 432–442.