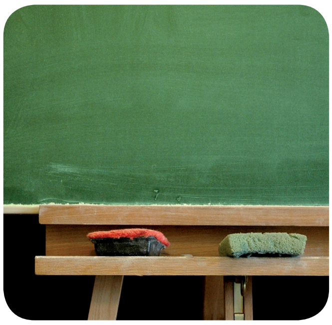
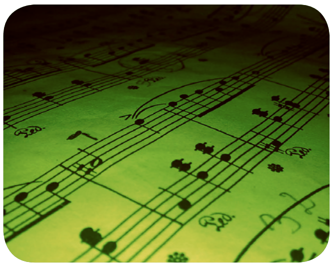
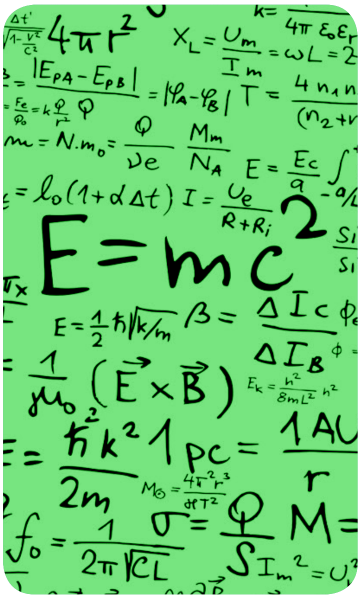




MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación
de Profesorado
y Educación / 15-16

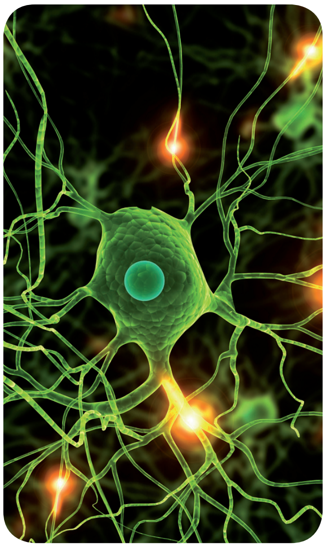
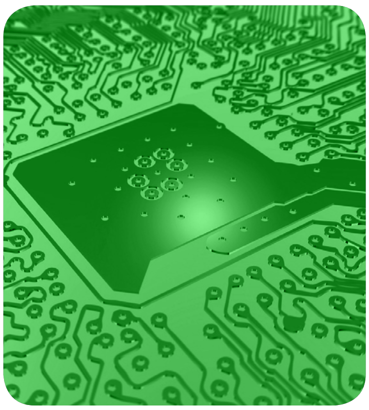
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Campus Internacional excelencia UAM CSIC+

(MESOB)
Especialidad
de Matemáticas

Uso de la Historia de las Matemáticas como hilo conductor: del ejemplo a la teoría

Manuel Herrera Garralón

UAM EDICIONES

MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO

ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Máster:

USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO HILO CONDUCTOR: DEL EJEMPLO A LA TEORÍA.

Realizado por:
Manuel Herrera Garralón

Dirigido por:
Francisco Javier Peralta Coronado

Índice general

RESUMEN.

La Historia de la Matemáticas es una herramienta muy potente que por desgracia está casi en desuso en los centros de educación secundaria. Además, si combinamos este hecho con la forma sistemática y memorística de enseñar matemáticas que predomina en este país, no nos ha de sorprender el rechazo que se le tiene a esta maravillosa ciencia.

Estos dos aspectos son los que se intentan mejorar en este Trabajo de Fin de Máster, cuyo objetivo principal es utilizar la Historia de las Matemáticas como hilo conductor para construir el conocimiento desde el ejemplo concreto hasta la teoría. Además, se proponen varios procedimientos de posible implantación en el aula y se analizan distintos procedimientos que se implantaron en el aula real siguiendo el objetivo antes marcado.

Palabras Clave:

- Innovación.
- Autonomía.
- Cooperación.
- Historia.
- Construir.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN.

Si atendemos al Decreto 48/2015 del 14 de mayo, mediante el cual se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad de Madrid, se observa que dentro de los objetivos de etapa aparecen el fomento del trabajo individual y en grupo y la comprensión del conocimiento científico como un saber integrado. También se explica que la manera de lograr dichos objetivos y desarrollar ciertas capacidades es a través del trabajo por competencias.

Debido al constante cambio que sufre la sociedad, en particular la revolución tecnológica que nos ha transformado estos últimos años, la educación y sus profesionales tienen que estar en constante búsqueda de metodologías que se adapten al perfil de los alumnos que hoy en día asisten a los centros. Concretamente, estas nuevas metodologías deben centrarse en mejorar la motivación de los alumnos, en fomentar un aprendizaje tanto cooperativo como autónomo y ganar en dinamismo frente a las metodologías tradicionales.

Este Trabajo de Fin de Máster se ha centrado en introducir la Historia de la Matemática dentro del aula para construir el conocimiento desde el ejemplo a la teoría, centrándonos en un objetivo antes citado: fomentar el saber científico como un saber integrado donde tienen cabida otras ciencias. Los contenidos que se han trabajado utilizando esta metodología han sido los ejes de coordenadas, las funciones cuadráticas y la resolución de problemas algebraicos en un grupo de 4º de ESO.

Además, se proponen tres situaciones posibles a aplicar en un grupo del mismo nivel que tratan sobre los siguientes temas del currículo de 4º de ESO: la recta real, los logaritmos y la trigonometría. Dichas posibles aplicaciones incluyen una introducción de carácter histórico sobre el tema, así como preguntas y ejercicios planteados con el fin principal de que los alumnos elaboren, dentro de lo posible, la teoría por ellos mismos.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO.

2.1. ¿QUÉ ES LA INNOVACIÓN EDUCATIVA?

Los conceptos innovación y novedad están unidos, erróneamente, en casi todos los contextos. Si tomamos al pie de la letra la definición de la Real Academia de la Lengua, innovar consiste en *'mudar o alterar algo, introduciendo novedades.'* Cuando hablamos de innovación educativa, la definición anterior está bastante lejos de coincidir con la que se busca en este capítulo.

Es complicado, por no decir imposible, obtener una definición cerrada y definitiva que explique en qué consiste exactamente la innovación educativa, pero hay algunas que gozan de bastante aceptación: "La innovación consiste en una serie de intervenciones, decisiones y procesos, con cierto grado de intencionalidad y sistematización, que tratan de modificar actitudes, ideas, culturas, contenidos, modelos y prácticas pedagógicas"(Carbonell, 2000, p. 16). Además, suele estar ligada al proceso de introducir de forma novedosa procedimientos y herramientas para favorecer la mejora del proceso de enseñanza. No obstante, hay que entender que la innovación no implica necesariamente una mejora y que para conseguir que sea así, lo principal es entender las consecuencias que implica el cambio así como el desarrollo de procedimientos para que las reformas que se apliquen sean lo más provechosas posibles. (Fullan, 1992)

La sociedad está en constante cambio y la forma de enseñar a todos los niveles necesita adaptarse a ello (Paredes, De la Herrán, Santos Guerra, Carbonell, y Gairín, 2009). Por tanto, a la hora de poner en práctica un método o idea innovadora hay que hacerlo analizando con detalle el contexto donde se va a llevar a cabo, ya que no hay absolutos en educación y lo que en un barrio puede significar una gran mejora en otro puede conllevar un fracaso.

Carbonell presenta una serie de características del proceso de innovación que incide en los elementos principales de una formación comprensiva e integral:

1. El cambio es una experiencia personal que adquiere un significado particular en la práctica, ya que aquélla debe atender tanto los intereses colectivos como individuales.
2. La innovación permite establecer relaciones significativas entre distintos saberes de manera progresiva para ir adquiriendo una perspectiva más elaborada y compleja de la realidad.
3. La innovación trata de convertir las escuelas en lugares más democráticos, atractivos y estimulantes.
4. La innovación trata de provocar la reflexión teórica sobre las vivencias, experiencias e iteraciones del aula.
5. La innovación amplía el ámbito de autonomía pedagógica de los centros y del profesorado.
6. La innovación trata de traducir ideas en la práctica cotidiana, pero sin olvidarse nunca de la teoría.
7. La innovación apela al continuo replanteamiento de la educación en función del contexto.
8. La innovación hace que afloren deseos, inquietudes e intereses ocultos en el alumnado.

9. La innovación facilita la adquisición del conocimiento, pero también la comprensión de lo que da sentido al conocimiento.

10. En la innovación no hay instrucción sin educación.

El objetivo de la enseñanza es promover el aprendizaje (Orton, 1996). Por tanto, si se desea poner en práctica una innovación en un centro educativo, los objetivos de la misma han de consistir en establecer los cambios necesarios para que el proceso de aprendizaje mejore. Realizar una innovación sin intención de mejorar algún aspecto del ámbito escolar no tiene, en mi opinión, el menor sentido.

Para poder mejorar el sistema educativo constantemente, se ha de trabajar a nivel del centro como a nivel institucional. No obstante, a menudo la coordinación entre ambas instituciones es deficiente, causando un gran número de fracasos. Para poder realizar un cambio real, es necesario que la iniciativa del centro educativo tenga el apoyo de los órganos de gobierno correspondientes y ambos se organicen de manera coordinada (Paredes y cols., 2009). Hablando en estos términos, merece la pena distinguir los siguientes conceptos que a menudo se confunden:

- Un **cambio** educativo se entiende por una modificación que se da en un contexto determinado. Cambiar los recursos, aplicar una metodología diferente o reestructurar las clases son cambios habituales que se dan en los centros educativos.

- Hablamos de **mejora** cuando el cambio tiene mayor calado y responde a algo más que valores o normas. Por ejemplo, un cambio en el sistema de evaluación es una mejora ya que puede favorecer, entre otros aspectos, la atención a la diversidad.

- Cuando la mejora viene planificada desde las instituciones, es lo que de nominamos como **reforma**.

- Las **innovaciones** las identificamos como cambios institucionalizados concebidos y realizados en el seno de los centros educativos (Paredes y cols., 2009).

La investigación educativa es una ciencia del ámbito social y como tal, está sometida a la complejidad y al constante cambio de los fenómenos sociales, en concreto de los educativos. Por tanto, no podemos pretender que únicamente mediante la investigación podamos establecer unas leyes absolutas en lo que a educación se refiere (Alzina, 2004). De hecho, la investigación educativa por sí sola es una ciencia incompleta ya que es necesaria la implantanción en los centros educativos de los resultados de dicha investigación, lo que usualemente se traduce en aplicar diversas innovaciones metodológicas con el fin de evaluar su eficacia.

No hay que olvidar que las innovaciones las aplican personas con maneras distintas de pensar y de proceder, por lo que hay que recalcar de nuevo que una innovación no es buena por sí misma, hay que analizarla siempre dentro del contexto en el que se aplica. En definitiva, el proceso innovador no es algo estático que se pueda reproducir en serie, sino que implica una serie de acontecimientos, actividades y estrategias complejas en las que existen relaciones transformadoras que adquieren diferente cariz en función del enfoque teórico que queramos darle (González y Escudero, 1987), ya que no exite proceso alguno que unifique en una única perspectiva los diferentes elementos y perspectivas del proceso de innovación (Tejada, 1995).

2.2. EL PAPEL DIDÁCTICO DE LA HISTORIA.

Antiguamente se creía que la enseñanza de las matemáticas era un arte, y por tanto, difícilmente sometible a análisis, juicios o reglas. Se pensaba que el proceso de enseñanza y aprendizaje dependía sólo del grado de conocimiento del profesor y de la capacidad de los alumnos por dejarse "moldear"por el artista (Gascón, 1998). Aunque éste siga siendo el pensamiento predominante en los centros de enseñanza, hay que ser conscientes de que enseñar matemáticas es mucho más complejo y que podemos ayudarnos de recursos poco explotados como la historia, el arte o la música. En particular vamos a hablar sobre el potencial de la historia de las matemáticas como recurso didáctico y de qué formas podemos emplearla durante la práctica docente.

Es un hecho que en los últimos años ha aumentado el interés por el papel que tiene la historia a la hora de enseñar matemáticas. De hecho, la última reforma educativa no es ajena a esta tendencia y remarca que "las matemáticas deben ser presentadas a los alumnos y alumnas como un conjunto de conocimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que, con seguridad, seguirán evolucionando en el futuro"(Vazquez, 200, p. 94).

La historia de las matemáticas es una herramienta que puede mejorar la calidad tanto de enseñanza como del aprendizaje. Explicar el proceso no sólo mental, sino también social, que ha supuesto para el ser humano el alumbramiento de nuevas ideas y teorías ayuda a comprender más en profundidad dichas ideas así como a conectar las matemáticas de manera directa con la sociedad. Una forma interesante de destacar el valor pedagógico de la historia es la siguiente (De Guzmán, 1992, p. 13) : "Si la matemática es una ciencia que participa mucho más de lo que hasta ahora se pensaba del carácter de empírica, sobre todo en su invención, que es mucho más interesante que su construcción formal, es necesario que la inmersión en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge [...]. Para entender esta relación fecunda entre la realidad y las matemáticas es necesario acudir a la propia historia de las matemáticas."

De todas las ciencias, las matemáticas son las que tienen un aspecto mas inhumano debido a su enorme grado de rigurosidad, su forma lógica y esquemática de razonamiento y su elaboración hipotético-deductiva a partir de axiomas que son por definición indemostrables (Peralta, 1995). Como se ha dicho antes, es aquí donde la historia de las matemáticas puede ayudar de distintas formas a acercar esta ciencia a las personas, es decir, a hacerla más "humana". Según Peralta, los aspectos que podemos aprovechar de la historia de las matemáticas son:

- Mostrar que el conocimiento que se está adquiriendo es fruto de una actividad humana que en muchas ocasiones responde a necesidades sociales, por ejemplo, el uso de los números negativos o el nacimiento de la geometría, además de responder a cuestiones generadas dentro de la propia ciencia.
- Destacar las dificultades y el proceso de abstracción que ha tenido que superar la mente humana para desarrollar la teoría que hoy en día se explica en todas las

aulas de instituto.

- Presentar las matemáticas como una ciencia que necesita de la cooperación entre expertos y explicar que no todos los razonamientos se deben de manera aislada a mentes brillantes.

Es importante darse cuenta de que la Historia de la Ciencia tiene una capacidad enorme para estimular el espíritu crítico y los valores científicos en los estudiantes, además de impulsar el desarrollo de la investigación, ya sea por imitación o por pura creatividad (González Urbaneja, 2004). En particular, la historia de las matemáticas debe convertirse dentro del aula en el nexo entre la ciencia pura y las humanidades, aportando una dimensión cultural y social que hoy en día no tienen.

Además de todas las bondades teóricas que podemos aprovechar de la historia como elemento didáctico, hay que verla como una fuente inagotable de información y recursos que tenemos a nuestro alcance. A la hora de enseñar matemáticas dentro del aula, de manera frecuente podemos utilizar la historia de varias maneras: Podemos recurrir a ella como método introductorio cuando explicamos un concepto, ya sea por medio de preguntas o simplemente mediante la narración de una anécdota, o podemos usarla como detonante para despertar la curiosidad de los alumnos y hacerles conscientes de todos los elementos que han influido en el desarrollo de una idea que hoy en día resulta casi trivial, como por ejemplo, el plano cartesiano o los números negativos. Más concretamente, podemos comenzar un tema nuevo con una breve introducción histórica sobre el contexto sociocultural de la época donde se tuvieron lugar los contenidos a estudiar, con una breve descripción de los matemáticos que desarrollaron la teoría o, por ejemplo, qué motivo el desarrollo de este nuevo conocimiento.

Un concepto interesante cuando hablamos del papel didáctico de la historia es el método genético. La aplicación de este método tiene por objeto demostrar que para la perfecta comprensión de un concepto matemático, es necesario que los alumnos repitan a grandes rasgos el proceso histórico que ha tenido lugar hasta la creación de dicho concepto (González Urbaneja, 1991). Uno de los mayores defensores de este método genético es Kline, que afirma lo siguiente (1980, pp 49-50): Çada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado. [...] No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes y no puede tener éxito ningún intento de acabar con estas dificultades a base de palabrería lógica."

No obstante, en la enseñanza de las Matemáticas no se utiliza con asiduidad este recurso tan rico como es la historia debido a varios factores. Según Houzel (1977, p.VI.3), "Las reelaboraciones sucesivas que la Matemática hace de las teorías precedentes, atenúan su historia, y aquí hay que buscar una de las principales razones que provocan el que las Matemáticas sean, en un alto grado, negadoras de su propia historia". Otros autores como Navarro (1980, p.12) profundizan más y explican que la comunidad científica que está a la vanguardia en matemáticas, muchas veces .ºrgullosos del carácter innovador de su tarea", asumen el estudio y la reflexión sobre el pasado como algo de poca utilidad y entorpecedor para el progreso científico. Una opinión similar es la que pronuncia Cohen (1968, p.159), donde defiende que el propio carácter acumulativo de las matemáticas favorece que sólo tengamos en cuenta lo útil del pasado que incoporamos a los nuevos trabajos, por lo que podemos "prescindir de la obra original"sin perder nada de valor.

La perspectiva histórica permite crear una visión general de los distintos problemas matemáticos para valorar mejor la importancia de los temas y articular el conocimiento matemático dentro de un contexto más general (González Urbaneja, 2004).

Como docentes debemos aprovechar esta herramienta y ser conscientes de que siempre está disponible. La introducción de la historia de las matemáticas en el aula supone un revulsivo contra el formalismo y la rigidez que tanto rechazo generan cuando hablamos de matemáticas (Vázquez, 2000). Tanto si somos docentes o investigadores, el análisis de diversas fuentes primarias y distintos textos históricos nos introduce en el mundo en el que vivieron los distintos matemáticos, nos muestra las distintas concepciones y puntos de vista que predominaban en el momento y pueden ser fuente de problemas y actividades para plantear en clase (Sierra y González, 2003). Además, como se ha dicho antes, gozar de cierta perspectiva histórica acerca de lo que se está explicando facilita la comprensión de los problemas que tuvo que superar el ser humano en su momento, lo que puede ayudarnos a evitar errores comunes a la hora de explicar nuevos conocimientos. Nuestra enseñanza ideal debería interiorizar y expresar el carácter humano de las matemáticas, ganando con ello cercanía, dinamismo y atractivo (De Guzmán, 1992).

2.3. CONTEXTO.

He aplicado parte de este Trabajo de Fin de Máster a lo largo de las prácticas del Máster en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. El centro donde desarrollé mis prácticas fue el IES Marqués de Santillana, un centro público que se encuentra en la localidad de Colmenar Viejo, en Madrid. Colmenar Viejo es una pequeña ciudad donde tienen cabida una gran variedad de niveles tanto culturales como adquisitivos: mucha gente vive de la tierra y el ganado, hay una gran población extranjera (de origen marroquí y sudamericana) y también muchas familias relacionadas con la universidad, debido a la proximidad con la UAM. No obstante, debido al espíritu tradicional, la proximidad a la sierra y el contacto directo con el mundo rural, el ambiente de Colmenar es más parecido a un pueblo grande que a una pequeña ciudad.

Concretamente, he aplicado parte de este Trabajo en un grupo 4º de ESO. Dicho grupo estaba formado por 19 alumnos (8 chicos y 11 chicas) cuyo nivel académico estaba, salvo en tres casos de repetidores, por encima de la media tanto en interés como en capacidades. Al ser un grupo poco numeroso, la relación con los alumnos fue bastante fluida y facilitó el desarrollo de las sesiones a la hora de aplicar la innovación.

Capítulo 3

DESARROLLO DE LA INNOVACIÓN.

3.1. OBJETIVOS.

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Máster es **destacar el valor didáctico de la historia de las matemáticas para poder construir el conocimiento desde el ejemplo concreto a la teoría**.

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Elaborar situaciones donde la historia de las matemáticas fomente un aprendizaje aútonomo, cooperativo y constructivo.
- Encontrar y aplicar ejemplos de la historia de la matemática adecuados para el aula.
- Analizar los resultados respecto a la evaluación anterior y las competencias curriculares que se han trabajado.
- Aumentar la motivación y la capacidad de desenvolverse de los alumnos.

3.2. METODOLOGÍA.

El desarrollo de las sesiones se llevará a cabo dentro del aula habitual. En ocasiones puntuales la actividad se podrá realizar en otros entornos: aula de informática, excursiones...

Para conseguir los objetivos propuestos, la metodología se basará en los principios constructivistas en coherencia con el objetivo principal de este Trabajo de Fin de Máster. Se usarán ejemplos y situaciones concretas basadas en hechos históricos y problemas clásicos.

- Se establecerá un ambiente positivo entre los alumnos. Para ello se fomentará la libertad de los alumnos a la hora de preguntar, se trabajará en grupo en numerosas ocasiones y se mostrará un refuerzo positivo ante la participación y la mejora de cada alumno.
- Se utilizará el contenido de una manera eficiente. No se abusarán de ejemplos y repetición de problemas en clase. Para ello se seleccionarán los ejercicios a trabajar previamente: dos buenos ejemplos bien trabajados valen mucho.
- Se aprovecharán las herramientas tecnológicas que haya en el aula para estudiar las matemáticas desde lo visual.
- Se emplearán distintos enunciados clásicos, problemas conocidos y reformulaciones de los problemas habituales para introducir el tema y captar así la atención de los alumnos.
- Se plantearán problemas adaptados a los distintos niveles posibles con el fin de motivar a los alumnos independientemente del grado de conocimiento que tengan.
- Se fomentará una buena relación entre alumnos y profesor mostrando una actitud de escucha, respeto y cercanía hacia el grupo.

El enfoque constructivista de esta innovación pretende que los alumnos participen, dentro de lo posible, del **método genético** ya comentado en la introducción. Para ello, tanto los ejercicios propuestos como el contenido histórico que se aplique en el aula deberán destacar el proceso que se siguió hasta el alumbramiento de la teoría que se trabaje.

El desarrollo de las sesiones compartirá una estructura común: en primer lugar se corregirán las tareas que hubiera para casa para repasar el contenido anterior, a continuación se explicará brevemente el contenido de la sesión **mediante una introducción o situación histórica relacionada con el tema** para posteriormente plantear ejemplos y ejercicios con las características antes citadas. Por último, **se concluirá la sesión con el contenido teórico** y la realización de ejercicios más elaborados que preferiblemente resolverán de manera cooperativa por parejas.

El aspecto fundamental de las sesiones es que la teoría se introduzca al final de cada clase, en concordancia con el objetivo principal de este trabajo. Por otro lado, la dificultad de los ejemplos y ejercicios a trabajar estará previamente estudiada para poder ir *construyendo* paso a paso el conocimiento que se pretenda enseñar en cada sesión.

Respecto al uso de la historia de las matemáticas, al comenzar una nueva unidad didáctica se elaborará una introducción donde se destaquen los personajes principales, el contexto científico (en particular el matemático) y los aspectos socioculturales de la época donde se desarrolló el tema a estudiar.

Este Trabajo está pensado para realizarse a lo largo de un curso completo de 4º de ESO por tres razones principales:

- Obligatoriedad de la enseñanza en este curso. Mayor volumen y diversidad del alumnado que, en caso de aplicación y estudio posterior de la innovación, permite obtener una muestra relevante.
- Edad media del alumnado. Existe una gran capacidad de influenciar positivamente en alumnos de esa edad, haciendo que mejore tanto la actitud como el interés en la materia.
- Contenido curricular del nivel.

Como se ha dicho antes, este Trabajo de Fin de Máster pretende mostrar formas de introducir y desarrollar cada unidad didáctica de 4º de la ESO con ayuda de la historia de las matemáticas, en particular, aprovechar el potencial como herramienta de la historia para acercar las matemáticas.

3.3. SITUACIONES APLICADAS EN EL AULA.

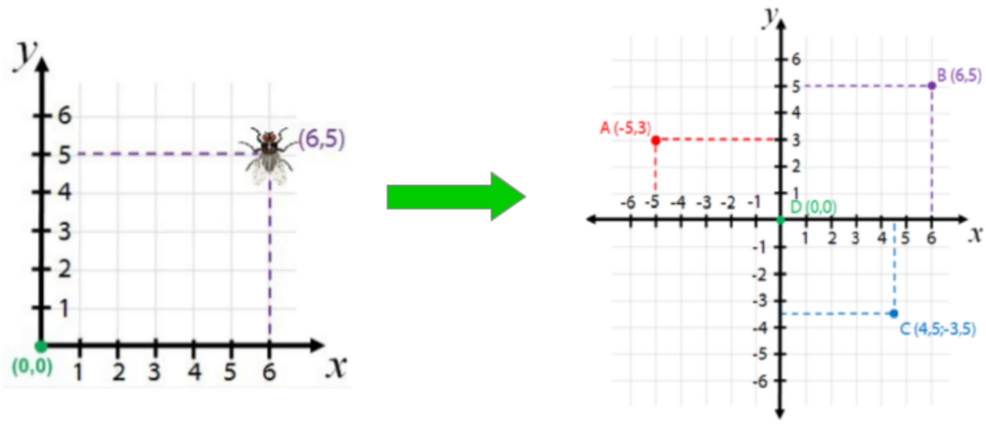
A lo largo de mi período de prácticas he podido aplicar, dentro de unos límites, tres situaciones donde la historia ha sido la protagonista y ha servido para que los alumnos trabajaran desde el ejemplo concreto hasta el desarrollo final de la teoría.

3.3.1. La Mosca de Descartes.

Durante mi período de prácticas impartí el tema de Las Funciones en 4º de ESO. Es cierto que en ese nivel ya han trabajado previamente con el plano de coordenadas, pero aún no tienen la soltura suficiente para trabajar con él de manera correcta.

Fue durante una sesión en la que estábamos trabajando con funciones a trozos donde vi el momento, con previo consentimiento de mi tutor, de modificar la metodología habitual. Para ello, al comienzo de la siguiente sesión les expliqué a los alumnos que la clase de ese día (íbamos a empezar a representar parábolas) iba a desarrollarse de manera diferente y comencé explicando lo siguiente:

El eje de coordenadas con el que estamos trabajando se denomina plano cartesiano en honor al filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650). La creación del plano cartesiano que hoy conocemos, según cuentan, sucedió cuando una mañana tumbado en su cama, le llamó la atención una mosca que volaba por su habitación. A raíz de eso, Descartes ideó una manera de situar a la mosca respecto de dos de las paredes del cuarto mediante un par de números. Esta nueva idea para entender la geometría supuso el nacimiento de la geometría analítica, es decir, la interpretación de problemas relacionados con curvas mediante el uso del álgebra, en particular el uso de las ecuaciones. Lo que hoy en día llamamos coordenadas cartesianas no es más que hacer corresponder a cada punto del plano un par ordenado de puntos.



De la mosca al Plano Cartesiano.

Después de esta breve explicación sobre el origen tan curioso del sistema de coordenadas cartesiano, varios alumnos preguntaron sobre la ütilidad"que tuvo esta idea en su momento y por qué es tan importante si a priori parece una idea bastante intuitiva.

Sobre las aplicaciones que tuvo (y sigue teniendo) el plano cartesiano, les puse un ejemplo sobre un juego que todos conocían: el hundir la flota. Para ello, dibujé en la pizarra un tablero 8x8 donde a cada fila le hice corresponder una letra de la A a la H y a cada columna un número del 1 al 8. A continuación, señalé una casilla y pregunté en voz alta si alguien sabía situármela. Todos los alumnos conocían el juego por lo que sabían perfectamente que a cada casilla le correspondía un par ordenado (LETRA, NÚMERO). A continuación, les expliqué que el plano cartesiano funcionaba de manera muy parecida, solamente que en este caso a cada punto de tu "mapa"le hacemos corresponder dos números que también están ordenados. Además, trabajar con el plano cartesiano te permite representar y traducir a lo visual ecuaciones como $-3x^2 + 7x - 1 = 0$ que a simple vista es una ecuación de segundo grado pero si la vemos como la función $y = -3x^2 + 7x - 1$ para representarla podemos estar delante de la trayectoria de un proyectil, de la curva de beneficios de una empresa o de la forma que tiene una antena parabólica.

En definitiva, esta idea que parece tan sencilla no apareció hasta el siglo XVI, de hecho los matemáticos de la época, en particular Pierre Fermat, tardaron algunos años más en establecer los ejes como los conocéis ahora.

3.3.2. Parábolas y Lanzamiento de Jabalina.

En la siguiente sesión trabajamos con parábolas: elementos principales, representación, simetrías... Para introducir el contenido comencé como si de una clase de Geografía e Historia se tratara, explicando, entre otras cosas, el nacimiento de las Olimpiadas en Grecia:

Los Juegos Olímpicos de la Antigüedad consistieron en la organización de varias pruebas atléticas realizadas por las ciudades Estado de la Antigua Grecias. Los primeros registros indican que comenzaron en el 776 a. C. en Olimpia (Grecia), y se celebraron hasta el 393 d. C. Los Juegos tenían lugar cada cuatro años, como en la actualidad. Un hecho curioso es que mientras se estaban realizando los Juegos, se establecía una tregua o Paz Olímpica, con el fin de que los paticipantes pudieran moverse con seguridad desde sus ciudades hasta Olimpia. Aunque hay muchas semejanzas entre los actuales Juegos con los Antiguos, hay algunas diferencias muy importantes: se celebraban siempre en el mismo lugar y sólo los hombres libres que hablasen griego podían participar. Como *ya habéis estudiado en Historia, el imperio romano adoptó de manera oficial la religión cristiana, poniendo fin a toda manifestación pagana, entre ellas los Juegos* (Munguía, 1992).

A continuación les pregunté si conocían alguna prueba tuvieran en común los Juegos actuales y los Antiguos. Mi intención era que saliera el tema de los lanzamientos de disco o de jabalina para introducir las trayectorias parabólicas. Para sorpresa mía la jabalina fue el primer deporte que dijeron, por lo que interrumpí con la siguiente pregunta: ¿Alguien sabe qué trayectoria dibuja una jabalina cuando se ha lanzado?

Un alumno se ofreció voluntario a salir a la pizarra y dibujarla, ya que las explicaciones del resto de compañeros fueron bastante imprecisas. El alumno dibujó correctamente una parábola y expliqué que el lanzamiento de un objeto siempre describía una trayectoria parabólica, por lo que estas ecuaciones de segundo grado que veían tan abstractas, están mucho más presentes en nuestro entorno de lo que pensaban.

A continuación se propusieron los siguientes ejercicios y preguntas que en esta ocasión siguieron los objetivos que se han planteado en este trabajo:

1. Una recta viene dada por una ecuación de primer grado y una parábola por una de segundo grado. Si para representar una recta hacen falta dos puntos, ¿Cuántos harán falta dar para poder asegurar que sólo existe una parábola que pase por esos puntos?

2. Conociendo la fórmula para hallar el vértice de una parábola, ¿Qué sucede con las parábolas $y = x^2 + 3$, $y = -x^2 + 3x$, $y = 3x^2$?

3. Representa la siguiente parábola: $y = x^2 - 5x + 6$

4. (Continuando el problema de la jabalina). En una competición de lanzamiento un atleta lanza la jabalina de manera que describe la siguiente ecuación: $y = 2 + 1{,}7 - 0{,}05x^2$.

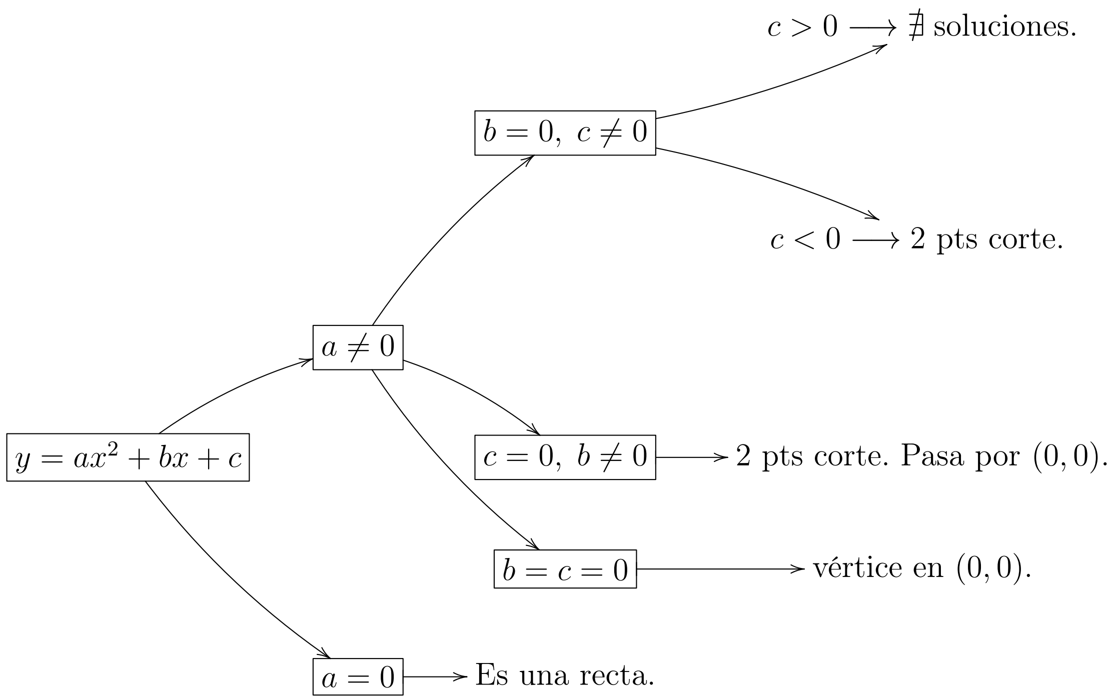
    a) ¿Dónde alcanza la altura máxima?

    b) ¿Cuánto es la altura máxima?

c) ¿Cuánto mide el lanzamiento del atleta?

d) ¿Qué significa la y cuando $x = 0$?

Al finalizar la clase, copié en la pizarra el siguiente esquema, con el fin de que los alumnos tuviera una guía rápida de lo trabajado hasta ahora:



3.3.3. La Historia del Lenguaje Algebraico.

Esta sesión fue la primera (y única) donde me quedé solo manejando al aula sin la ayuda de mi tutor. En un principio la clase iba a consistir en un repaso general debido a la proximidad del examen, pero debido al bajo número y al buen comportamiento de los alumnos, decidí hablarles sobre el origen del álgebra hasta que se unió con la geometría, para ello me basé en el siguiente guión:

Los procedimientos algebraicos más antiguos datan del tiempo de los babilonios, que aunque no disponían de un lenguaje formal para trabajar, mostraron un gran interés en las operaciones con números y sus propiedades. En un principio estas operaciones se expresaban verbalmente, tal y como las leemos, por lo que escribir matemáticas era una tarea muchísimo más compleja de lo que es hoy en día. De hecho, el lenguaje que usáis ahora se introdujo mucho más tarde, casi 3000 años después de que los babilonios y los egipcios plantearan los primeros problemas que involucran resolución de ecuaciones(Bell y Bourbaki, 1949).

La palabra Álgebra es de origen árabe, y se debe a la publicación más importante del matemático musulmán Al Khwarizmi en el año 835. Aunque este matemático fuera el impulsor de los problemas algebraicos, tampoco disponía de una lenguaje adecuado y los problemas que planteaba expresaban literalmente (Puig, 1998). *No es hasta los siglos XVI y XVII cuando Descartes y Viète introducen la notación por símbolos que utilizamos hoy en día. Gracias a este proceso que duró tantos siglos, las matemáticas y en general la ciencia avanzaron a pasos de gigante debido a esta simplificación.*

Para trabajar con los alumnos les propuse diversos enunciados de problemas antiguos para los tradujeran al lenguaje algebraico actual. Para ello utilicé un ejemplo que hay escrito en el Papiro Rhind (1650 a.C.), un problema descrito por Al Khwarizmi y el clásico enunciado de la tumba de Diofanto:

- Un montón y una séptima parte es igual a 24
- ¿Cuál es el cuadrado que, combinado con diez de sus raíces, dará una suma total

de 39?

- En esta tumba reposa Diofanto. ¡Ah, qué gran maravilla! La tumba cuenta científicamente la medida de su vida. Dios le concedió ser un muchacho durante la sexta parte de su vida, y añadiendo una doceava parte a ésta, revistió su mejilla de pelusa. Encendió la luz del connubio pasada una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le dio un hijo. ¡Ay! ¡Desdichado hijo tardío! Después de consolar su pena mediante el estudio de los números durante cuatro años, Diofanto terminó su vida.

3.4. APLICACIONES POSIBLES EN EL AULA.

En este apartado se detallan distintas maneras de introducir los bloques y unidades didácticas principales de 4º de ESO utilizando la historia de las matemáticas como método introductorio e hilo conductor para proceder como ya se ha dicho anteriormente: del ejemplo concreto hasta la elaboración final de la teoría. Además, se detallarán ejercicios o preguntas adecuadas para la consecución de ese objetivo. En ningún momento se pretende que la sesión trate exclusivamente de una introducción de carácter histórico y de la resolución de problemas, ya que el objetivo final es la exposición de la teoría de la manera habitual habiendo seguido un proceso diferente.

Todas las intervenciones y procedimientos están pensados para el curso de 4º de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas según el Decreto 48/2015, de 14 de mayo del Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, nº 118, 2015, 20 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

3.4.1. El Viaje Hasta los Números Reales.

El Bloque 2 (Álgebra) de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas trata en profundidad conceptos como la recta real, distintos métodos de resolución de ecuaciones, operaciones con potencias racionales y sus propiedades. Este bloque suele abrir el curso, por lo que creo que si comenzamos con una introducción sobre el origen de algo tan usado como los números reales, podemos conseguir captar el interés que normalmente en septiembre u octubre aún no se tiene debido al poco hábito de estudio.

A la hora de comenzar a explicar el concepto de recta real, se podría dedicar la primera parte de la clase a contar, de manera adecuada al nivel y ritmo del grupo, la siguiente introducción:

El concepto de número real es algo que no os imagináis lo tarde que se estableció *formalmente. Como ya sabéis, hay distintas clases de números*[1]*, y todos sabemos cuáles son los números reales, pero hasta el siglo XIX no se utilizaron de manera rigurosa como lo hacemos ahora, y eso fue hace menos de 200 años.*

En primer lugar hay que fijarse en la primera parte del esquema [2] *para llegar al origen de los números reales. Si recordamos qué números componen el conjunto de los naturales, escritos* $\mathbb{N}$ *en lenguaje matemático, podemos intuir todos que fueron los primeros en utilizarse debido a la necesidad de contar. En particular, hay registros muy antiguos de tablillas de arcilla donde se contaban las cabezas de ganado, pero con el nacimiento del comercio, aparecieron dos clases nuevas de números: los enteros y los racionales.*

Los números racionales o números fraccionarios, son otra historia algo más compleja. Es cierto que incluso los babilónicos y los egipcios utilizaban ciertas fracciones a la hora de resolver problemas algebraicos, pero los que de verdad trabajaron y desarrollaron los números racionales fueron los griegos cuando descubrieron que las relaciones armónicas entre notas de una misma escala respondían a proporciones que se podían expresar de manera muy sencilla como fracciones. Este descubrimiento fascinó tanto a los griegos que se empeñaron en buscar relaciones fraccionarias a cualquier magnitud, hasta que se toparon con un problema: medir la diagonal de un cuadrado de lado 1. Como ya sabéis, las fracciones se pueden expresar como un número con decimales, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ *equivale en expresión decimal a* $0{,}5$ *y* $\frac{1}{3}$ *a* $1.\widehat{3}$*. Lo que habían encontrado sin darse cuenta, era una nueva clase de número con una característica especial: su expresión decimal era infinita y no periódica.* [3]*. Los griegos no esperaban encontrarse con un número con estas propiedades y realmente lo que hicieron fue tratar a esta nueva especie de números, los números que hoy en día conocemos como irracionales, como puntos en la recta real. Lo más curioso de todo esto es que no fue hasta entrado el siglo XVII cuando se empezó a manejar el concepto de número real como lo conocemos ahora.*

El origen de los números enteros es algo muy intuitivo que podéis adivinar vosotros

[1] Aquí se puede aprovechar para realizar un esquema sencillo y repasar, o volver a explicar si hiciera falta, la clasificación de los números: Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales...

[2] Habiendo realizado el esquema en la pizarra, se puede usar de guía para ir hablando de cada clase de número.

[3] Aquí sería indicado parar y recordar rápidamente el teorema de Pitágoras y cómo se despeja un cuadrado de una ecuación.

ahora que conocéis cómo aparecieron los números naturales [4]*. Imagináos que sois un comerciante en que tiene 100 cabras, de las cuales cambiais 3 de ellas por un bloque de sal y otras a 2 se las ha comido un lobo. De alguna manera tenéis que apuntar que tenéis 5 cabras menos, de lo que poco a poco surgieron los números negativos. Aún así, por obvio que parezca ahora el concepto de número negativo, las primeras manifestaciones de su uso datan del siglo V d.C. en oriente, pero hasta el siglo XVI no llegaron a occidente. Debido al interés de la época en estudiar los problemas relacionados con la naturaleza y a su comportamiento antinatural eran conocidos como ñúmeros absurdos'. De hecho, uno de los mejores matemáticos del mundo como era Leonard Euler, rechazaba las soluciones negativas de las ecuaciones en pleno siglo XVII por considerarlas alejadas de la realidad, así que tampoco creáis que fue algo tan sencillo como contar ganado.*

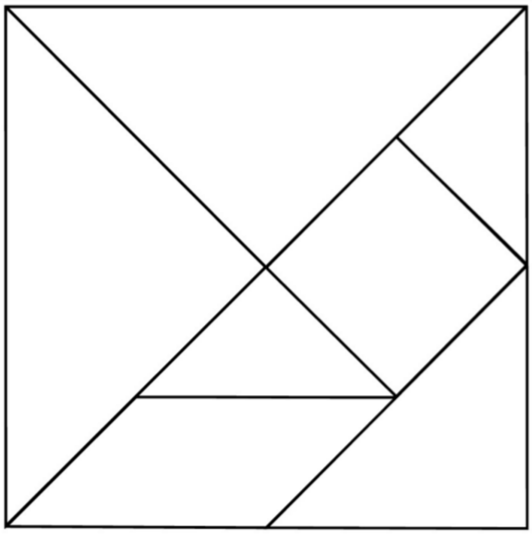
Como toma de contacto, se pueden proponer estos ejercicios en el orden que sigue:

1. Ahora que sabéis a qué problema se enfrentaron los griegos. ¿Sabéis construir un rectángulo cuya diagonal mida $\sqrt{2}$? ¿y si os pido que la diagonal mida 3?

2. Ya hemos visto cómo construimos segmentos de una longitud dada. Si trabajamos con la recta real, ¿Podéis dibujar un segmento cuya longitud sea $\sqrt{5}$? Y mirando el ejercicio anterior, ¿Podéis hacerlo para un segmento de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$?

Otra herramienta muy útil para mejorar la destreza de los alumnos es el Tangram, tanto en formato físico como en formato digital. El Tangram es un juego de origen chino que consta de un puzzle de siete piezas formado por las siguientes figuras:

[4] Aquí sería indicado establecer una ronda de respuestas a mano alzada a ver si entre todos obtienen la respuesta.



Con el uso del Tangram podemos reforzar el trabajo realizado anteriormente con el uso de la recta real para hallar números irracionales. Por ejemplo, si suponemos que el triángulo más pequeño tiene lado 1, halla los lados del resto de figuras. También podemos repasar conceptos como áreas, semejanzas y ángulos, pero ya nos saldríamos del contenido de esta unidad didáctica.

Los ejercicios anteriores tienen por objetivo fundamental el repaso de ecuaciones de segundo grado, del Teorema de Pitágoras y el trabajo con la recta real. De hecho, es recomendable que estos ejercicios se intercalen con la introducción histórica con el fin de hacerla más amena y dinamizar la clase.

3.4.2. Suma y Producto. Logaritmos.

A lo largo del Bloque 2 se introduce un concepto que hasta este curso los alumnos no han visto nunca: los logaritmos. Esta unidad didáctica de imparte una vez se han visto las propiedades de las potencias con exponentes racionales para tener reciente el manejo de este tipo de operaciones.

Para poder introducir de una manera sencilla y atractiva esta nueva herramienta me parece fundamental destacar la necesidad de ralacionar la suma y la multiplicación de manera sencilla y qué implicaciones supuso (y supone) esa propiedad. Opino que también sería positivo explicar algún fenómeno de la naturaleza que obedezca leyes en cuya expresión aparezcan logaritmos para que vean más cercano y palpable esta nueva idea que les cuesta manejar al principio. Una forma de introducir el tema y plantearlo de manera atractiva podría ser la siguiente:

El origen de los logartimos, como casi cualquier concepto en matemáticas, se debe a una necesidad social que supuso unos avances normes tanto en navegación como en la agilización del comercio. A partir del siglo XVI, el volumen del comercio global requería de unos cálculos demasiado complejos para hacerse de manera eficiente con los procedimientos que se tenían entonces, por tanto, existía la necesidad de encontrar algún procedimiento que agilizara y simplificara aquellas operaciones.

La invención, o descubrimiento, de los logaritmos no ocurrió de manera aislada: los complejos cálculos relacionados con la navegación y el comercio con reglas de interés compuesto que ya habéis visto en otros cursos[5]*, fomentaron la aparición de esta herramienta que transformó enormes multiplicaciones en sumas y divisiones muy complejas en simples restas.*[6](Collette, 1991).

Posteriormente se han ido conociendo fenómenos naturales cuya fórmula contiene logaritmos: la eliminación de Carbono 14 para averiguar la edad de los fósiles, la eliminación de la radiación o la intensidad del sonido.

Debido a la complejidad del contenido y lo avanzado en el tiempo de la creación de los logaritmos, no creo que sea adecuado profundizar mucho más en su origen. Hay numerosos problemas, algunos de ellos que le debemos a Arquímides, que nos pueden ayudar a trabajar poco a poco las propiedades de los logaritmos. Por ejemplo:

1. Si miráis la siguiente tabla realizada por Arquímides, se pueden identificar algunas propiedades de los logaritmos:

[5]En 3º de ESO se estudia este tema

[6]Aquí se puede interrumpir y escribir en la pizarra las propiedades de producto-suma y cociente-resta que se han mencionado.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Si os fijáis, la pimera fila es el exponente y la segunda fila es el resultado de tomar 2 como la base y elevarla a dicho exponente. Por ejemplo, si en la primera fila sumáis $2 + 3 = 5$ y en la segunda fila multiplicáis $4 \times 8 = 32$, obtenemos el resultado $2^5 = 32$. Es decir, lo que estamos haciendo es trabajar con el logaritmo en base 2.

Viendo este ejemplo, ¿Con qué base se está trabajando ahora? ¿Serías capaz de rellenar la siguiente tabla?

-3	-2	-1	0		2		4
		$\frac{1}{3}$	1	3		27	

Una vez trabajadas las propiedades más generales y los alumnos estén familizarizados con su manejo, se pueden proponer los siguientes problemas con el fin de conectar con la introducción histórica, hacerles conscientes de las necesidades por las que aparecieron los logaritmos y hacerles ver la utilidad que hoy en día tienen en campos como el control de calidad, el cálculo de capitales o el estudio de las poblaciones:

2 ¿Cuántos años deberán transcurrir para que un capital de 8250€ invertidos a una tasa anual del 4,25 % se incrementen para lograr un capital final de 10590€?

3 El servicio de conrol de calidad de una empresa que fabrica lavadoras ha comprobado que el porcentaje de lavadoras que sigue funcionando al cado de t años viene dado por la función $f(t) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$

  a ¿Qué proporción de lavadoras seguirán funcionando después de 5 años? ¿Y después de 15 años?

  b ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcionen el 40 % de las lavadoras fabricadas?

4 El crecimiento de un bosque viene dado por la función $F(t) = A(1+i)^t$, donde F es la madera que habrá dentro de t años, A la madera actual e i la tasa de crecimiento

anual. Si la tasa de crecimiento anual es $i = 0{,}02$ y se mantiene constante, ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la madera del bosque?

Estos problemas de enunciado están pensados para resolverse de manera conjunta, preferiblemente en parejas, debido a varias razones: la complejidad del enunciado es alta y la cooperación entre únicamente dos compañeros fomenta que se apoyen y se ayuden entre ellos, ya que de hacerlo de manera común con toda la clase, hay riesgo de que bastantes alumnos se pierdan. Otra razón importante es la de fomentar el aprendizaje de sus iguales, ya que cuando un alumno es capaz de explicar a su compañero de manera adecuada la resolución de estos problemas ambos salen beneficiados, el ayudado por la explicación y la mejora de sus destrezas y el que ayuda porque sólo cuando se es capaz de explicar algo es cuando se ha comprendido del todo.

3.4.3. El Origen de la Trigonometría.

En 4º de ESO el contenido del bloque de Geometría se reduce a un repaso rápido de lo visto en cursos anteriores y a la introducción de la Trigonometría. Es un excelente momento para aprovechar el componente visual que a veces no tienen las matemáticas y usar numerosos resultados y problemas clásicos.

En mi opinión, desde la experiencia como alumno y docente en prácticas, el bloque de Geometría de 4º de ESO le suele parecer mucho más complicado a los alumnos de lo que realmente es. Creo que es debido, en parte, a la forma sistemática de enseñar sin explicar previamente qué se está estudiando y por qué y al poco fomento de la intuición visual. Para mejorar estos aspectos, ya que luego el manejo de la trigonometría es fundamental en la física y en matemáticas más avanzadas, propongo comenzar este bloque con una breve historia general de la geometría haciendo hincapié en grandes figuras como Arquímides o Euclides para posteriormente realizar una serie de ejercicios que poco a poco abarquen todo el temario pero siempre dando pie a que los alumnos deduzcan más que memoricen. Además, señalaré varios recursos que se deben tener siempre presentes a la hora de iniciarse en este campo de las matemáticas. La introducción histórica podría esta:

La palabra Geometría tiene origen griego: geo *significa tierra y* metrón *medida, por lo que podríamos traducirla por la ciencia que estudia la "medida de la Tierra"*[7]*. La Geometría, como tantas otras herramientas matemáticas, surgieron de la necesidad que tenía la sociedad egipcia en medir parcelas de campo y mejorar la construcción de los templos. Eso sí, en aquella época no había demostración alguna y todo se aceptaba sin la necesidad de formalizar todo conocimiento que surgió posteriormente en Grecia. Los egipcios, y estoy hablando de hace más de 3000 años, ya conocían el Teorema de Pitágoras en casos sencillos. De hecho, el famoso triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 es denominado Triángulo Egipcio por alguna razón.*

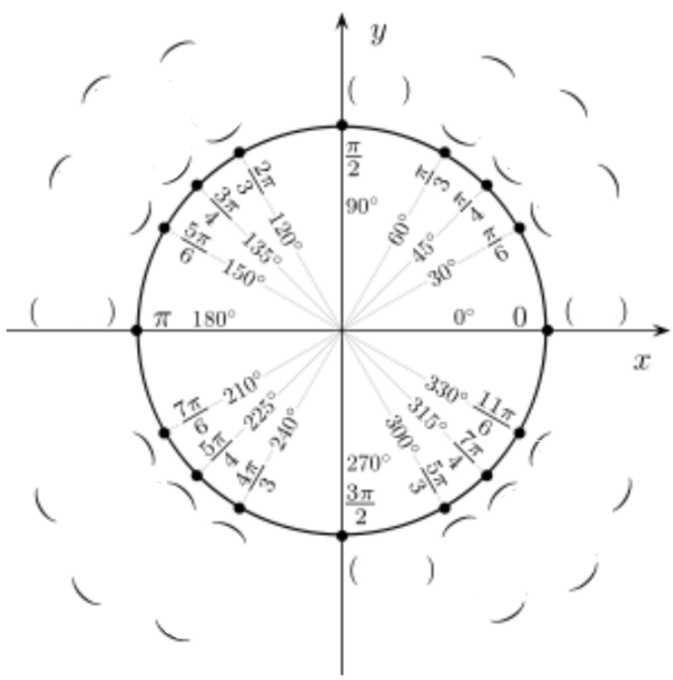
En Grecia es cuando de verdad las matemáticas sufren un desarrollo hasta entonces

[7]Sería una buena manera de empezar el tema y llamando la atención de los alumnos directamente preguntando si alguien sabe qué significa.

nunca visto. En particular es la edad de la Geometría, la época donde se formalizaron los conocimientos que habéis estudiado en 3º de ESO y que seguiréis estudiando muchos años más. En particular nosotros vamos a empezar con el estudio de la Trigonometría. Si antes hemos visto el significado de la palabra griega Geometría, espero que quede claro que la Trigonometría se encarga exclusivamente de la medición de triángulos. Para ello estudia las relaciones entre ángulos y lados de todo tipo de triángulos, estableciendo una rama de la Geometría muy interesante y visual.

La Trigonometría como tal surgió del estudio de la bóveda celeste y la necesidad de triangular y manejar ángulos para situar estrellas, planetas y cometas. Hoy en día tiene muchísimas utilidades, como por ejemplo los sistemas de navegación GPS o el cálculo de alturas.

Después de esta breve y sencilla contextualización del tema que se va a estudiar, me parece adecuado presentar la Circunferencia Goniométrica. Es la herramienta fundamental con la que se va a trabajar este tema y si acostumbramos a los alumnos a trabajar con ella, ganarán en soltura y habilidad a la hora de resolver todo tipo de ejercicios. A cada alumno se le haría entrega de una ficha con una Circunferencia Goniométrica en blanco como la siguiente:



Para reforzar esta idea tan fundamental para el buen aprendizaje de la trigonometría más básica, sería adecuado que se proyectara dicha circunferencia goniométrica mediante el uso del programa GeoGebra y recurrir a ella a la hora de resolver los ejercicios que se propusieran en esta sesión.

El objetivo principal es que se familiaricen con interpretar el *seno*, el *coseno* y la *tangente* de un ángulo como puntos y relaciones de la circunferencia unidad. Por otro lado, también habría que mostrar a los alumnos la relación entre grados y radianes y fomentar el uso de estos últimos, ya que hasta en cursos avanzados se encuentran los alumnos con serias dificultades para manejar estas magnitudes.

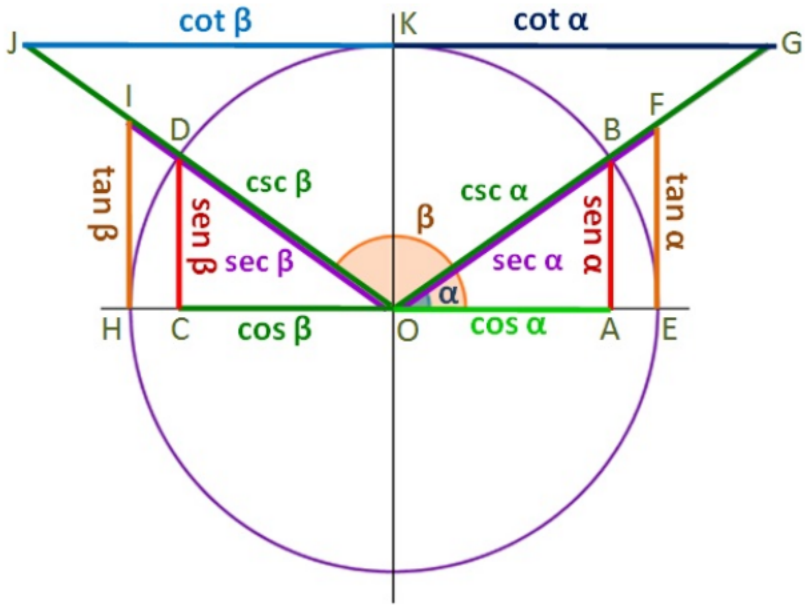
A continuación y siguiendo con la motivación del estudio de la bóveda celeste y problemas de triangulaciones, se pueden proponer los siguientes ejercicios como paso intermedio para llegar a la elaboración final de la teoría:

1. Estaban Arquímides y Euclides reunidos debatiendo sobre el la altura de la torre más alta de la ciudad. El primero asegura que ha medido con instrumentos nuevos la torre y el resultado ha sido de 80 metros. Sin embargo, Euclides le tacha de mentiroso y afirma que no mide ni 70 metros según sus instrumentos. Si la distancia entre las casas de estos dos pensadores es de 126 metros y ven desde las puertas de sus casa la torre, Arquímides bajo un ángulo de 45° y Euclides bajo uno de 60°. ¿Quién de los dos dice la verdad?.

2. El cielómetro se compone de un proyector de Luz "P"dirigido verticalmente hacia un techo de nubes y un detector de Luz "D"dirigido hacia las mismas en una base horizontal. En un experimento se ubican a una distancia horizontal de 986m del Proyector del Detector, inclinándose este último a 75º. ¿Cuál es la altura aproximada del techo de nubes?

Una vez explicadas las distintas razones trigonométricas y sus relaciones, se propondría a los alumnos la siguiente tarea con el fin de que dedujeran, con el profesor únicamente ejerciendo de guía, el mayor número de identidades trigonométricas:

3 Utilizando la siguiente ficha y suponiendo que el radio de la circunferencia es igual a 1, intentar deducir las siguientes relaciones trigonométricas:



$a)\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ $\qquad$ $b)\tan^2(x)+1=\csc^2(x)$

$c)1+\cot^2(x)=\sec^2(x)$ $\qquad$ $d)\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$

$e)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\cot(x)$ $\qquad$ $\frac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$

Este ejercicio está pensado para realizarlo por parejas a lo largo de una sesión. El objetivo de trabajar así es de nuevo fomentar la cooperación y la ayuda entre iguales, ya que el proceso que van a tener que seguir para obtener estos resultados les va a facilitar la comprensión y la posterior utilización de dichas identidades por varios motivos: han estado trabajando y confundiéndose para poder obtenerlas y han visto las relaciones que existen entre ellas, idea fundamental a la hora de estudiarlas y reducir la aparente dificultad de este tema.

Para ello, debido a la dificultad del ejercicio, conviene que el profesor esté pendiente del trabajo que van realizando las parejas para poder ayudar dando indicaciones suficientes, pero nunca resolviendo el ejercicio. Por ejemplo, si vemos que dos alumnos han conseguido demostrar las tres primeras identidades utilizando el Teorema de Pitágoras pero tienen dificultades a la hora de resolver las tres últimas, sería acertado por parte del profesor que dejara caer la idea de estudiar las semejanzas que existen en la imagen, o incluso indicarles que intenten aplicar el Teorema de Tales teniendo en cuenta siempre lo que intentan demostrar.

Capítulo 4

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES.

4.1. ANÁLISIS DE LA INNOVACIÓN.

A la hora de analizar este proceso de innovación, creo que hay que separar este análisis en dos bloques: lo que se ha aplicado y lo que se pretende aplicar.

4.1.1. Análisis y Relexión de lo Aplicado en el Aula.

Como ya se ha mecionado antes, he podido aplicar parte de este Trabajo de Fin de Máster a lo largo del período de prácticas del Máster en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. A lo largo de este tiempo impartí la unidad didáctica de Funciones en 4º de ESO además de repasar el bloque de Álgebra.

El grupo al que di clases estaba formado por 19 alumnos de nivel medio alto, de los cuales todos pretendían estudiar un bachillerato orientado a las ciencias. No tenían problemas de conducta y en general el trato con ellos fue muy bueno.

La sesión **3.3.1**, el ejemplo de la Mosca de Descartes, tengo que analizarla positivamente debido a varias razones. En primer lugar, era la primera vez que daba clase en un instituto y por tanto era la primera vez que intentaba cambiar la metodología dentro de un aula. A pesar de ello la respuesta de los alumnos fue, en mi opinión, muy positiva debido al número de preguntas y la cantidad de discusiones que tuvieron entre ellos sobre el tema: unos alumnos no se lo creían, otros lo buscaban con el móvil para darme la razón... En definitiva, me gustó mucho esa primera experiencia por el efecto que tuvo sobre los alumnos la anécdota sobre el origen del Plano Cartesiano.

No obstante, los ejercicios que se trabajaron en esa sesión se desviaron de mis planes iniciales debido, como se ha contado en **3.3.1**, a que mi tutor me pidió que realizara unos ejercicios que tenían pendientes para corregir. A pesar de mis nervios iniciales y del desvío de la planificación sobre los ejercicios, fue un día donde me sentí muy cómodo con los alumnos.

La idea sobre el problema de los Juegos Olímpicos y el lanzador de jabalina (**3.3.2**) me la sugirió mi tutor para proponer un ejercicio de tiro parabólico y de paso, relacionarlo con el contenido de la asignatura de Física. A partir de esa idea se me ocurrió utilizar el nacimiento de las Olimpiadas para concluir con el ejercicio sobre el lanzador que se plantea en **3.3.2**.

Durante esta sesión noté que los alumnos no mostraban tanto interés en el origen de las Olimpiadas como en la historia de la Mosca de Descartes, por lo que decidí interrumpir la narración con preguntas dirigidas a los alumnos sobre Grecia y las pruebas olímpicas de la antigüedad para dinamizar la clase. No fue hasta que surgió el tema del lanzamiento de jabalina hasta que se mostraron más participativos.

Cierto es que en esta sesión no utilicé la historia de las matemáticas como tal, sino que usé un hecho histórico para introducir un concepto como el tiro parabólico y sus elementos principales. No obstante, se consiguió el objetivo principal de ir del ejemplo concreto del lanzador de jabalina hasta la realización final del esquema, por lo que lo valoré positivamente.

El contenido histórico de la sesión **3.3.4** fue en mi opinión el que peor acogida tuvo entre los alumnos debido, según me comentó luego mi tutor una vez supo de qué les había hablado, a lo abstracto del contenido. No obstante, me dio la enhorabuena por los ejercicios que les propuse como repaso del bloque de Álgebra por la originalidad de los mismos.

El objetivo principal de estos tres enunciados era que los alumnos interpretaran y obtuvieran la ecuación que había oculta tras el texto, proceso muy similar al que realizan cada vez que se les plantean los problemas habituales de enunciados, salvo que en este caso dichos enunciados tienen un componente histórico y se salen de la rutina habitual de los alumnos.

Los dos primeros problemas se resolvieron sin mayores dificultades, pero debido a la longitud y complejidad del texto, el tercer problema lo resolvimos de manera conjunta paso por paso analizando cada frase por separado. Trabajar de esta manera me pareció bastante positivo, ya que los alumnos mostraban bastante interés por saber la solución a la edad de Diofanto y el nivel de participación y motivación fue alto.

Es cierto que la unidad didáctica que estaba impartiendo a lo largo de mis prácticas era la de Funciones, pero el examen que se estaban preparando también abarcaba el bloque anterior de ecuaciones y métodos de resolución, con lo que repasamos el bloque de problemas algebraicos haciendo uso de tres problemas clásicos.

En lo que al examen se refiere, las calificaciones fueron, en media, 0.5 o 1 punto superiores a las de la evaluación anterior. No obstante, la tónica individual de cada alumno no varió mucho, es decir, los alumnos con buenas calificaciones de mantuvieron en el sobresaliente y de los alumnos con la evaluación anterior suspensa consiguieron aprobar dos. Quiero resaltar que aunque es muy válido como indicador, no veo adecuado tomarlo como el único medidor del éxito o fracaso de la innovación. Cabe destacar la valoración positiva de mi tutor sobre la motivación que habían tenido los alumnos a lo largo de mi período de prácticas y el aumento del número de preguntas y la participación de los alumnos.

En líneas generales estuve cómodo desde el primer día dentro del aula, aunque durante las tres oportunidades que tuve para aplicar parte de este Trabajo de Fin de Máster me noté más nervioso por la falta de experiencia y el desconocimiento de la opinión de los alumnos. Me encontré siempre con la disponibilidad absoluta de mi tutor para introducir los métodos que yo quisiera y eso me ayudó a ganar confianza a la hora de introducir la historia dentro del aula. No obstante, me parece que la realidad del centro y el contexto son los que determinan cuándo una innovación es aplicable o tiene posibilidades de salir adelante.

4.1.2. Análisis de la Innovación a Aplicar.

En esta sección se van a analizar conjuntamente las distintas propuestas de este trabajo.

En este Trabajo de Fin de Máster se han detallado cuatro posibles maneras de introducir, en mi opinión, las unidades didácticas más importantes de 4º de ESO (sobre el bloque de funciones no se ha propuesto nada ya que se aplicó en el aula en **3.3.1** y **3.3.2**). Todas las propuestas comienzan con una introducción histórica sobre el tema que se está estudiando con el fin de situar a los alumnos en el contexto social y científico adecuado. Dichas introducciones están adecuadas al nivel curricular de 4º de ESO y se ha intentado hacerlas lo más amenas y participativas posible. De hecho, se anotan frecuentemente indicaciones para favorecer el dinamismo y la participación de los alumnos durante estos períodos de las sesiones.

Los ejercicios que se han propuesto persiguen los objetivos de este trabajo. Es cierto que no todos tienen un componente histórico, pero en su totalidad han seguido con la introducción con el fin de dar continuidad al contenido teórico. El orden en el que se han planteado responde al objetivo principal de elaborar la teoría desde el ejemplo concreto paso a paso. Una posible mejora podría ser la intercalación de la teoría con los ejercicios propuestos, con el fin de amenizar y dar mayor sensación de bloque a todo el proceso de innovación, es decir, evitar la sensación de estar recibiendo una charla de historia para después volver a una clase de matemáticas por parte del alumno.

Creo que el punto más fuerte de este Trabajo es el potencial que tienen las anécdotas, las distintas formas de trabajar y algunos problemas planteados de forma innovadora para llamar la atención del alumno y evitar que se convierta en un sujeto pasivo.

Además, en **3.4.1** y en **3.4.3** se fomenta el método genético al que se hace referencia en el marco teórico de este trabajo cuando se trata el tema de la importancia didáctica de la historia. En **3.4.1** el alumno tiene que seguir los mismos procedimientos que utilizaban los griegos para la construcción de números irracionales y después representarlos en la recta real con el fin de que vean que la recta real sin estos números no es más que una línea infinita que hay que rellenar. En **3.4.3** Son los alumnos los que una vez que conocen lo básico sobre trigonometría, utilizan sus conocimientos en geometría para establecer las principales identidades trigonométricas. No obstante, conseguir este efecto en el aula requiere un estudio previo del grupo para establecer la manera más positiva de trabajar.

4.1.3. Análisis de las Competencias Trabajadas.

En esta sección se analizará, en cada caso, las competencias clave y los distintos estándares de aprendizaje evaluables que se han trabajado. Según el Decreto 48/2015, de 14 de mayo del Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, nº 118, 2015, 20 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, las competencias clave a trabajar son las siguientes:

1. Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología. **CMCT**.
2. Competencia para Aprender a Aprender. **CPAA**.
3. Conciencia y Expresiones Culturales. **CEC**.
4. Competencia en Comunicación Lingüística. **CCL**
5. Competencia Digital. **CD**.
6. Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor. **SIE**.
7. Competencias Sociales y Cívicas. **CSC**.

Con el fin de sintetizar y hacer más visual este análisis, se presentan las siguientes tablas donde se indica qué competencias clave y que estándares de aprendizaje evaluables se trabajan en cada sesión. Para ello, a cada sesión se le asignará el número que tiene en el índice, y a cada competencia sus siglas antes indicadas:

	CMCT	CPAA	CEC	CCL	CD	SIE	CSC
3.3.1	X	X	X				X
3.3.2	X	X	X				X
3.3.3	X		X	X			X
3.4.1	X		X		X		X
3.4.2	X		X				X
3.4.3	X	X	X		X		X

Cuadro 4.1: Sesiones y Competencias Clave

- La Competencia Matemática: El contenido de las sesiones trata sobre conocimientos matemáticos.
- Conciencia y Expresiones Culturales: Como uno de los objetivos principales de este Trabajo de Fin de Máster, en cada sesión se introduce contenido histórico, social y cultural.
- Competencia Social y Cívica: En cada sesión se fomenta el trabajo cooperativo, la ayuda entre iguales y la participación.

Como se puede ver, se trabajan todas las competencias salvo una. En la sesión 3.3.3 se trabaja la Competencia en Comunicación Lingüística, ya que los problemas que se presentan a los alumnos requieren de una buena comprensión lectora. La Competencia Digital se desarrolla en las sesiones 3.4.1 y 3.4.3 mediante el posible uso de los ordenadores al trabajar con el Tangram y con la cincunferencia goniométrica. Por último, la Competencia Para Aprender a Aprender se trabaja en las sesiones donde se fomenta la puesta en práctica de los conocimientos anteriores así como la cooperación entre los alumnos. En las sesiones 3.3.1 y 3.3.2 los alumnos deben recordar lo aprendido sobre los sistemas de coordenadas y sobre la representación de funciones además de resolver conjuntamente ejercicios de dificultad gradual. En la sesión 3.4.3 los alumnos deben aplicar sus conocimientos previos en geometría (Teoremas de Tales y Pitágoras, semejanzas...) para resolver las ecuaciones trigonométricas y así utilizar sus propias destrezas para elaborar la teoría.

A continuación se presenta una tabla donde se explica la relación entre las sesiones desarrolladas y algunos de los estándares de aprendizaje evaluables:

	3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.4.1	3.4.2	3.4.3
Utiliza los distintos tipos de operaciones de manera adecuada a cada contexto.	X	X	X	X	X	X
Utiliza con destreza el lenguaje algebraico para construir y representar expresiones algebraicas.	X	X	X		X	
Representa y analiza situaciones matemáticas mediante el uso de inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas.		X	X	X	X	
Utiliza las unidades angulares adecuadas a cada contexto así como las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas.						X
Calcula magnitudes realizando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales utilizando las herramientas y fórmulas adecuadas.		X	X	X		X
Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas adecuadas.						X
Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.	X	X				
Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.	X	X			X	X
Reconoce los distintos tipos de números e interpreta correctamente alguna de sus propiedades.			X	X		
Usa el vocabulario matemático adecuado.	X	X	X	X	X	X
Perseverancia, superación y rigor en la tarea.			X	X		
Autoevaluación del proceso y el resultado		X	X		X	
Respeta las opiniones de los demás. Practica diálogo, mediación, arbitraje y consenso.	X	X	X	X	X	X
Colaboración en las tareas de grupo.	X	X	X	X	X	X
Valora la aportación de otras culturas al desarrollo de las matemáticas.	X		X	X	X	X
Presentación clara y ordenada.	X	X				X

4.2. CONCLUSIONES.

Este Trabajo de Fin de Máster consta de dos partes: una parte que se ha llevado al aula y otra que propone intervenciones y formas de introducir los diversos elementos del currículo de 4º de ESO.

Respecto a la parte de propuestas (**3.4**) creo que el nivel es el adecuado para un grupo de 4º de ESO de matemáticas académicas. Si tomo como referencia la experiencia de las prácticas, con un análisis previo del nivel y composición del grupo, el contenido histórico y el nivel de los ejemplos podría adaptarse para conseguir mayor aceptación y la posterior consecución de los objetivos de este Trabajo de Fin de Máster.

Respecto a la parte práctica, estas semanas me han servido para darme cuenta de lo complejo que es este trabajo debido al enorme factor humano que tiene. Una metodología puede ser positiva para un grupo en concreto pero en la siguiente hora de clase puede resultar un desastre. Incluso una forma de enseñar puede ser muy positiva a nivel individual para cada alumno pero en términos de grupo puede no tener el efecto deseado.

Efectuar un cambio en la metodología siempre es complicado, pero para poder evaluar si se han cumplido los objetivos es necesario mucho tiempo y diversos elementos de evaluación. En este caso estoy contento acerca de los resultados obtenidos pero creo que el tiempo del que he dispuesto a sido insuficiente.

Al acabar el período de prácticas he percibido una mejoría en la actitud en clase, pero sobre todo en el interés por la asignatura. No obstante, para poder aplicar una metodología concreta hace falta un estudio previo del grupo y una implantación paulatina de la misma. No sé hasta que punto ha sido positivo para los alumnos las dos semanas de cambio que supusieron mis prácticas si luego iban a continuar con la metodología anterior. Por ello, a parte de ser gradual a la hora de cambiar la forma de enseñar, hay que poder mantenerla durante un tiempo prolongado para poder obtener conclusiones de mayor relevancia.

A pesar de todo, aunque haya sido breve, esta fase de prácticas me ha demostrado que parece positivo enseñar siendo un profesor guía más que un profesor oráculo del que los alumnos memorizan.

Referencias

Alzina, R. B. (2004). *Metodología de la investigación educativa* (Vol. 1). Editorial La Muralla.

Bell, E. T., y Bourbaki, N. (1949). Historia de las matemáticas. *Fondo de Cultura Económica,*.

BOCM. (2015, 20 de mayo). *Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del consejo de gobierno, por el que se establece para la comunidad de madrid el currículo de la educación secundaria obligatoria.* (n.º 118).

Cohen, I. (1968). *La imaginación humana y la naturaleza, fronteras del conocimiento.* Eudeba.

Collette, J.-P. (1991). *Historia de las matemáticas 1.* Siglo XXI.

De Guzmán, M. e. a. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática.* Olimpíada Matemática Argentina.

Fullan, M. (1992). *The meaning of educational change.* Taylor & Francis.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*, 7-34.

González, M. T., y Escudero, J. M. (1987). *Innovación educativa: teorías y procesos de desarrollo.* Editorial Humanitas, SL.

González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *9*(3), 281–289.

González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*(45), 17–28.

Houzel, J. C. (1977). Historia de las matemáticas y enseñanza de las matemáticas. *En Bibiloni (y otros) Materiales para una dis- cusión sobre la enseñanza de la historia de la ciencia y su posi- ble uso didáctico, Univ. Barcelona*.

Kline, M. (1980). El fracaso de la matemática moderna; por qué juanito no sabe fumar. *Siglo XXI*.

Munguía, S. S. (1992). *Los juegos olímpicos: educación, deporte, mitología y fiestas en* *la antigua grecia.* Anaya.

Navarro, V. (1980). *Introducción de las actas del simposio sobre "la historia de las ciencias y la enseñanza".*

Orton, A. (1996). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula* (Vol. 14). Ediciones Morata.

Paredes, J., De la Herrán, A., Santos Guerra, M. A., Carbonell, J. L., y Gairín, J. (2009). La práctica de la innovación educativa. *Madrid: Síntesis.*

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática.* Huerga y Fierro Editores.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. *El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la matemática*, 109–131.

Sierra, M., y González, M. T. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. *Universidad de Granada.*

Tejada, J. (1995). El papel del profesor en la innovación educativa. algunas implicaciones sobre la práctica innovadora. *Educar*(19), 19–32.

Vázquez, M. S. (2000). El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza. *Números*(43), 93–96.