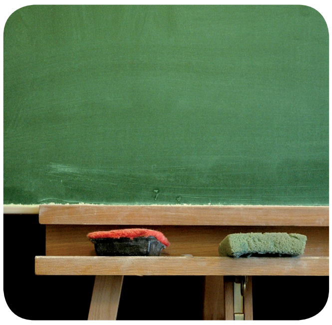
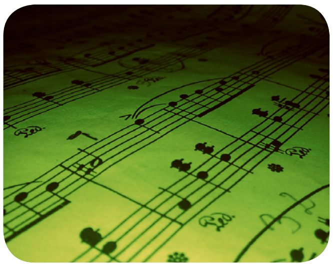
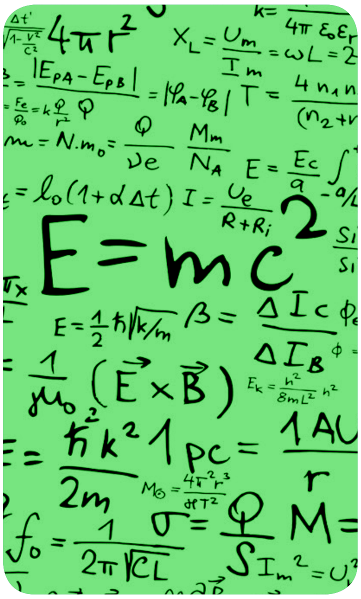






MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de Profesorado y Educación / 15-16

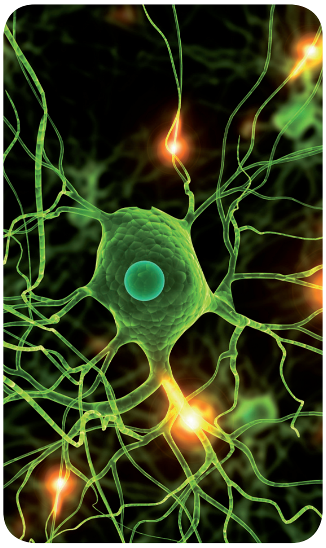
(MESOB) Especialidad de Matemáticas

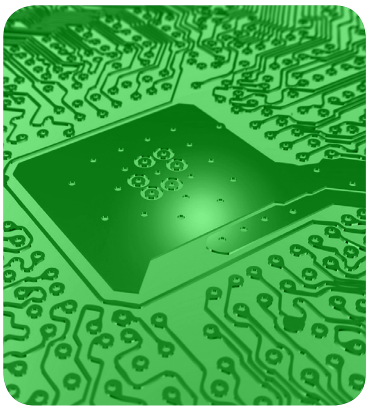
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Campus Internacional excelencia UAM CSIC+

Matemáticas en clave de música. Propuesta de aplicación en el aula de Secundaria

Raquel Urbón Saneiro





UAM EDICIONES

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Título: **Matemáticas en clave de música. Propuesta de aplicación en el aula de secundaria**

Autora: Raquel Urbón Saneiro

Director: Javier Peralta

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Curso: 2015/2016

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

MATEMÁTICAS EN CLAVE DE MÚSICA

PROPUESTA DE APLICACIÓN EN EL AULA DE SECUNDARIA

TRABAJO FIN DE MÁSTER
Especialidad: Matemáticas

Raquel Urbón Saneiro
Tutor UAM: Javier Peralta

Curso 2015/2016

Resumen

Este trabajo trata de hacer una propuesta didáctica de aplicación para la etapa educativa de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato a partir de la recopilación y análisis de estudios y experiencias que aúnen de forma interdisciplinar las materias de matemáticas y música. Se ha partido de una breve visión histórica de la relación entre ambas disciplinas con el fin de sentar una base del conocimiento de su evolución. Se comentan las estructuras matemáticas que intervienen en la música y que, a su vez, pueden ser de aplicación en las aulas y se han analizado las conexiones curriculares entre ambas materias según la normativa vigente en la Comunidad de Madrid. Con todo ello se aborda una propuesta didáctica interdisciplinar, basada en el aprendizaje activo y la experimentación.

Palabras clave: música, matemáticas, aprendizaje significativo, propuesta interdisciplinar,

ÍNDICE

1 Introducción

"La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando". Leibniz

La relación entre la música y las matemáticas es conocida desde la época de Pitágoras. Siempre se han establecido vínculos entre la música y las matemáticas aludiendo a las relaciones temporales y espaciales entre ambas, conexión que ha sido plasmada a lo largo de los siglos en diferentes tratados de música elaborados por ilustres matemáticos como Descartes, Mersenne, Euler, etc., al igual que numerosos músicos han recurrido a las matemáticas, tanto para explicar aspectos musicales (como Bach, Mozart, Chopin…), como para componer obras (como Bartók o Xenakis).

QUADRIVIUM

Aritmética "números en reposo"
Geometría "magnitudes en reposo"
Música "números en movimiento"
Astronomía "magnitudes en movimiento"

A pesar de que hoy en día la música es, sin duda, una de las bellas artes, en sus orígenes era considerada una ciencia matemática que formaba parte del *Quadrivium* (saberes exactos) junto a la aritmética, la geometría y la astronomía, que constituían las cuatro ciencias básicas de la educación en la Edad Media; a partir del siglo XVII, en el Renacimiento, la música se fue transformando lentamente de ciencia a arte, aunque el interés entre ambas disciplinas se mantuvo.

Tal como describe Susan Wollenberg, música y matemáticas comparten algunas de sus propiedades más elementales: ambas tienen un sistema de notación específico antiguo, una codificación concreta que requiere que el emisor codifique el mensaje y el receptor lo descodifique, basado en siglos de utilización y apoyados por los nuevos desarrollos contemporáneos (Wollenberg, 2003). Las dos tienen un lenguaje universal y abstracto que requiere de estudio previo. Las Matemáticas estudian las cantidades, las formas, sus relaciones y sus variaciones. La Música es la combinación y variación de ciertas cantidades (frecuencia, intensidad) en un mismo instante (armonía) y a lo largo del tiempo (ritmo, melodía). La teoría matemática de la música usa estructuras y técnicas aplicadas desde el análisis de obras musicales, en las que posiblemente su uso fuera de forma intuitiva (el uso de las notas, su orden, el tempo, el ritmo…), hasta su utilización consciente como fuente de inspiración para la composición musical contemporánea, siendo a su vez una herramienta elemental en el estudio de los procesos físicos del sonido (teoría de ondas); las matemáticas están en la propia esencia de la música (Liern & Queralt, 2008 a). Es por ello que los procesos cognitivos del aprendizaje de ambas disciplinas pueden retroalimentarse mutuamente ayudando una al aprendizaje de la otra.

En general, muchos alumnos consideran las matemáticas una asignatura complicada a la que muchos temen. En ocasiones, este miedo puede dificultar la capacidad de aprendizaje de las personas que afrontan la materia en un estado de indefensión aprendida al tener la percepción de no poder hacer nada para cambiar su comprensión matemática. Una de las razones a esta aversión es el hecho de abordar su enseñanza desde una perspectiva cerrada y fría, sin conexión con otras áreas del conocimiento (Peralta, 1998). Por ello parece fundamental abordar la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque más amable, didáctico y aplicado. Es importante motivar el aprendizaje con un punto de vista interdisciplinar, e incluso intercultural, más adaptados a la realidad social y cultural de hoy en día. Las matemáticas no son un ente aislado de conocimientos, son, entre otras cosas, una herramienta que nos ayuda a comprender el mundo que nos rodea y a desenvolvernos en él. Están implícitas en multitud de áreas de la vida, y la música es una de ellas.

La didáctica interdisciplinar de las matemáticas y la música es una buena alternativa a las estrategias clásicas de la pedagogía matemática, una forma de enseñar haciendo que se pierda el miedo a esta materia y a través de un hilo conductor atractivo y motivador como es la música en sus diferentes facetas. La música tiene una clara ventaja pedagógica de la que las matemáticas carecen: pues la música gusta, motiva y es atractiva para una gran mayoría de personas de toda índole.

La música es mundialmente reconocida como un lenguaje propio, una forma de expresar y comunicar, y como tal necesita de un código de codificación y descodificación de la información, es decir, precisa de la transcripción a lenguaje musical y, por tanto, su conocimiento por parte de las personas que lo escriben y leen. Este código particular de la música es el que nos hace percibirla como algo agradable y bello sin saber muy bien por qué, sin embargo, si nos fijamos en lo que nuestro cerebro percibe veremos que tiene mucha relación con las matemáticas: ritmo, proporción, geometría, orden, equilibrio…; elementos que hacen sentir placer al cerebro. Efectivamente, la música nos resulta agradable y no hay duda de que tiene matemáticas implícitas, a pesar de que el receptor, e incluso el emisor, ignoren esta relación.

Este trabajo no pretende ser un aporte novedoso a los numerosos estudios que ya existen desde tiempos remotos; es en primer lugar un trabajo de investigación que busca recoger parte de la historia de esta relación armoniosa entre dos materias aparentemente tan dispares; y, en segundo lugar, persigue el objetivo de aunar referencias para proponer planteamientos didácticos en las aulas de enseñanza Secundaria: estos son los principales objetivo de este trabajo, tal y como se detallará más adelante. Se trata además de realizar un enfoque interdisciplinar, con una metodología de enseñanza participativa que haga a los alumnos descubrir por si mismos la relación que las matemáticas tienen con la música, de forma que cobre protagonismo el aprendizaje significativo de una materia tradicionalmente tratada de forma abstracta e inconexa. En definitiva, se pretende acercar las matemáticas a los alumnos de Secundaria desde su aplicación en el campo de la música, disciplina motivadora y atractiva que rompe con la visión frecuentemente opuesta que se tiene de las matemáticas, creando un entorno de aprendizaje con mayores oportunidades de motivar y enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Propongamos entonces estudiar al 'son de las matemáticas'.

2 Marco teórico

2.1 Visión histórica

Tal y como relata Pablo Amster, doctor en Matemáticas por la Univeridad de Buenos Aires, en el prólogo de su libro '¡Matemática, maestro!', (Amster, 2013) "es posible reconocer en la música una gran variedad de nociones matemáticas, tales como la simetría, las proporciones, las relaciones numéricas entre frecuencias e intervalos, el ritmo o las reglas de la armonía". Por ello, no es casualidad que estudiosos de un ámbito se hayan interesado por el otro.

En el periodo greco-romano, la música formaba parte de las matemáticas, englobándose en las siete Artes Liberales, pilar de la enseñanza en la Edad Media. Esta relación cambió con la llegada del Renacimiento (siglo XVI) y el nuevo enfoque de las artes, la filosofía y las artes; si bien, en realidad, fue a partir del siglo VII cuando la música empezó a virar de ciencia a arte, aunque el interés por la relación entre ambas se mantuvo durante mucho tiempo. Este periodo fue realmente importante para ambas disciplinas.

A lo largo de la historia han sido muchas las aportaciones matemáticas al campo de la música, en especial en los siglos XVII, XVIII y XIX con Descartes, Brouncker, Mersenne, Newton, Galileo, Kepler, Kircher, Leibniz, Huygens, Euler, Lambert, Lagrange, D'Alembert, Birkhoff, Mazzola, etc. Y a la inversa, músicos y teóricos de la música que han utilizado conceptos matemáticos en sus composiciones musicales, algunos de forma intuitiva o incluso inconsciente, como son Bach, Mozart, Zarlino, Xenakis, Bartók, Schillinger o Schoenberg.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la conexión entre ambas disciplinas fue establecida hace siglos, muestra de ello son las frases de célebres matemáticos y compositores haciendo referencia a esta relación:

- Leibniz: '*La música es un ejercicio de aritmética secreta', 'La música es el placer que el alma experimenta contando sin darse cuenta de que cuenta'*
- Zarlino: '*La música se ocupa de los números sonoros'*
- James Joseph Sylvester: *¿Acaso no puede describirse la música como la matemática de lo sensible, y la matemática como la música de la razón? El alma de cada una de ellas, la misma.*

Comentaremos a alguno de ellos y sus principales aportaciones:

a) De Pitágoras (s. VI a.C.) al Renacimiento (s. XV-XVI).

Pitágoras es considerado como el padre de las matemáticas y Thales como el primer matemático. A él se le adjudican las primeras relaciones entre matemáticas y música a través de la armonía y los intervalos musicales, que relacionó a su vez con las distancias a los planetas. Inventó el monocordio, que como su nombre indica, era un instrumento musical de una sola cuerda a través del cual demostró que la altura del sonido (su frecuencia, aunque este término no se definió hasta el s. XVII) es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda. Pitágoras y sus discípulos profundizaron en los intervalos musicales como fuente de nociones matemáticas, establecieron la armonía musical y sus relaciones como una relación de números proporcionales.

Los pitagóricos consideraban que todo el universo era armonía y número, ejerciendo una gran influencia hasta el Renacimiento. Prueba de ello era el uso de las relaciones armónicas y las proporciones musicales en otras disciplinas como la arquitectura y el arte, en las que la armonía musical ejercía gran influencia como vía de expresión de la belleza. Vitrubio, arquitecto del siglo I a.C, se basó en la armonía musical establecida por Pitágoras para definir las proporciones del cuerpo humano, como veremos luego. También se usaron las proporciones musicales pitagóricas en los estudios de astrología. Para los griegos, la teoría matemática de la música formaba parte de la *Armonía del Cosmos*, teoría basada en la idea de que el universo se rige por proporciones numéricas armoniosas y el movimiento de los cuerpos celestes se rige según proporciones musicales. Según esta teoría, las distancias entre planetas corresponden a los intervalos musicales. Los pitagóricos consideraron que cada esfera celeste producía un sonido, las más cercanas daban tonos más graves y las más alejadas más agudos, todos ellos combinados de forma armónica (teoría de la armonía de las esferas o música de las esferas).

b) Siglo XVII-XIX. Matemáticos y científicos.

La concepción clásica de la música como parte de la disciplina matemática permaneció durante la Edad Media, pero con la llegada del Renacimiento la teoría musical empezó a distanciarse de las teorías pitagóricas creando nuevos estilos musicales. Tal como comentan R. Ríos y M. García, “el cambio de paradigma musical puede verse en la evolución del canto monódico gregoriano, que poco a poco se fue trasformando en música polifónica con diferentes instrumentos y voces" (Ríos & García, 2003). Al mismo tiempo, con el desarrollo de nuevas composiciones musicales más complejas, se desarrollaron nuevos sistemas de afinación como el Zarlino o de justa entonación y el sistema temperado (el más utilizado en la actualidad). Durante este periodo de tiempo, la teoría musical sufre una importante transformación debido a los avances científicos y al descubrimiento de la ciencia acústica.

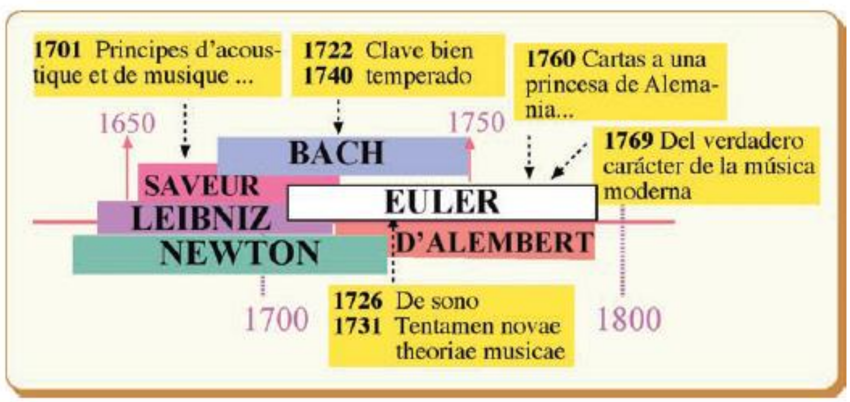


Ilustración 1. Cronología de algunos matemáticos y teóricos de la música. Fuente: **(Liern, 2012, pág. 94)**.

c) Siglo XVII-XX. Músicos y teóricos musicales.

Mientras la música fascinaba a los matemáticos, los músicos eran atraídos por las posibilidades de incorporar las matemáticas en el análisis y composición de sus obras. Algunos compositores clásicos compusieron sus obras basándose, a veces de forma intuitiva, en estructuras matemáticas y patrones estéticos y geométricos, como Bach, cuya obra está llena de estructuras geométricas y claves numéricas, o Chopin, quien utilizó aritmética modular al poner en un dodecágono las 24 tonalidades existentes. Otras veces utilizaban recursos matemáticos de forma consciente, como es el caso de Mozart y su Juego de Dados en el que recurrió al cálculo probabilístico a través de un juego de azar para componer valses. Por otro lado, a partir del siglo XIX-XX es cuando surge la necesidad de crear nuevas composiciones musicales al margen de los cánones compositivos clásicos, naciendo un nuevo estilo de música compuesta a partir de estrechas relaciones matemáticas. Destacan músicos y compositores como Schillinguer, considerado el padre de la música por ordenador (ilustración 4), Xenakis, cuya obra está repleta de matemáticas (ilustración 5), Schöenberg, creador del dodecafonismo, Bartók, quien utiliza la sucesión de Fibonacci y crea una nueva escala (ilustración 2 y 3), o Mazzola, cuyas composiciones se acompañan de un apéndice matemático para comprender la obra. Esto se resume en la siguiente frase: “Tanto la música fractal, como los métodos de composición de Schillinguer o la música de Xenakis son ejemplos de cómo en el último siglo la música se ha servido de las matemáticas para enriquecerse” (Ríos & García, 2003).

Ilustración 2. Escala Fibonacci de Bartók.

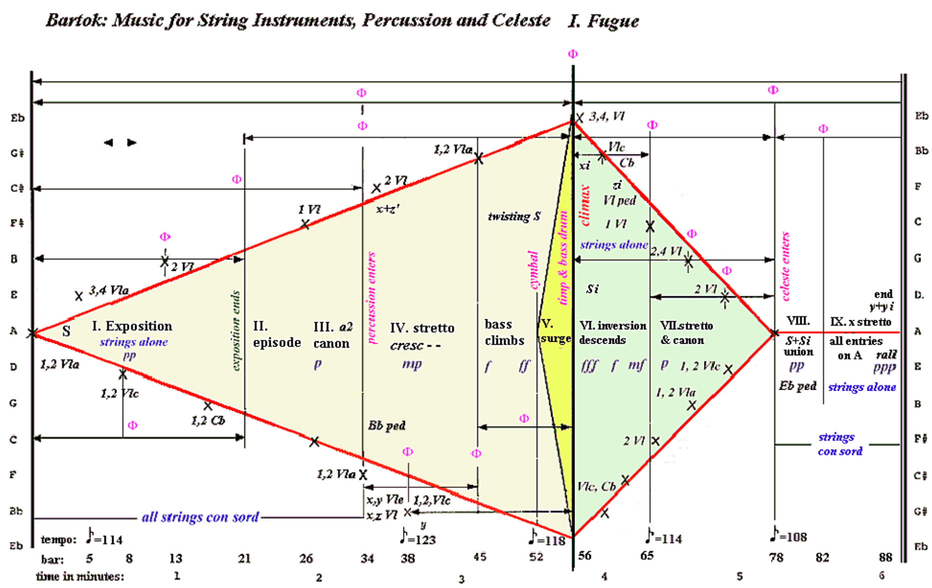


Ilustración 3. *Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta* de Bartók. análisis de la fuga en relación a Fibonacci. Fuente: (Departamento de Matemáticas, IES de Pravia, s.f.)

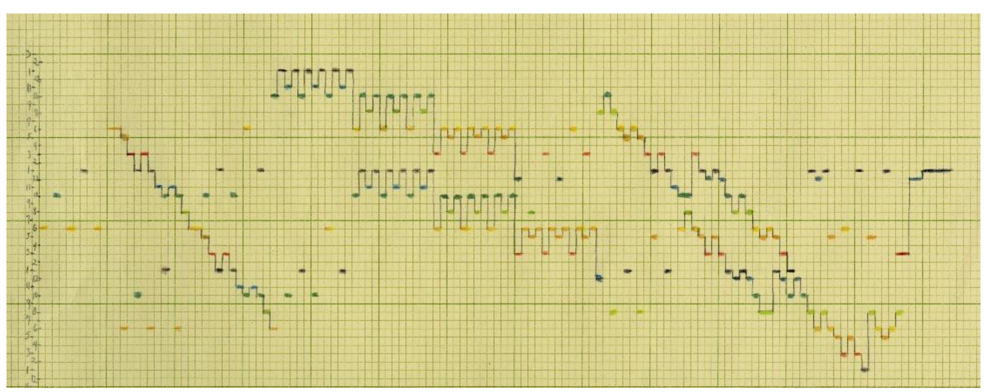


Ilustración 4. Representación de la invención nº8 en fa Mayor de Bach con el sistema Schillinger. Fuente: (Gómez, 2015 a).

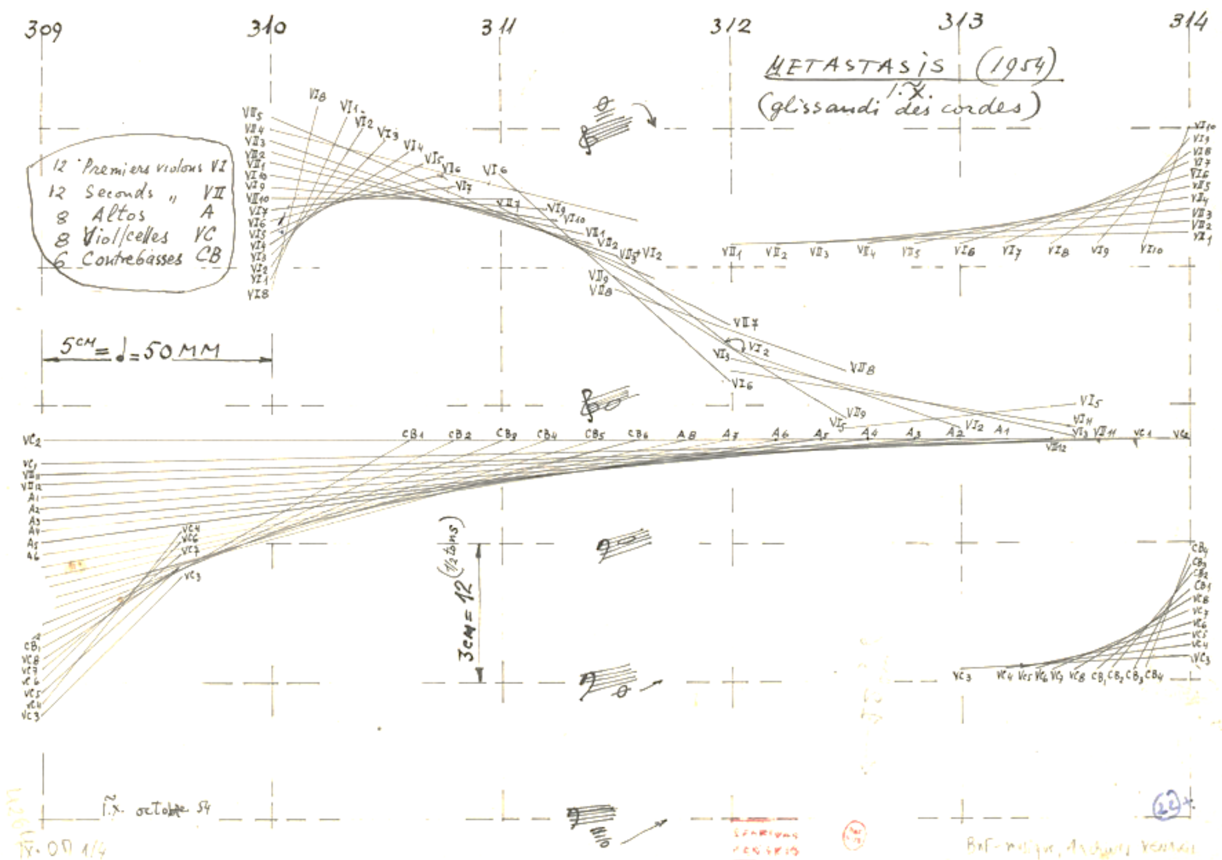


Ilustración 5. Study for Metastasis, 1954, Xenakis. Fuente: **(Kussatz, 2011)**

2.2 Antecedentes educativos en España

Con la última reforma educativa (LOMCE) la música, como materia del ámbito artístico, ha sido maltratada respecto a otras áreas del conocimiento, relegada a asignatura optativa en todas las etapas educativas, aunque algunas comunidades autónomas, como Madrid, han decidido mantenerla como obligatoria en algunos cursos. En contrapartida, ante los malos resultados de España en los informes PISA, se han aumentado las horas dedicadas a materias troncales como las matemáticas, pero no se han planteado modificaciones cualitativas encaminadas a una mejora de la enseñanza que promuevan diferentes metodologías de enseñanza más adaptadas a la realidad social actual. No hay una apuesta por la educación integral desde modelos interdisciplinarios, sino que, a nivel legislativo y práctico, seguimos enseñando de forma tradicional, con materias independientes, de modo inconexo y con clases-discurso del profesor.

A pesar de los estudios existentes que demuestran los beneficios de las ramas artísticas, en especial de la música, y la importancia de las inteligencias múltiples y el desarrollo de capacidades en la educación y el aprendizaje, la música pierde su presencia y su peso en nuestro sistema educativo. Aun así, hay centros educativos que ponen su grano de arena para invertir esta situación, apostando por el trabajo integrador del conocimiento.

Actualmente existen algunos proyectos que apuestan por el potencial pedagógico y didáctico de la confluencia de las matemáticas y la música en un mismo camino. En este sentido, en el curso 2013/2014 se puso en marcha el proyecto europeo 'European Music Portfolio: Sounding Ways into Mathematics' (EMP-M). En España colabora la Universidad Autónoma de Barcelona, a través de la cual se está trabajando en este proyecto, bajo el nombre de 'Musicomàtics', en diversas escuelas de primaria de Cataluña. El objetivo del proyecto es el trabajo conjunto de habilidades matemáticas y musicales desde una perspectiva competencial, y la formación del profesorado en esta metodología interdisciplinar. En nuestro país todavía está poco presente la confluencia de ambas materias con la educación, aunque la investigación y bibliografía internacional sobre el tema es amplia. Tal y como apuntan A. Casals, C. Carrillo y C. González-Martín en su artículo 'La música también cuenta: combinando matemáticas y música en el aula', en el que tratan la situación nacional e internacional de la relación música-matemáticas, existen algunas prácticas docentes en este sentido, aunque no suelen publicarse ni difundirse y por tanto no son conocidas, dificultando la recopilación de experiencias (Casals, Carrillo, & González-Martín, 2014) y los estudios en este campo.

Aunque casi todas las propuestas educativas existentes en España están orientadas a las etapas de infantil y primaria, en Secundaria existen algunos talleres puntuales como los realizados por Divermates (*Música quebrada*), Caixaforum (*Quan els números canten*) o el espectáculo en clave de humor de *Materritmo* propuesto desde el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid. No se ha encontrado un proyecto didáctico de enfoque interdisciplinar y de aprendizaje significativo que aúne ambas materias en esta etapa educativa de la misma manera que lo hacen, por ejemplo, el proyecto del EMP-M, *Musicomàtics*[1], en escuelas de primaria de Cataluña, o algunos colegios del programa *Tàndem*[2], también en Cataluña. En este último caso, el proyecto educativo se centra en la especialización en una materia que vertebra el currículum del centro educativo, como el Tándem ESMUC-Escola Poblenou[3], cuyo objetivo es el aprendizaje de todas las materias del currículo a través de la música como eje de referencia; su objetivo no es formar músicos ni preparar a los alumnos para el acceso a estudios profesionales de música como es el caso de los institutos especializados en Bachillerato de artes y los que tienen planes de estudios ordinarios adaptados a estudiantes de Conservatorios.

En etapas educativas superiores existen algunas apuestas por esta visión interdisciplinar de dos materias, como por ejemplo la asignatura de *Música y Matemáticas*[4] que la Universidad Politécnica de Cataluña ofrecía como libre elección en la Facultad de Matemáticas y Estadística en los años 2005-2010. O asignaturas de disciplinas universitarias del campo de la física como la acústica o la ingeniería de ondas, que por su propia particularidad y contenido curricular unen directamente la música con las matemáticas, aunque a un nivel muy superior al requerido en Secundaria Obligatoria y Bachillerato, y principalmente desde el tratamiento físico de la música. En la red también se puede encontrar algún trabajo de fin de grado de magisterio en el que se desarrollan propuestas pedagógicas para infantil y primaria. Por otro lado, algunos conservatorios de música ofrecen en su programación materias optativas de *matemáticas básicas para músicos*[5], como es el caso del Conservatorio Superior de Granada, o el *curso de música y matemáticas* del Conservatorio Superior Manuel Castillo de Sevilla, aunque no es una materia obligatoria en el currículo de las enseñanzas musicales reguladas por normativas estatales.

Por otro lado, en el ámbito académico nacional encontramos varias fuentes de acceso público en las que sí se trata el vínculo músico-matemático desde diferentes niveles y enfoques, tanto

[1] Proyecto 'Musicomàtics' de EMP-M: https://musicomatics.wordpress.com/
[2] Programa 'Escoles Tàndem': http://escolestandem.cat/
[3] https://sites.google.com/a/xtec.cat/escola-poblenou/projectes/projecte-tandem
[4] *Música y matemáticas*, UPC : http://www-ma4.upc.es/~xgracia/musmat/
[5] Guía docente: http://www.conservatoriosuperiorgranada.com/document/guiasdocentes15-16/Composicion/acompanamiento15-16/MATEMATICAS%20BASICAS%20PARA%20MUSICOS%20OP.pdf

matemáticos como pedagógicos, aunque no tanto musical. Encontramos escasos artículos en revistas musicales como la *Revista Electrónica LEEME*. En este sentido destacan dos publicaciones relevantes de carácter divulgativo en el campo de las matemáticas:

Divulgamat.- Centro virtual de divulgación de las matemáticas promovido por la Real Sociedad Matemática Española (RSME). En su página web encontramos numerosos artículos de contenido matemático de diferentes niveles organizados en secciones (algunas dirigidas a alumnos de Secundaria). En concreto, dentro de la sección *Cultura y Matemáticas*, se encuentra la categoría *Música y Matemáticas*, actualmente coordinada por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid), principal autor de contenidos. Esta fuente se mantiene bastante actualizada, aunque los contenidos de la sección suelen enfocarse al análisis teórico del tema y no tanto a su aplicación pedagógica en niveles de Educación Secundaria.

SUMA.- Revista sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas editada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Hasta hace pocos años tenía una sección dedicada a música y matemáticas, *Musymáticas*, cuyo coordinador y principal autor era Vicente Liern Carrión (Universidad de Valencia). Sus aportaciones incluyen propuestas pedagógicas de actividades para realizar en el aula, como el cuadernillo elaborado para la celebración del Día Escolar de las Matemáticas (Liern & Queralt, 2008 a), orientado a educación primaria.

En este mismo campo académico se incluyen diversos trabajos realizados en el ámbito universitario, Trabajos de Fin de Grado de magisterio y Trabajos de Fin de Máster que demuestran el interés de los futuros docentes por estos nuevos modelos de enseñanza-aprendizaje interdisciplinar en las aulas de colegios e institutos.

3 Objetivos

La finalidad principal de este trabajo es recopilar experiencias y estudios existentes en el ámbito nacional, referentes a propuestas didácticas que trabajen matemáticas y música bajo un mismo enfoque pedagógico, e investigar sobre ellas, con el objetivo de conocer su estado actual y plantear una propuesta didáctica en la etapa de la educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato que ayude a que los alumnos tengan una visión práctica de las matemáticas por medio del autoaprendizaje y la motivación. Por tanto, la finalidad no es tan solo innovar, crear algo nuevo, sino proponer didácticas acordes a la realidad de las aulas. La música es un tema que despierta curiosidad y por tanto ayuda a comprender y desarrollar otras materias con las que se vincula.

En concreto, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Recopilar y analizar experiencias y estudios realizados sobre relaciones entre música y matemáticas.
- Conocer las estructuras matemáticas que intervienen en la música y que pueden ser de aplicación en las etapas educativas de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
- Encontrar las conexiones curriculares entre ambas materias en el contexto normativo actual (LOMCE).
- Hallar vías que permitan trabajar conceptos matemáticos y musicales con diferentes puntos de vista.
- Elaborar propuestas de actividades desde un enfoque interdisciplinar, basadas en la experimentación y en un aprendizaje significativo.

4 Propuesta didáctica

4.1 Metodología

Tal y como se ha comentado anteriormente, se proponen una serie de actividades para trabajar ambas materias siguiendo las siguientes premisas en cuanto a su planteamiento metodológico:

- Enfoque interdisciplinar.
- Perspectiva heurística en la que sean los propios alumnos los constructores de su aprendizaje a través de la experimentación y el aprendizaje significativo y activo.
- Trabajo de las competencias clave.

- Potenciar la creatividad y reflexión sobre el trabajo que se desarrolla en el aula.
- Desarrollo del trabajo en grupo y autónomo.
- Inicio de las clases con música. Intercalar audiciones durante la sesión.
- Uso de recursos audiovisuales y tecnológicos.

En este sentido se ha tomado como base de trabajo el planteamiento de George Pólya: poner a prueba la curiosidad de los alumnos planteando problemas adecuados, ayudarles a resolverlos formulando preguntas estimulantes, despierta el gusto por el pensamiento independiente. (García, J. citando a George Pólya, 1945). El profesor deja de ser el protagonista de la clase para pasar a ser el guía del proceso de enseñanza-aprendizaje, los protagonistas son los alumnos y los contenidos que se trabajan en el aula han de ser acordes al perfil del alumnado, a su motivación e intereses. Se aprende a través de la experiencia y la interacción. En este sentido es importante la coordinación y preparación del profesorado puesto que se requiere de la participación activa de profesores de ambas materias. En general, los profesores de matemáticas no son especialistas en música, ni los profesores de música son matemáticos.

El trabajo en el aula se organizará en pequeños grupos de 4 alumnos que trabajan bajo la ayuda y guía del profesor, asumiendo cada uno un rol dentro del grupo. Tal y como apunta Peralta, (2011 b), el trabajo en grupos pequeños facilita la gestión y la participación de todos los integrantes, además, en un grupo de 4 se puede subdividir el trabajo por parejas. Al finalizar el tema se expondrán los trabajos de cada grupo en clase, de forma que se trabajen factores importantes como la expresión oral en público, la síntesis de ideas, la conciencia grupal, la capacidad de reflexión y de debate, etc.

Con esta propuesta metodológica en el aula se persigue encontrar el equilibrio entre:

- Currículo e intereses y motivación de los alumnos.
- Homogeneidad y diversidad.
- Métodos pedagógicos informales y formales.
- Intuición y experimentación y argumentación.
- Plantear y resolver problemas y desarrollar estrategias de resolución propias.
- Explicar y dialogar.

La propuesta de actividades se ha planteado desde el punto de vista curricular, buscando las conexiones entre ambas materias según la normativa en vigor, tanto nacional (LOMCE) como autonómica (en este aspecto sólo se ha considerado la legislación de la Comunidad de Madrid). Esto condiciona las posibles propuestas interdisciplinares, ya que, como se ha comentado anteriormente y como se verá en el apartado de conexiones curriculares, música y matemáticas no son asignaturas coincidentes en todos los cursos académicos. Es por ello que el enfoque interdisciplinar y los cursos de aplicación están condicionados por esta problemática.

4.2 Fundamentos matemáticos en la música

Como en cierto modo hemos dicho hasta ahora, hay muchas conexiones entre las matemáticas y la música, algunas son sencillas y otras más complejas. Por ello centraremos este apartado en aquellas estructuras matemáticas que por su nivel de complejidad pueden ser de aplicación en la educación Secundaria Obligatoria, dividiéndolas en las siguientes ramas de las matemáticas: aritmética, funciones, geometría y probabilidad.

a) Aritmética.

Esta rama matemática es en la que podemos encontrar mayor número de conexiones entre música y matemáticas.

- La **notación musical** ayuda a comprender el concepto de **fracción, potencia y proporcionalidad.**
- El **tempo** contribuye al concepto de **medición y velocidad**, sirviendo de eje para realizar cálculos de tiempo.
- El **ritmo** desarrolla la capacidad de **medir** y es una herramienta para trabajar la comprensión del **mínimo común múltiplo y el máximo común divisor**.
- Los **intervalos y escalas** ayudan a trabajar operaciones con **fracciones y potencias**, los **números racionales e irracionales** y los conceptos de **media aritmética, armónica y geométrica**.
- El concepto de **frecuencia y sonido** ayuda a trabajar los **logaritmos**.

- Los **instrumentos musicales** pueden ayudar a trabajar los conceptos de **medida y proporción**, además de los **números irracionales** y su aplicación. Introducen el tema de **sucesiones**.

<u>Notación musical, tempo y ritmo</u>.

La primera relación que encontramos es la relativa a las notas musicales y la escritura de sus figuras y compases. La **notación musical** está relacionada por proporciones, el valor de una nota indica su duración y sigue una relación definida por potencias de 2 de la siguiente forma:

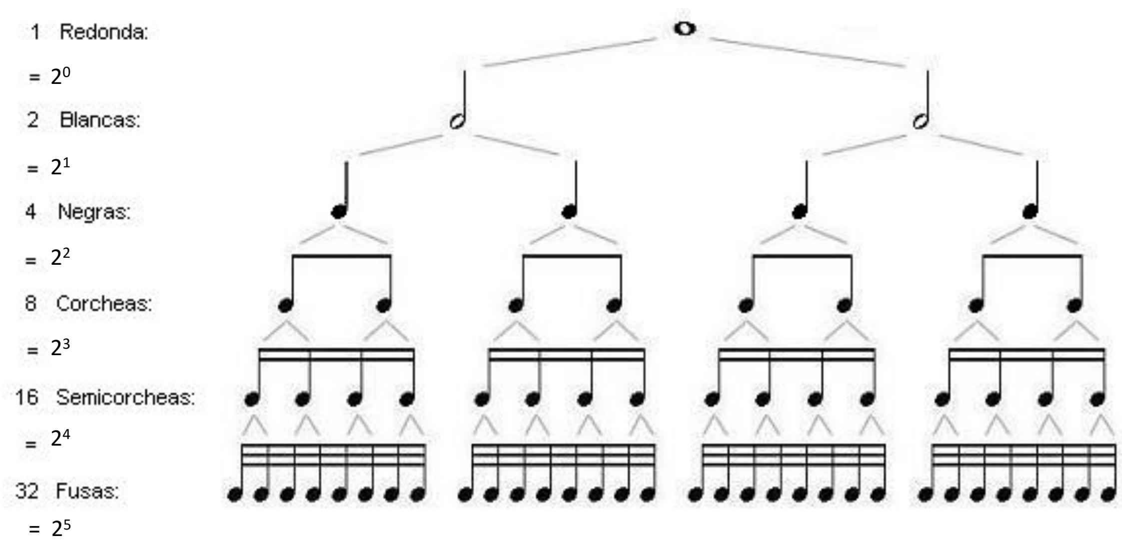


Ilustración 6. Figuras musicales. Adaptado de: (Barraza, 2012)

Si a la redonda le damos valor 1, los valores de las notas y sus silencios equivalentes quedan relacionados entre sí por medio de fracciones y potencias de la siguiente manera:

		𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
REDONDA	𝅝	1	2	4	8	16	32	64
BLANCA	𝅗𝅥	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
NEGRA	♩	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
CORCHEA	♪	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
SEMICORCHEA	𝅘𝅥𝅯	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
FUSA	𝅘𝅥𝅰	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
SEMIFUSA	𝅘𝅥𝅱	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Ilustración 7. Equivalencias entre figuras musicales. Fuente: (Plaza, 2010)

Pero si tomamos como referencia la negra, que es la figura que suele utilizarse para llevar el pulso, obtenemos otra relación diferente:

NOMBRE	FIGURA	SILENCIO	VALOR/PULSOS
Redonda	𝅝	𝄻	4 Tiempos
Blanca	𝅗𝅥	𝄼	2 Tiempos
Negra	♩	𝄽	1 Tiempo
Corchea	♪	𝄾	1 / 2 Tiempo
Semicorchea	𝅘𝅥𝅯	𝄿	1 / 4 Tiempo
Fusa	𝅘𝅥𝅰	𝅀	1/8 Tiempo
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	𝅁	1/16 Tiempo

Ilustración 8. Figuras musicales y su valor. Fuente: **(Barraza, 2012)**

Esto da pie a trabajar con fracciones sencillas, potencias de base 2, proporciones y equivalencias.

Si añadimos otra figura que modifica el valor de la nota a la que acompaña, como es el **puntillo** (signo de prolongación de la nota con forma de punto que aumenta la mitad del valor), implica, además, la visión del valor relativo, puesto que el puntillo no tiene valor concreto, depende de la figura a la que acompaña, y esto suele desconcertar a los estudiantes Al incluir el puntillo, el alumno debe trabajar con la suma de fracciones con diferente denominador y el cálculo de la mitad de la fracción de la nota. Para añadir algo más de complejidad podemos añadir otras notaciones que modifican el valor de la nota representada, como es el tresillo, en cuyo caso se representan 3 corcheas que en realidad tienen el valor de 2, es decir, su valor es 2/3 del valor representado por las corcheas: $\frac{2}{3}(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})$.

Además, al comienzo de cada partitura aparece una fracción que indica el ritmo a seguir en función de una figura musical, es el tipo de **compás**. El denominador indica la figura musical (tomado como referencia unitaria la redonda) y el numerador el número de figuras que dura cada compás. Así pues, en consonancia con los valores de las notas de la ilustración 6, un compás de 2/4 quiere decir que en cada compás hay 2 pulsos o tiempos cuyo valor es el de negra (denominador 4= negras).

La suma del valor de las notas de cada compás (cada grupo de notas entre dos líneas divisoras) ha de corresponder al compás inicial de la partitura.

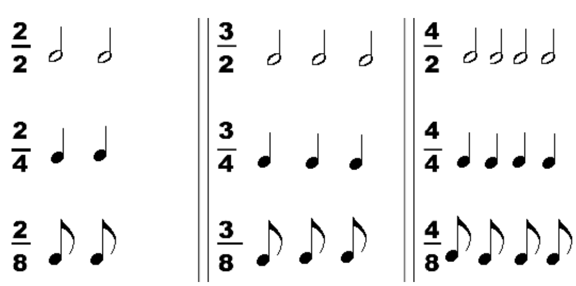


Ilustración 9. Representación de compás.

Por otro lado, al incluir el concepto de **tempo**, que marca la velocidad de la obra indicando el número de notas por minuto, podemos proponer cálculos del tiempo que dura una obra sabiendo el compás, el número de compases que componen la pieza y el tempo. A continuación, se incluye un ejemplo de Vicente Liern y Tomás Queralt en su cuadernillo del día escolar de las matemáticas de 2008:

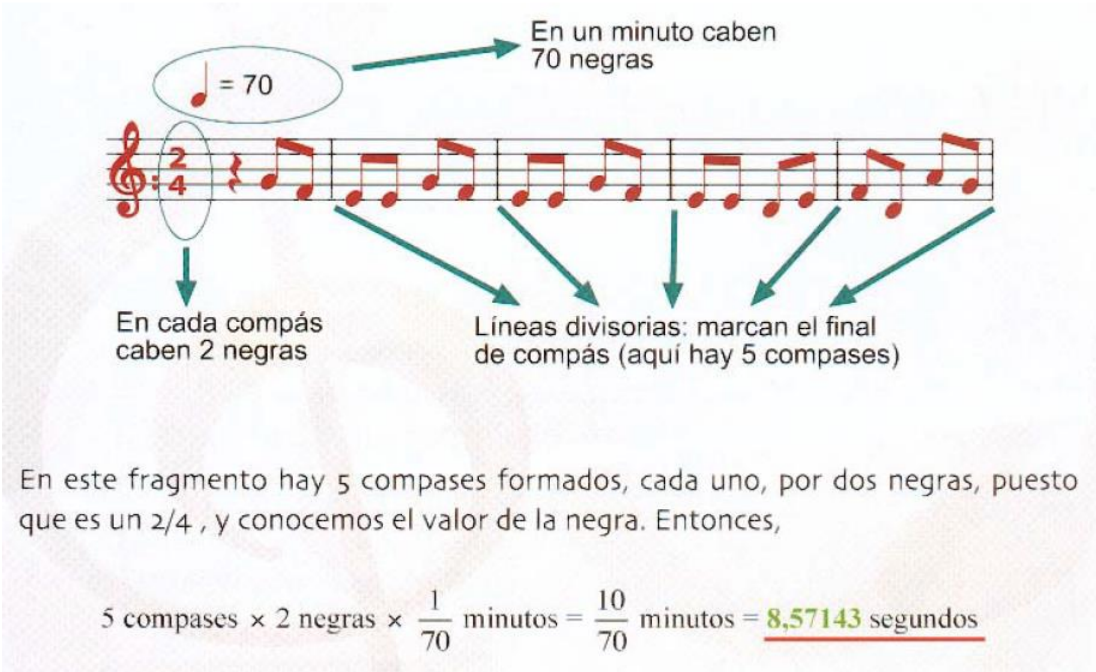


Ilustración 10. Ejemplo del uso del tempo en un ejercicio de matemáticas y música. Fuente: (Liern & Queralt, 2008 a, pág. 10)

El **ritmo** es otro de los conceptos musicales que sirve de base para el estudio de algunos temas matemáticos.

A través de la polirritmia (ritmos diferentes que se tocan de forma simultanea generando contrastes de acentuación) podemos comprender mejor el mínimo común múltiplo. Por ejemplo, solapando ritmos de 2/4, 3/4 y 4/4 en los que cada alumno da una palmada en el primer pulso del compás y el resto golpes en las piernas, veremos que las palmadas coinciden cada 12 pulsos. A partir de esto deducimos que el mcm de 2, 3 y 4 es 12. Extrapolando a otros ritmos y compases variamos la dificultad.

También se pueden desarrollar actividades con el máximo común divisor, el algoritmo de Euclides y las distribuciones regulares a partir de la generación de ritmos. Es lo que hacen en el proyecto Materritmo (Céspedes, Farigu, & Gómez, 2011 a) y (Céspedes, Farigu, & Gómez, 2011 b), del cual pueden verse algunos vídeos enlazados en los artículos citados. Siguiendo las explicaciones de Francisco Gómez (Gómez, 2011), si queremos tocar un fragmento de 12 pulsos pero sólo 4 notas, hemos de dividir 12 por un número tal que el resultado sea 4:

$$12/x = 4 \rightarrow x = 3$$

Y obtendríamos el ritmo: 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 (un golpe cada 3 pulsos).

Pero ¿qué sucede si queremos tocar 8 notas? $12/x = 8 \rightarrow x = 3/2$, no puede ser porque musicalmente los pulsos han de ser números enteros. Aquí entra el principio de regularidad, con el cual se distribuye el ritmo de la manera más uniforme posible, obteniendo el siguiente resultado: 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0, una célula rítmica que se repite 4 veces; y 4 es el mcd de 12 y de 8. Este tipo de ritmos, llamados ritmos euclídeos, son muy utilizados en música étnica. Pueden generarse con el algoritmo de Euclides (sucesivas divisiones hasta hallar el mcd de dos números).

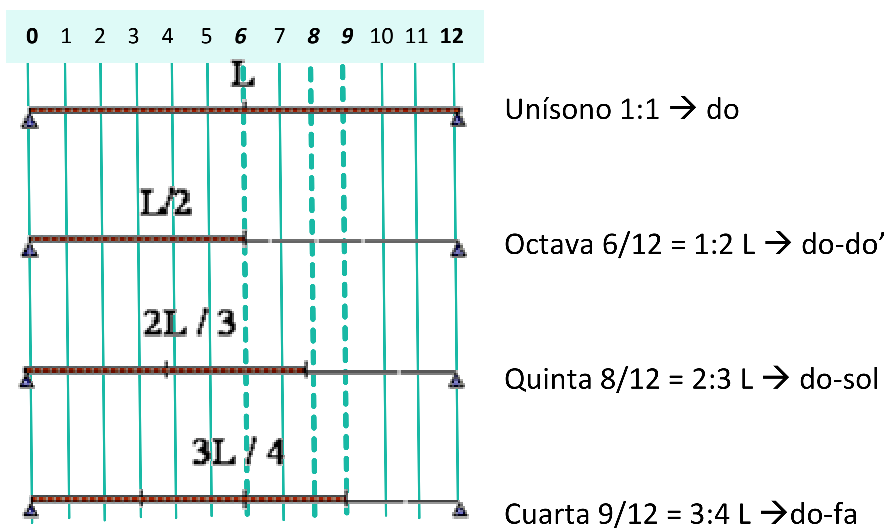
A partir de estos conceptos musicales se pueden plantear actividades en los primeros cursos de ESO para trabajar y repasar fracciones sencillas, potencias, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, algoritmo de Euclides, distribuciones de máxima regularidad, relaciones de proporción y equivalencias y el concepto de número racional, puesto que todas las relaciones matemáticas vinculadas a la notación musical se pueden expresar en forma de fracción.

Musicalmente, además del lenguaje musical y el ritmo, se trabaja la percusión corporal y los estilos de músicas del mundo.

Intervalos y escalas.

Definimos intervalo como la diferencia de altura o frecuencia entre dos notas, medida como la distancia en número de notas entre las dos que forman el intervalo. Aritméticamente es una proporción simple, como veremos.

Pitágoras realizó un experimento que es considerado como el punto de partida de la teoría musical. Estudió la relación entre el sonido y la longitud de la cuerda que lo produce mediante un instrumento con una sola cuerda, el monocordio. La nota que daba esa cuerda es la fundamental o tono. Pitágoras dividió la longitud en 12 partes iguales y observó que al disminuir la longitud de la cuerda a la mitad obtenía un sonido similar al inicial, pero más agudo, es lo que se conoce como octava. Dentro de estas divisiones definió 3 puntos en los que el sonido obtenido era armonioso con el fundamental. En el punto 9 (9/12), donde se acorta la cuerda 3/4 de su longitud lo llamó diateseron, y corresponde a un intervalo de 4ª, el punto 8 (8/12), donde se acorta la cuerda a 2/3, lo llamó diapente y corresponde al intervalo de 5ª, y al acortarlo a la mitad (6/12) lo llamó diapasón, que es el intervalo de 8ª. Gráficamente:



Tomando este sistema estamos tomando un intervalo descendente, es decir, de la última nota a la primera, pero si lo vemos de forma ascendente, las proporciones serán inversas, tal y como se muestra en la siguiente ilustración:

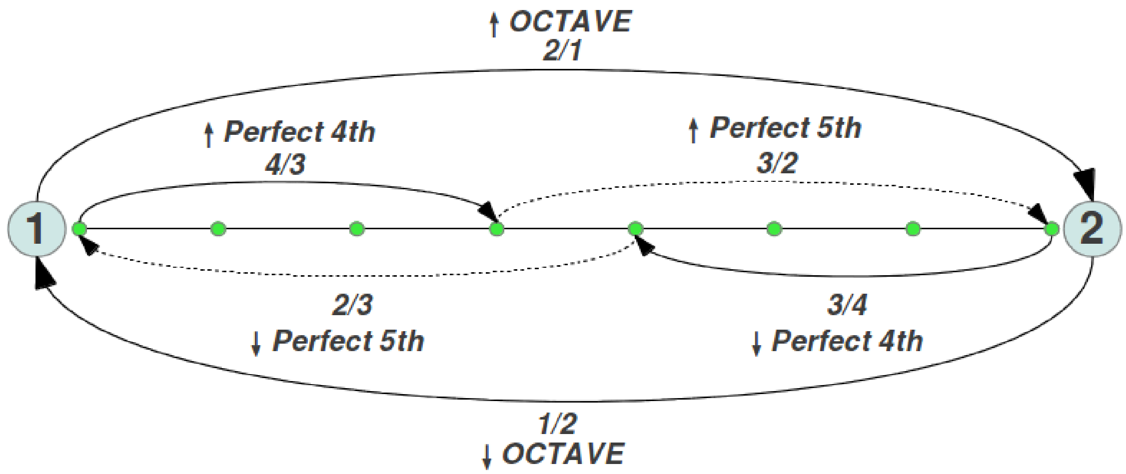


Ilustración 11. División de la octava y sus proporciones. Fuente: (Solà, s.f.)

Dicho de otra manera, Pitágoras encontró las siguientes relaciones matemáticas en el monocordio, relacionando la longitud de la cuerda vibrante con la nota que se producía:

- Al dividir la cuerda en 2 partes iguales y hacer vibrar una se obtenía la **octava**, cuya relación matemática es 2/1. La cuerda inicial es el doble de larga, la segunda cuerda corresponde a 1/2 de la longitud inicial.
- Al dividir la cuerda en 3 partes iguales y hacer vibrar 2 de ellas se obtiene la **quinta**, cuya relación en 3/2. Esto sucede cuando la longitud de la cuerda es 2/3 de la inicial.
- Al dividir la cuerda en 4 partes iguales y hacer vibrar 3 de ellas, se obtiene la **cuarta**, cuya relación matemática es 4/3. La longitud de la cuerda final corresponde a 3/4 de la inicial.

Hoy en día las notas musicales se identifican y definen por su frecuencia (Hz), que es la relación entre la velocidad del sonido y la longitud de la onda. Cuanto más baja sea la frecuencia más grave es el sonido, y a la inversa. Podemos resumir todas estas proporciones en la siguiente tabla:

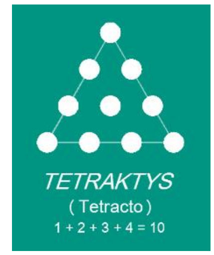
Nota	Longitud de cuerda	Frecuencia
Fundamental	L	f
Octava	1/2L	2f
Cuarta	3/4L	4/3f
Quinta	2/3L	3/2f

Tabla 1. Relaciones de proporción de las notas con la longitud de cuerda y la frecuencia (Hz).

A partir de estas relaciones pitagóricas se pueden deducir otras relaciones matemáticas:

Una octava está formada por una cuarta y una quinta: 2/1 = 3/2 * 4/3 (para sumar intervalos se multiplica su relación matemática y para restar se divide).

Estas relaciones músico-matemáticas de los pitagóricos están formadas por los números 1, 2, 3 y 4, llamado *Tetratkys*, cuya suma es 10 y representaba un número místico del universo. Además, es un número triangular (elementos de la sucesión de término general n(n+1)/2), relacionando con ello los números más sencillos, con los sonidos armoniosos y las figuras geométricas.



Teoría de las medias, según Arquitas de Tarento, pitagórico del siglo V a.C., decía que "…en la música hay tres medias: la primera es la media aritmética, la segunda es la geométrica, la tercera la media subcontraria, llamada armónica…" (Arquitas de Tarento, citado en Tomasini, pág. 17).

$$MA = \frac{a+b}{2}; \quad MG = \sqrt{ab}; \quad MH = \frac{2ab}{a+b}$$

Tomando los números 6, 8, 9 y 12, que son los números de las proporciones armoniosas establecidas por Pitágoras, se pueden comprobar todas las relaciones de proporción comentadas. 8 y 9 son la media armónica y aritmética de los extremos del intervalo [6, 12], y la media geométrica de 8 y 9 coincide con la media geométrica de 6 y 12. Por tanto, la media aritmética corresponde al intervalo de quinta, la media armónica corresponde al intervalo de cuarta, y de la media geométrica se deduce el intervalo de octava (a/b = b/c → 2/1). Igualmente, utilizando los valores de la frecuencia correspondiente a cada nota obtenemos las mismas relaciones.

Al dividir la media aritmética y la armónica se obtiene la relación entre dos notas consecutivas, es decir, el intervalo de tono (9/8).

Estas relaciones matemáticas se pueden resumir en la siguiente tabla:

Intervalo	Valor del intervalo	Proporción	Expresión algebraica
Cuarta	$\frac{4}{3}$	*Media armónica*	$MH = \frac{2ab}{a+b}$
Quinta	$\frac{3}{2}$	*Media aritmética*	$MA = \frac{a+b}{2}$
Octava	$\frac{2}{1}$	*Media geométrica*	$MG = \sqrt{ab};\ \frac{a}{m} = \frac{m}{c}$
Tono	$\frac{9}{8}$	$\frac{media\ aritmética}{media\ armónica}$	$M = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{2ab}{a+b}}$

Tabla 2. Relación de intervalos y medias.

Dividiendo el intervalo [1, 2] en 7 partes (las 7 notas musicales) y asignado el valor 1 a la nota Do, se puede seguir deduciendo el modelo de afinación en base a sus relaciones aritméticas a través de la proporción entre notas consecutivas, puesto que podemos obtener la relación entre la 4ª y la 5ª = (3/2) : (4/3) = **9/8** → relación entre una nota y su precedente, **intervalo de tono**.

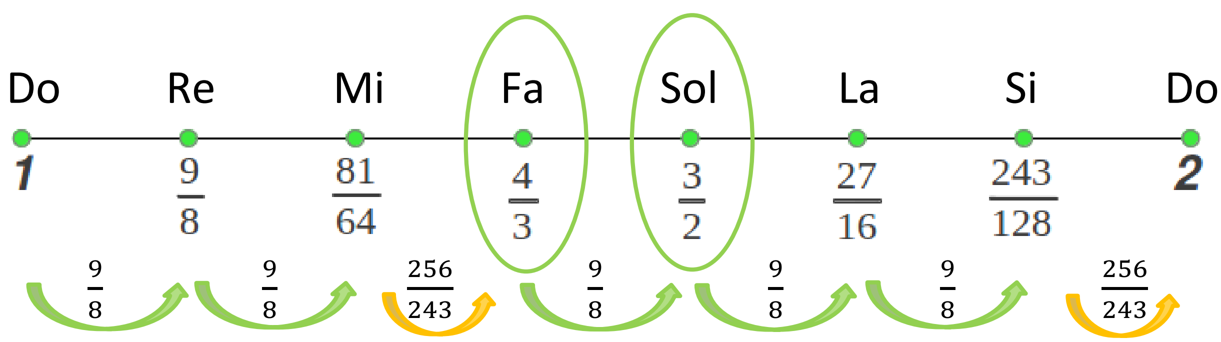


Ilustración 12. Cociente acumulado de cada nota en la escala pitagórica.

Esta relación obtenida de multiplicar cada nota por 9/8 no se cumple en el caso de Mi-Fa y SI-Do, cuya proporción es 256/243 = 1,053, a lo que Platón llamó *leima*. Es lo que hoy conocemos como **semitono diatónico** (semitono entre notas de distinto nombre). Al semitono entre una nota y su alteración se le conoce como **semitono cromático** y viene dado por la diferencia entre el tono y el semitono diatónico: (9/8) : (256/243) = 1,0678711.

Esta misma escala la podemos obtener a través del encadenamiento de quintas, es decir, multiplicando por el valor de un intervalo de quinta (3/2), de forma que en lugar de trabajar con fracciones se trabaja con potencias, quedando la escala expresada con los siguientes valores:

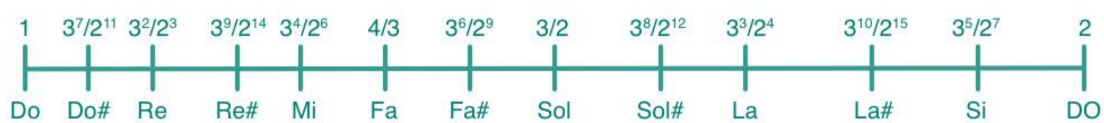


Ilustración 13. Escala pitagórica obtenida por encadenamiento de quintas, expresada en potencias.

De esta forma se asigna a cada nota una fracción (o potencia de fracciones); por analogía, a cada intervalo le corresponderá otra fracción en función del cociente entre los valores de sus extremos. Esta relación establece las vibraciones existentes entre ambas notas. Sin embargo, el sistema pitagórico no es exacto, al hacer un ciclo de quintas y llegar a la nota de partida, esta nota inicial será un poco más aguda que la original; esta diferencia corresponde a la diferencia entre el semitono cromático y el diatónico, conocida como *comma pitagórica*, resultante de la diferencia entre doce quintas (cuando volvemos al sonido original) y siete octavas (porque el sonido original que obtenemos es 7 octavas más agudo): $(3/2)^{12} / (2/1)^7$ = 1,0136...por lo que 12 quintas son un poco más que 7 octavas. El problema está en que dos semitonos diatónicos no equivalen a un tono y, además, la distribución de tonos y semitonos no es regular. Por ello este sistema de afinación quedó relegado por el temperado.

Podemos trabajar otros sistemas de afinación como el **temperado** (s. XVII), que utiliza diferentes relaciones basadas en potencias de 2 en lugar de fracciones como el pitagórico. Esta escala está basada en la división en 12 partes iguales de la octava, los 12 semitonos. Si asignamos el 1 al Do y el 2 al Do’ (una octava más alto), la siguiente nota cromática (Do#) estará en la posición x, la segunda (Re) en la x^2,… y como sabemos que la octava ha de cumplir $x^{12}=2$, calculamos x, que es $\mathbf{2^{1/12}}= 1{,}059$, o $\sqrt[12]{2}$, correspondiente al valor del semitono en este sistema de afinación. El cociente entre notas ya no es una fracción con números racionales, pasamos a trabajar con números irracionales, que pueden expresarse en forma de raíces.

Ilustración 14. Sistema temperado.

Para el sistema temperado podemos utilizar una guitarra y de forma similar que con el monocordio, ir viendo las relaciones de las distancias entre dos trastes consecutivos y al puente hasta ver que se trata de una progresión geométrica (Peralta, 2003)

<u>Sonidos y frecuencia.</u>

Si a todo lo anterior añadimos el concepto de frecuencia, sabiendo que por un acuerdo internacional de 1939 se definió la afinación del La a 440Hz, podemos plantear cálculos correspondientes a los valores de cada nota y su frecuencia asociada. Matemáticamente hablando, la frecuencia de una nota es el doble que su octava inmediatamente más baja, y, por el contrario, cuanto más grave es la nota, más baja es su frecuencia.

NOTA	VALOR EN [1,2]	FRECUENCIA (Hz)
DO	1	261,6256
DO# = RE *b*	1,059463094	277,1826
RE	1,122462048	293,6648
RE# = MI *b*	1,189207115	311,127
MI	1,25992105	329,6276
FA	1,334839854	349,2282
FA# = SOL *b*	1,414213562	369,9944
SOL	1,498307077	391,9954
SOL# = LA *b*	1,5874011	415,3047
LA	1,68179283	440
LA# = SI *b*	1,781797436	466,1638
SI	1,887748625	493,8833

Tabla 3. Valores asignados a cada nota y sus frecuencias

	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do’
f_n	f	9/8 f	81/64 f	4/3 f	3/2 f	27/16 f	243/128 f	2 f
f_n/f_{n-1}	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243	

Tabla 4. Relaciones de frecuencia en la escala pitagórica.

En el campo musical, estas escalas permiten desarrollar los diferentes sistemas de afinación y sus particularidades matemáticas que incluyen conceptos de proporción y error (como el ajuste de la coma pitagórica), operaciones con fracciones, operaciones con potencias y raíces (números irracionales), progresión geométrica, teoría de las medias, introducción del concepto de números triangulares y sucesiones. Estos conceptos pueden trabajarse en los últimos cursos de la ESO e incluso Bachillerato. Existen diversas propuestas didácticas que trabajan estas relaciones de escalas y frecuencias, como las de Javier Peralta en sus artículos ‘Matemáticas para no desafinar’ (Peralta, 2003) *y ‘Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula’* (Peralta, 2011 b)*, o los cuadernos de música y matemáticas de Vicente Liern con motivo del día escolar de las matemáticas* (Liern & Queralt, 2008 a)*. Todos ellos disponibles en internet.*

Armónicos.

Cada nota suena junto a otras más agudas asociadas a la fundamental (la nota que tocamos), llamadas armónicos (sucesión de notas que se producen al vibrar una columna de aire o una cuerda), sin embargo, muchos de ellos son inaudibles, aunque influyen notablemente en las cualidades del sonido. No suenan los mismos armónicos al tocar la misma nota con diferentes instrumentos, ni todas las notas tienen el mismo número de armónicos, esta es una de las muchas razones que diferencian el sonido de un instrumento respecto al resto.

Por ejemplo, los armónicos de la nota DO (nota fundamental) son: do’, sol’, do’’, mi’’, sol’’, si b’’, do’’’, re’’’, mi’’’, fa#’’’… (cada coma representa una octava). Si los numeramos obtenemos una interesante relación:

Nº de orden	Armónico	Correspondencia con la nota fundamental
0	do	F
1	do’	F
2	sol’	5ª
3	do’’	F
4	mi’’	3ª
5	sol’’	5ª
6	si ♭’’	b7
7	do’’’	F
8	re’’’	2ª
9	mi’’’	3ª
10	fa#’’’	4ª#

Tabla 5. Correspondencia de armónicos con la nota fundamental.

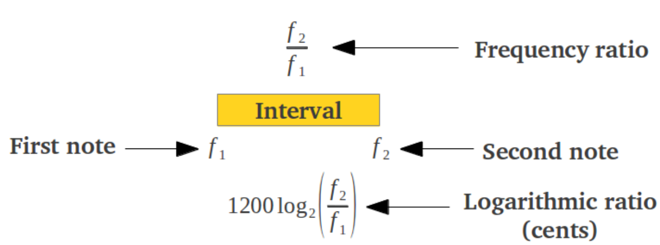
Se obtiene así la serie armónica, sucesión de sonidos cuyas frecuencias son múltiplos de la nota fundamental; por ejemplo, el primer armónico corresponde a una octava del tono fundamental, es decir, tiene doble frecuencia, mientras el segundo armónico corresponde a 3 veces la frecuencia de la nota base, es decir, una 5ª y una 8ª por encima. Sucesivamente podemos deducir la frecuencia y altura de cada armónico. La emisión de armónicos se relaciona con el tipo de tubo en el caso de los instrumentos de viento. En tubos abiertos, como el saxofón, se emite la serie completa de armónicos, mientras que, en tubos cerrados, como la flauta, sólo se emiten los armónicos impares.

Logaritmos.

La relación entre la frecuencia de un sonido y su percepción por el sistema auditivo no es lineal, sino logarítmica, las notas no son equidistantes. El pentagrama es una escala logarítmica, la diferencia de altura entre dos notas es proporcional al logaritmo de la frecuencia.

Se puede calcular la frecuencia de una nota a partir de otra sabiendo, además, que la distancia de semitonos, tal como hemos visto, es 1,059. Partiendo de la nota do, cuya frecuencia es 261,62 Hz, obtenemos la expresión: $f(m) = 261{,}62 * 1{,}059^m$, donde m es el número de semitonos en la escala temperada. Aplicando logaritmos a esta expresión obtenemos: $\ln f(m) = \ln 261{,}62 + m * \ln 1{,}059$, de donde se puede despejar *f(m)* y obtener la frecuencia de las notas de la escala cromática.

Matemáticamente, dadas dos notas de frecuencias f1 y f2, la diferencia de alturas entre ellas es $k * \log_2 (f2/f1)$, donde k es una constante que suele medirse en cents y su valor es 1200. Una octava son 1200 cents mientras que entre cada nota de la escala temperada hay 100 cents. Con esta fórmula se obtiene la diferencia entre dos frecuencias medida en cents. Esta relación es la que usan los afinadores electrónicos.



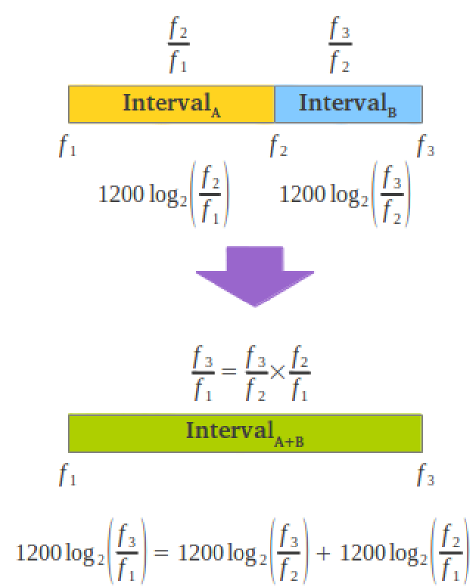


Ilustración 15. Representación de un intervalo musical como cociente lineal o en cents logarítmicos. Fuente: (Solà, s.f.)

Esta relación permite trabajar los logaritmos en los últimos cursos de ESO.

Existe algunas propuestas didácticas en este sentido como las ya mencionadas de Javier Peralta (Peralta, 2003) *o de Vicente Liern* (Liern & Queralt, 2008 b)*. También podemos apoyarnos de recursos audiovisuales, como el siguiente vídeo de youtube:* *https://www.youtube.com/watch?v=CCPLHhOR_7k#t=214*

El número áureo y la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci y el número áureo están presentes en composiciones musicales, en las relaciones compositivas; por ejemplo, en la proporción que guardan las diferentes secciones en que se divide una pieza, como es el caso de algunas sonatas de Mozart. Compositores contemporáneos sí se han ayudado de esta sucesión y del número áureo para componer sus obras, como en el caso de Béla Bartók, quien desarrolló la 'escala Fibonacci' y utilizó estos recursos matemáticos para componer su obra '*Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta*'; Schillinger, quien ideó un sistema de composición musical donde las notas seguían intervalos de Fibonacci, o incluso Joan Serra, quien compuso en el año 2000 una obra electrónica basada en esta sucesión. Pero para aplicarlo de una manera más directa en el aula es mucho más interesante verlo en las proporciones de algunos instrumentos que analizando partituras, tarea que puede ser compleja.

El número phi φ fue utilizado por Stradivarius para calcular la ubicación exacta de las efes de los violines y las distancias entre distintas partes del instrumento. Estas proporciones pueden verse en la siguiente ilustración:

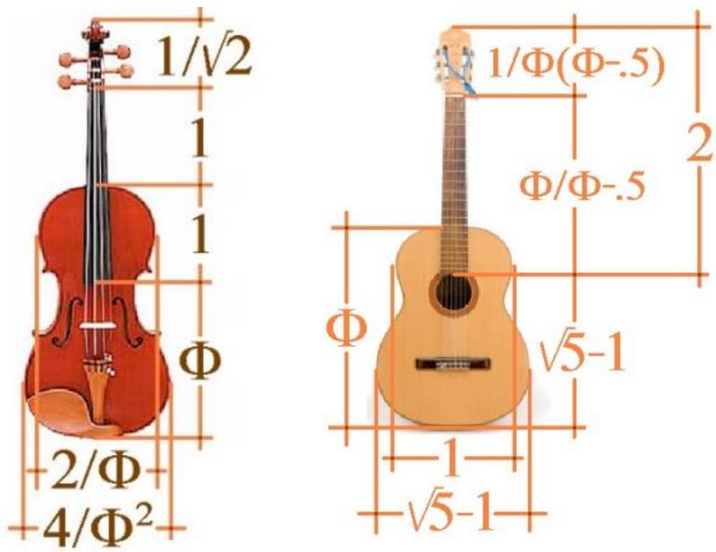


Ilustración 16. Proporciones de guitarra y violín en relación al número phi. Fuente: (Calvimontes, s.f.)

En este punto se pueden trabajar las sucesiones y el número áureo en los últimos cursos de ESO. Previamente sería interesante comprobar estas proporciones en los instrumentos disponibles en el aula, ya que los diferentes constructores de instrumentos utilizan sus propias medidas. En el caso de la guitarra, está diseñada a partir de conceptos geométricos y estéticos, es el resultado de varias elipses y líneas, y a nivel estético su diseño sigue una relación con el cuerpo humano (Rodríguez, 2011) *y por tanto, tradicionalmente vinculada con la proporción divina. Sin embargo, tal como demuestra Rodríguez (2011) en su tesis sobre la construcción de la guitarra, esta proporción no se cumple en determinadas marcas de guitarra, pero sí se aproxima a otra proporción, la proporción cordobesa (relación entre el radio de una circunferencia y el lado del octógono regular inscrito, cuyo cociente es 1,30656…), utilizada en la arquitectura y el arte cordobés.*

Fibonacci aparece en otros instrumentos, por ejemplo, en el teclado del piano: una octava tiene 8 teclas blancas y 5 negras, en total 13 notas, además, la escala pentatónica tiene 5 notas, la diatónica 8 y la cromática 13. Todos son números de la sucesión de Fibonacci. También lo encontramos en la relación de frecuencias de los intervalos: por ejemplo, la nota Do tiene una frecuencia de 264 Hz y La de 440, tienen una relación 3/5, la relación Mi-Do es de 330/528 Hz, que son 5/8, nuevamente la relación está vinculada a números Fibonacci.

b) Funciones y representación gráfica.

Es usual representar datos de forma gráfica a través de los ejes de coordenadas en multitud de temas, la música es uno de ellos. En este campo se pueden trabajar las siguientes relaciones:

- La **notación musical** a través del pentagrama introduce el **concepto de función.**
- Conceptos básicos sobre las **cuerdas vibrantes** y la **música automática** ayuda a la visión práctica de las **funciones trigonométricas** y su representación gráfica y analítica.
- La **consonancia y disonancia** ayudan a comprender la **periodicidad** de la gráfica de una función.

En el siglo XI se ideó un sistema de notación musical que, de cierta manera, según Amster (2013), era un anticipo a los sistemas actuales de geometría analítica, basando la notación en un sistema de coordenadas en el que el eje X era el tiempo y el Y la altura de la nota. Fue la transición de la escritura musical alfabética de la época de los griegos y los primeros neumas del siglo IX (signos que se movían hacia arriba y hacia abajo imitando los movimientos que hacía el director), al actual sistema del pentagrama. Hoy en día, la notación musical moderna sigue utilizando este sistema de coordenadas, ya que al avanzar en el pentagrama avanza el tiempo, y al subir o bajar modificamos la altura de las notas.

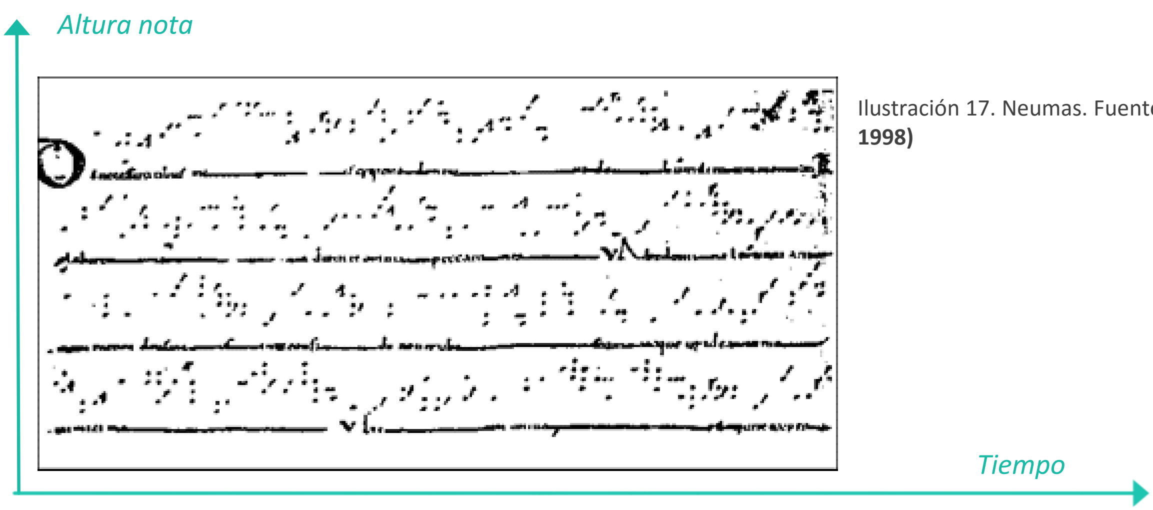


Ilustración 17. Neumas. Fuente: **(Fernandes, 1998)**

¿Cómo representamos gráficamente el sonido?

Al igual que el pentagrama representa gráficamente una melodía, un sonido puede ser representado en un gráfico de coordenadas expresando los mismos parámetros, el tiempo en el eje X y la altura o frecuencia en el eje Y, de esta manera se obtiene una línea de variación de frecuencia en función del tiempo que dura el sonido, tal como se muestra en el siguiente gráfico.

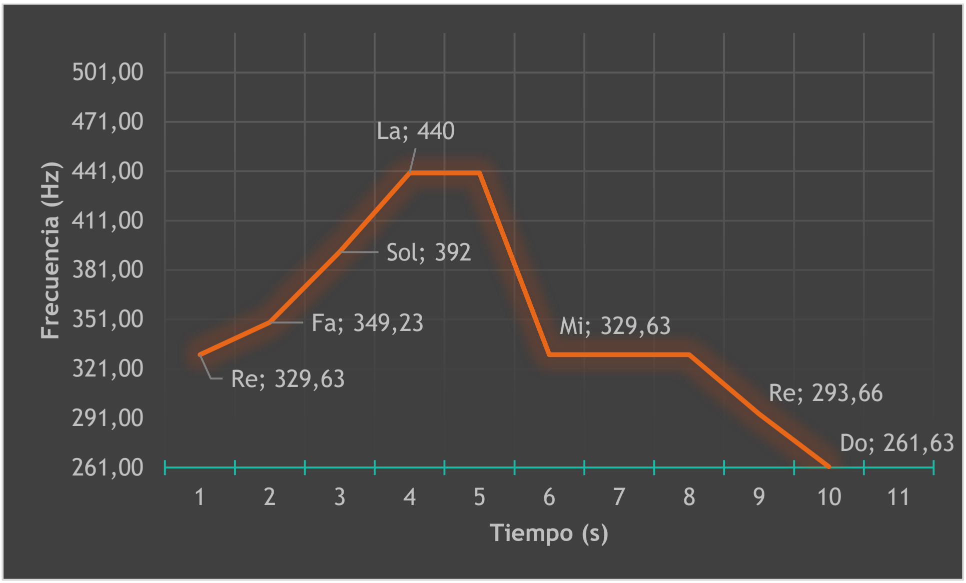


Ilustración 18. Representación gráfica de un sonido.

Pasando a temas de acústica, más propios de la física, es cuando encontramos la representación gráfica del movimiento ondulatorio del sonido. Las funciones trigonométricas son funciones periódicas relacionadas con este fenómeno físico. Sin entrar en cuestiones como la serie de Fourier, podemos utilizar la música como ejemplo de aplicación de las funciones trigonométricas. Si incluimos la física, quizás podrían vincularse las tres materias para estudiar estos temas de acústica en Bachillerato.

En el siguiente gráfico podemos ver la relación de ondas de la serie armónica sobre una nota fundamental (f), la cual sigue una función periódica seno.

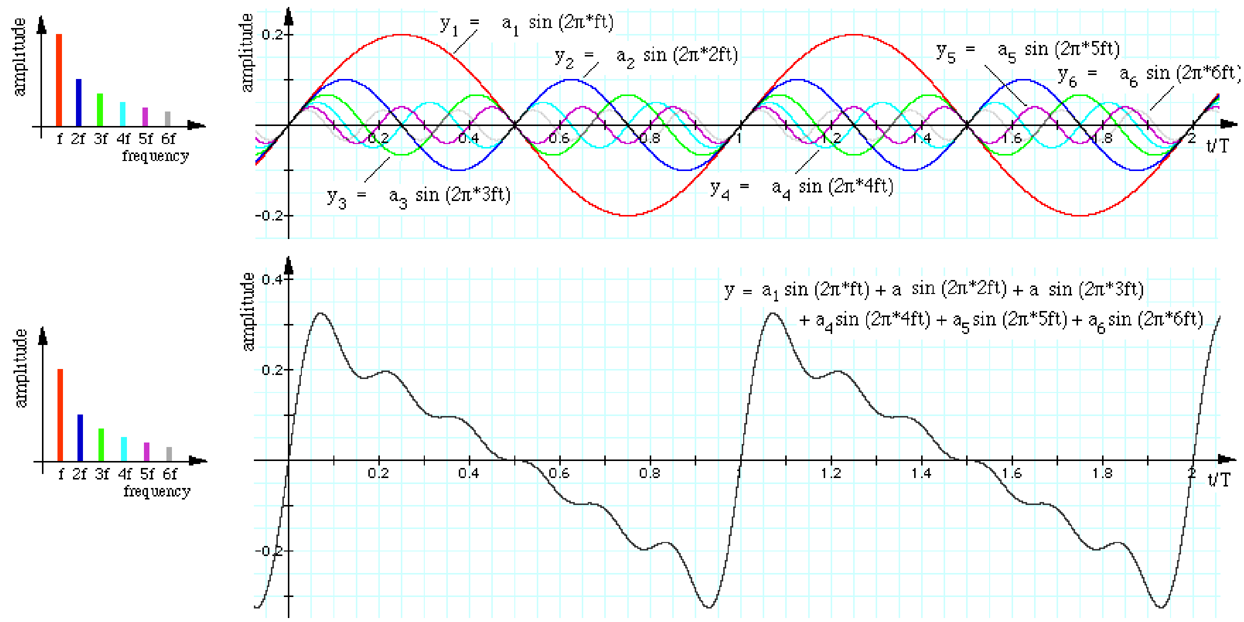
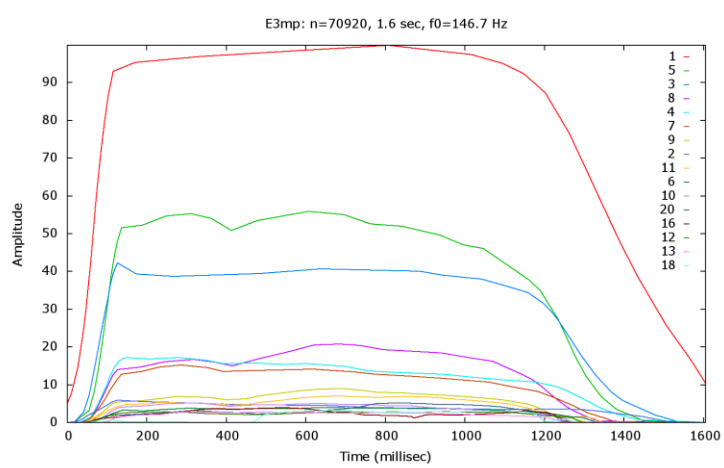


Ilustración 19. Gráfico de las ondas de sonido de la serie de harmónicos. Fuente: **(School of Physics, University New South Wales, Sydney, s.f.)**

En cursos universitarios podría incluirse también la representación gráfica del sonido particular de cada instrumento, llamado espectograma, el cual relaciona los diferentes armónicos de un instrumento en función del tiempo de emisión de una nota y los representa aplicando la Transformación de Fourier (Keenan, 2013), o la representación gráfica de la consonancia y disonancia en relación a las proporciones matemáticas de los intervalos, lo cual da una idea de la afinación de un instrumento, tal como explica Keenan en su página web (Keenan, 2015). A continuación, se muestra un ejemplo de espectograma de clarinete.



.

Ilustración 20. Espectograma de clarinete. Fuente: (Keenan, 2013)

En el campo de las funciones y la representación gráfica, se puede trabajar la introducción del concepto de representación gráfica a través del sistema de coordenadas cartesianas y su representación lineal con la audición de sonidos; en el campo musical se trabaja la relación de frecuencia, notas y tiempo y la capacidad auditiva de los alumnos para identificar sus variaciones. Igualmente, se puede trabajar a la inversa, a partir de gráficos deducir la partitura en notación musical e interpretarla. Añadiendo el uso de tecnologías, como programas de generación de gráficos, incluimos el desarrollo del manejo con ordenadores y software matemático y musical. Este trabajo puede realizarse en 3º o 4º de ESO.

Por otro lado, en Bachillerato se pueden trabajar estos conceptos a través de la interpretación de funciones logarítmicas y trigonométricas dadas por ondas de sonido. En este sentido podemos recurrir al uso de software específico, como midimath, *programa libre de composición que a partir de una representación gráfica de una función da como resultado un producto sonoro* (Maroto)*; o como plantea Liern (1994), a partir de la interpretación de la música como función* M *definida en un intervalo* $\mathbb{R}$ *en un conjunto de vectores (sonidos) en el que estudiar su dominio o su continuidad. También es interesante la propuesta de Alberto Rodríguez* (Rodriguez, 2011 a)*, quien plantea la representación gráfica de la frecuencia de las notas, utilizando GeoGebra, obteniendo una función exponencial y logarítmica.*

c) Geometría

Dentro del campo de la geometría, la música encuentra uno de sus principales pilares compositivos, presentes en casi cualquier pieza musical, lo que da pie a trabajar en el aula con los conceptos geométricos desde la perspectiva musical:

- El análisis de las **estructuras musicales** de las partituras desarrolla la capacidad **de análisis geométrico y sus transformaciones**.
- La **danza** ayuda a afianzar **conceptos geométricos** y sirve de ayuda para el **cálculo de áreas y perímetros.**

- Los **instrumentos musicales** son una herramienta en la comprensión y aplicación real de **cálculos de áreas y volúmenes**.
- Los conceptos de frecuencia y ondas, junto con la geometría y diseño de instrumentos, desarrollan la capacidad de relacionar diferentes conceptos matemático-físicos con la manipulación real a través de la construcción de instrumentos (asignatura de tecnología).
- La **música compuesta por ordenador** trabaja el concepto de **fractal y algoritmos**.

Las matemáticas musicales se nutren en gran medida de la rama de la geometría, un recurso muy utilizado en las composiciones musicales. La combinación de simetría y asimetría es un principio musical, al igual que la repetición, muy utilizados.

Dentro de este campo podemos encontrar parámetros geométricos como repetición, traslación, reflexión (notas, acordes, tiempo, intensidad), palíndromos, rotación, homotecia, cambio de escala, permutación… Estas transformaciones geométricas, musicalmente conservan los intervalos o sus proporciones, y pueden darse tanto en las notas, como en el tempo, en la intensidad del sonido, en las frases o entre diferentes voces. Cualquier movimiento como traslación, giro o reflexión son transformaciones que conservan los intervalos, mientras que cualquier homotecia de ampliación o de reducción conserva su proporción.

Ilustración 21. Ejemplos de geometría en música. Fuente: (Losada, 2008).

Un ejemplo de simetría es el palíndromo, recurso que también podemos localizar en algunas piezas como *El palíndromo* (Sinfonía nº47 de Haydn) o en una obra española más modera, *Palindromía flamenca*, de Antonio Rueda Peco. (https://www.youtube.com/watch?v=QBXxGgZ7CLs)

Podemos ver varios ejemplos en el artículo 'Geometría musical' de Rafael Losada (Losada, 2008), algunos muy curiosos, como el *'Dueto del espejo'*, de Mozart, compuesta de forma que se puede ejecutar por dos músicos, cada uno leyéndola en un sentido, uno empezando por el primer compás y otro por el último. La armonía se mantiene durante toda la pieza porque se ha utilizado un recurso geométrico, la rotación de intervalos. A cada transformación geométrica se asocia su equivalente musical. Por ejemplo, una reflexión horizontal en términos musicales sería una inversión, o una traslación vertical corresponde a transporte.

El uso de las transformaciones geométricas es un recurso muy utilizado y que aparece frecuentemente en cualquier documento que relacione música y matemáticas. Por ello no se ha creído necesario incidir en ello, y trataremos la geometría musical desde otros puntos de vista:

- Su aplicación en la danza a través de las formas geométricas de una coreografía. Los alumnos proponen y ejecutan diferentes posiciones que se plasman en papel o fotografía de forma que obtenemos un recurso gráfico con el que trabajar las formas geométricas que han creado; a partir de ahí se pueden trabajar conceptos de perímetros, áreas, figuras geométricas, ángulos, vértices… En la materia musical se trabajan aspectos como el ritmo, el fraseo y la expresión corporal.
- El manejo de instrumentos musicales, sus dimensiones y sus particularidades geométricas les confieren diferentes cualidades de sonido en relación al estudio de sus ondas.

En la siguiente tabla se relaciona la geometría de instrumentos de viento con la longitud de onda en función de la longitud de tubo:

TIPO DE TUBO	ABERTURA	LONGITUD DE ONDA	INSTRUMENTOS
CILÍNDRICO	Abierto	2L	Flauta travesera
	Cerrado	4L	Clarinete, trompeta, trombón…
CÓNICO	Cerrado	2L	Saxofón, fliscorno, tuba…

Tabla 6. Relación del tipo de tubo y la longitud de onda del sonido.

Ilustración 22. Clarinete (tubo cilíndrico) y saxo soprano (tubo cónico).

Estas particularidades confieren características diferentes en el sonido que pueden estudiarse desde las relaciones matemáticas. En concreto determinan el timbre y la serie de armónicos, cualidades que hacen diferente el sonido de cada instrumento. A partir de su geometría sabemos la longitud del tubo y su relación con la longitud de onda que emite, con estos datos, y tomando como velocidad del aire 330 m/s, se puede hacer el cálculo de la frecuencia (Hz) de la nota fundamental del instrumento $f = \frac{330}{\lambda}$, donde λ es la longitud de onda.

También pueden utilizarse las medidas de algunos instrumentos para aplicar conocimientos geométricos en el cálculo de áreas y volúmenes, como por ejemplo el cuello de un saxofón:

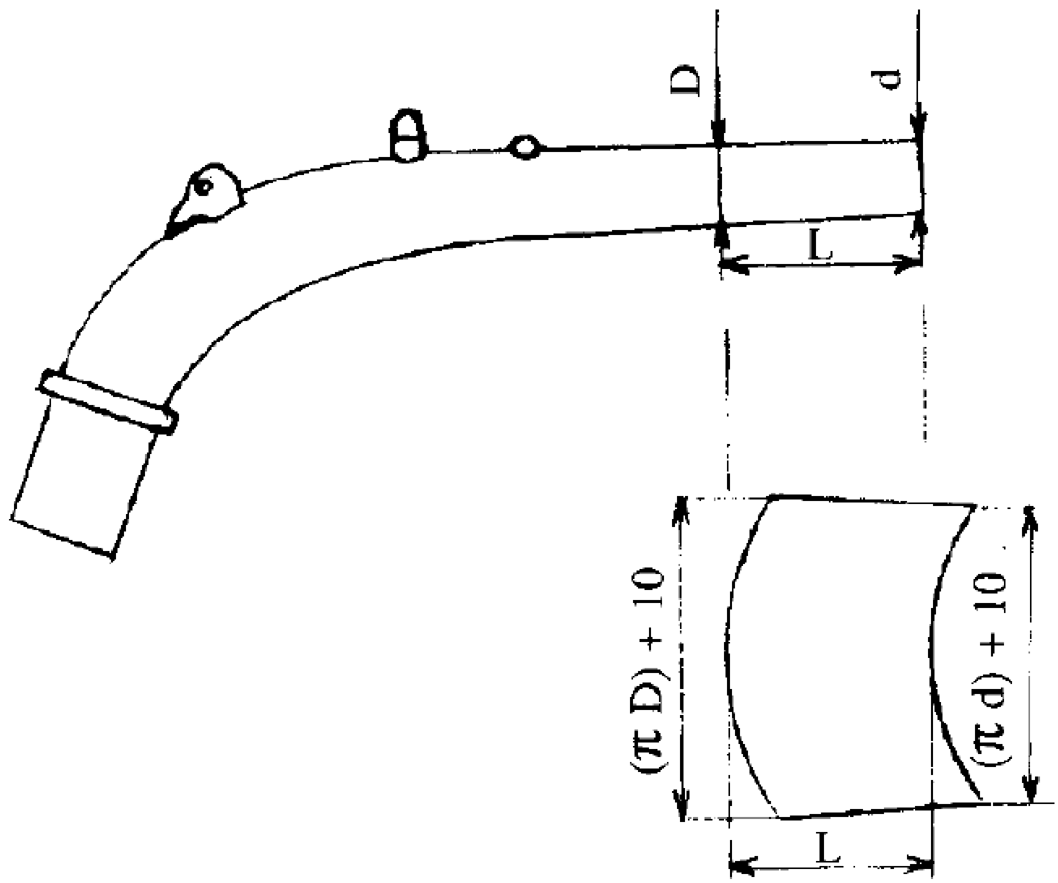
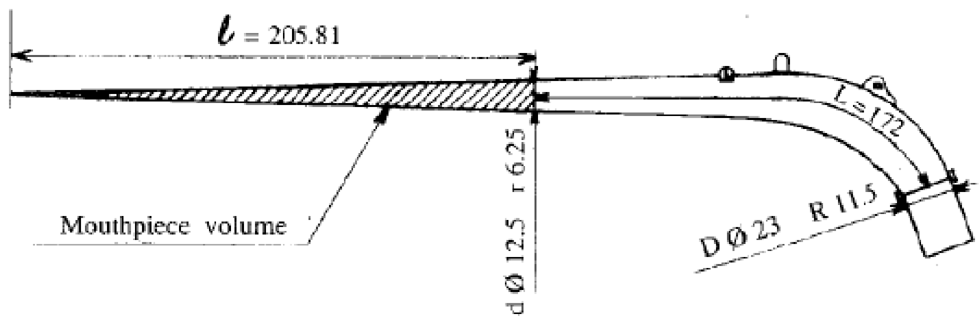


Ilustración 23. Dimensiones del corcho del cuello de un saxofón. Fuente: (Ferron, 1997, pág. 63).

First, calculate the volume of the pointed section of the cone (shaded on the drawing) which must correspond to the volume necessary inside the mouthpiece.



L = length of the neutral line = 172

To determine the volume of the shaded section, we have the basic radius (r = 6.25) at the entrance to the neck, but not the length (ℓ) which must be calculated.

The neck measurments permit us to calculate the slope of the cone in degrees, by using a formula.

$$(*)\ \frac{28.65\,(D - d)}{L} \quad \text{soit} \quad \frac{28.65\,(23 - 12.5)}{172} = 1°.74$$

This slope in degrees (1°.74) will be the same for the shaded section, where D = 12.5 and d = 0, which allows us to find the length (ℓ) :

$$1°,74 = \frac{28.65\,(D - d)}{\ell} = \frac{28.65\,(12.5 - 0)}{\ell}$$

$$\ell = \frac{358.125}{1.74} = \mathbf{205.81\ mm}$$

(*) 28.65 is a formula which eliminates the need to refer to trigonometry tables. For practicality the slope is given in degrees and hundreaths of degrees, and not in degrees and minutes.

The formula for calculating the volume of a cone being : $\frac{\pi r^2 \ell}{3}$

the volume of the shaded section (equivalent to the mouthpiece's functional volume) will thus be :

$$\frac{3.1416 \times 6.25^2 \times 205.81}{3} = \mathbf{8,418.89\ mm^3}$$

Ilustración 24. Cálculo del volumen de aire entre la boquilla y el tubo del instrumento. Fuente: (Ferron, 1997, págs. 101-102)

Construcción de instrumentos de viento.

Al igual que se ha propuesto comprobar las proporciones áureas en los instrumentos de cuerda, sería interesante conocer las proporciones de construcción de los instrumentos de viento para ver si guardan alguna relación que pueda ser de aplicación en el aula.

¿Qué medidas afectarán al sonido?: los agujeros, su distancia al final del tubo, su diámetro, la altura de sus chimeneas, la distancia al siguiente agujero abierto, relaciones de proporción, distancia, diámetros… en función de la nota que emita ese agujero. Es un tema realmente interesante para trabajar en el aula puesto que es una actividad manual y aplicada, pero resulta complejo encontrar información concreta para llevarlo a cabo, por lo que no entraremos en el desarrollo de este tema. Sin embargo, sí se puede plantear una actividad práctica y manual, una propuesta didáctica aunando ahora la asignatura de Tecnología, la construcción de una flauta. En la red se pueden encontrar diversos tutoriales, principalmente en inglés, buscando el término 'flutomat', en los que obtener el diseño dimensionado para la construcción de una flauta con medios caseros. En este punto, matemáticas y música pasan a un segundo plano, siendo la física y la tecnología las materias relevantes en la actividad, por lo que, unido a la dificultad comentada anteriormente, no se ha creído conveniente detallar el proceso de construcción de una flauta.

En las siguientes direcciones web pueden obtenerse algunos ejemplos:

http://people.adams.edu/~rjastalos/Flutes/6-holeFlutomat.html

http://www.flutopedia.com/calculators.htm

http://homepages.bw.edu/~phoekje/acoustics/mahome.html

http://www.logarithmic.net/pfh/design

Como hemos visto en las diferentes áreas dentro de la geometría, hay diversidad de planteamientos que pueden dar origen a propuestas didácticas para las aulas de la ESO en sus diferentes niveles.

Para trabajar los conceptos de movimientos en el plano se utilizan partituras en las que el alumno debe localizar las figuras y sus transformaciones. También se pueden proponer ejercicios en los que el alumno ha de escribir una determinada geometría a partir de unas notas dadas. O llevarlo al plano auditivo y reconocer una simetría o una permutación en un fragmento de una obra o una interpretación hecha por el profesor. En función del nivel de dificultad, tanto musical como matemático, la actividad puede plantearse en cualquier curso del ciclo de la ESO.

Otra forma de trabajar la geometría es con la identificación de figuras geométricas a través de la danza, como ya se ha comentado, y de los instrumentos. A la vez que estudian las diferentes familias instrumentales, pueden estudiar sus características geométricas, buscando secciones circulares y cuadrangulares e identificando la forma geométrica de los instrumentos de viento (taladro: forma del interior del tubo), cilíndrico o cónico. En últimos cursos de ESO se puede incluir el cálculo de áreas y volúmenes de instrumentos musicales; por ejemplo, el cálculo del volumen de aire dentro de un clarinete o un saxofón. También se puede incrementar el nivel y llevarlo a Bachillerato para estudiar las diferencias acústicas de ambos tipos de instrumentos en función de la vibración del aire en el interior del tubo y de si este es cerrado o abierto en ambos extremos.

d) Probabilidad y combinatoria.

Resulta realmente interesante de cara a su aplicación didáctica, la combinatoria aplicada a la composición musical basada en la teoría de probabilidades.

- El **Juego de dados de Mozart** es una herramienta para la introducción a la **probabilidad y el azar**.
- El **análisis musical** ayuda a trabajar el **cálculo probabilístico**.

El juego de dados de Mozart consiste en la creación de una obra musical de 16 compases dividida en dos partes de 8 compases cada una que se repiten (dos partes de 16 compases, 32 en total); el método de composición se basa en dos tablas y un repertorio de 176 compases cifrados que se combinan según los resultados obtenidos al lanzar dos dados (11 resultados posibles, del 2 al 12). El ingenio del Mozart lo llevó a componer un generador de valses para piano (formados por un minueto y un trío), con un sistema que, apoyado en el azar, genera un número muy grande de composiciones diferentes. El número de posibles composiciones es 11^{16}, que es un número tan grande que se estima que, si se interpretaran continuamente todas las partituras posibles y cada una dura 30 segundos, para agotar todas las posibilidades se necesitarían más de 728 millones de años, interpretando la obra de día y de noche y de manera continua.

1. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

2. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Ilustración 25. Tabla de Mozart para los minuetos.

Los números romanos (columnas) indican el número de orden de la tirada de dados y por tanto el orden del compás. El número de fila (del 2 al 12), corresponde a la suma de los dos dados en cada lanzamiento. Al cruzar ambas entradas en la tabla obtenemos el compás compuesto por Mozart (identificados por números).

Con este juego podemos trabajar de una forma práctica y motivadora el tema de probabilidad. Por un lado, se trabajan conceptos básicos, como el espacio muestral y la regla de Laplace (P(A) =

casos favorables/casos posibles), para calcular la probabilidad de cada combinación de dados y ver cuál es el resultado que más aparece y el que menos. Esto da paso a formular preguntas como ¿cuál es la probabilidad de obtener una pieza compuesta por el mismo compás?, ¿crees que se puede decir que cada vez que se interpreta una obra de este juego es un estreno mundial?, ¿cuánto tiempo duraría un concierto con todas las posibles obras del Juego de Mozart?

Este Juego de dados sirve para el estudio y aplicación de las unidades didácticas referentes a la probabilidad, analizando el método y aplicándolo para crear una composición musical en los cursos más avanzados de ESO. Se puede proponer una sesión de clase a modo de taller, en la que primero se estudie el sistema de juego de azar que propuso Mozart, se calculen probabilidades y finalmente cada alumno o grupo de alumnos genere su propia composición de Mozart. Posteriormente pueden interpretarla, bien ellos mismos, si su nivel instrumental es adecuado para ello, o bien introduciendo el resultado en algún programa informático de tratamiento y reproducción de partituras (sibelius, encore, finale…). A partir de su propia obra pueden trabajar con la partitura las transformaciones geométricas. Obtener una composición de Mozart hecha por el alumno puede ser un elemento de motivación importante, puesto que el trabajo realizado tiene un resultado palpable y reproducible.

Otra aplicación similar para trabajar esta sección matemática es plantearse la pregunta '¿alguna vez nos quedaremos sin música nueva?'*, a partir de la cual se invita a los alumnos a realizar cálculos de combinaciones de notas, figuras, ritmos… y reflexionar sobre los datos obtenidos. En este punto se abre el debate sobre la expresión de datos e informes, principalmente sobre la información estadística ofrecida por los medios de comunicación. Es importante que los alumnos adquieran una visión crítica y sean capaces de analizar la información que reciben.*

4.3 Conexiones curriculares y competencias clave

Según la LOMCE, la música pasa a ser una materia optativa en todos los cursos de Secundaria, aunque la Comunidad de Madrid la mantiene como obligatoria en 2º y 3º de ESO, y como optativa de obligada oferta en todos los centros para 4º de ESO. En bachillerato puede aparecer como optativa, a elección de cada centro, aunque en general sólo la ofrecen aquellos institutos en que se imparte Bachillerato de artes, o en algunos de Ciencias Sociales. En general, no es una materia ofertada para el bachillerato de Ciencia y Tecnología. Ambas materias no son coincidentes en esta etapa formativa ya que en las orientaciones que se da matemáticas no se oferta la optativa de música, y en las orientaciones en que sí se oferta, no se incluye matemáticas en el currículo, excepto en el caso de la orientación de Humanidades y Ciencias Sociales, como se ha comentado, en la que se cursa matemáticas aplicadas y podría incluirse la música como optativa, pero al no ser obligatorio ofrecerla, como sí es el caso de 4º de ESO, la mayoría de institutos no la incluyen en su oferta académica.

Por tanto, la coincidencia de ambas materias en un mismo curso sólo se da en la etapa central de Secundaria, concretamente en 2º, 3º y 4º de la ESO, lo cual hace que las opciones de plantear un proyecto interdisciplinar se vean reducidas a estos tres cursos académicos.

Analizando los contenidos curriculares de ambas materias para cada uno de los cursos comentados, según el Real Decreto 1105/2014 y el Decreto 48/2015, encontramos las siguientes conexiones curriculares sobre las que desarrollar la propuesta didáctica:

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Matemáticas</th><th>Música</th></tr>
<tr><td>2º ESO</td><td colspan="2">Bloque 2. Números y álgebra:
• Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural.
• Operaciones con potencias.
• Significado y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: números triangulares.
• Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
Bloque 3. Geometría:
• Triángulos rectángulos.
• Semejanza.
• Poliedros y cuerpos de revolución.
• Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.
Bloque 4. Funciones:
• El concepto de función.
Bloque 5. Estadística y Probabilidad:
• Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.</td><td>Bloque 1. Interpretación y creación:
• El sonido, parámetros y representación gráfica.
• Profundización en el conocimiento del lenguaje musical y su práctica: ritmo, tempo, intervalos, escalas, armonía.
• Lectura y escritura musical.
• La voz, la palabra, los instrumentos y el cuerpo como medios de expresión musical.
• Interpretación de repertorio vocal, instrumental y de danzas.
Bloque 2. Escucha:
• Utilización de diferentes recursos para la comprensión de la música escuchada: corporales, vocales, instrumentales, audiovisuales, textos, partituras, musicogramas y otras representaciones gráficas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3º ESO</td><td>Académicas</td><td>Aplicadas</td><td rowspan="2">Bloque 1. Interpretación y creación:
• Profundización en el conocimiento del lenguaje musical y su práctica.
• Lectura y escritura musical como apoyo para la interpretación y creación.
• La voz, la palabra, los instrumentos y el cuerpo como medios de expresión musical.
• Interpretación de repertorio vocal, instrumental y de danzas.
• Elaboración de arreglos.
• Composición de canciones y piezas instrumentales a partir de la combinación de los elementos y recursos presentados en el contexto de las diferentes actividades que se realizan en el aula.
Bloque 2. Escucha:
• Utilización de diferentes recursos para la comprensión de la música escuchada: corporales, vocales, instrumentales, audiovisuales, textos, partituras, musicogramas y otras representaciones gráficas.
• Elementos que intervienen en la construcción de una obra musical e</td></tr>
<tr><td>Bloque 2. Números y álgebra:
• Potencias de números racionales con exponente entero.
• Operaciones con fracciones.
• Sucesiones numéricas.
Bloque 3. Geometría:
• Figuras planas.
• Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.
Bloque 5. Estadística y Probabilidad:
• Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.</td><td>Bloque 2. Números y álgebra:
• Potencias de números naturales con exponente entero.
• Operaciones con fracciones.
• Sucesiones numéricas.
Bloque 3. Geometría:
• Figuras planas.
• Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.</td></tr>
</table>

			identificación de los mismos en la audición y el análisis de obras musicales. **Bloque 3. Contextos musicales y culturales:** • Los grandes periodos de la Historia de la Música: compositores géneros, formas y estilos. **Bloque 4. Música y tecnologías:** • Sonorización de representaciones dramáticas, actividades de expresión corporal y danza e imágenes fijas y en movimiento.
4ª ESO	**Bloque 2. Números y álgebra:** • Números reales, la recta real: representación de números en la recta real. Intervalos. • Potencias de exponente entero o fraccionarios. • Potencias de exponente racional. Operaciones. • Logaritmos. **Bloque 4. Funciones:** • Funciones. **Bloque 5. Estadística y Probabilidad:** • Introducción a la combinatoria. • Cálculo de probabilidades. • Medidas de centralización.	**Bloque 2. Números y álgebra:** • Números racionales e irracionales. Representación en la recta real. Intervalos. **Bloque 5. Estadística y Probabilidad:** • Cálculo de probabilidades. • Medidas de centralización.	**Bloque 1. Interpretación y creación:** • Técnicas, recursos y procedimientos compositivos en la improvisación, la elaboración de arreglos y la creación de piezas musicales. **Bloque 2. Escucha:** • Audición, reconocimiento, análisis y comparación de músicas de diferentes géneros y estilos. **Bloque 4. Música y tecnologías:** • Utilización de dispositivos electrónicos, recursos de internet y software musical de distintas características para el entrenamiento auditivo, la escucha, la interpretación y la creación musical.

Tabla 7. Conexiones curriculares de Matemáticas y música en la ESO.

Con el fin de que el alumnado, además del trabajo interdisciplinar en las materias de música y matemáticas, adquiera las competencias clave de forma efectiva, las actividades se deben plantear de forma que se desarrolle más de una competencia al mismo tiempo en cada propuesta didáctica. En general, a través de la metodología planteada y las propuestas didácticas, se van a trabajar las competencias clave de la siguiente manera:

- A través del trabajo en grupo y el debate en clase se trabaja la **competencia lingüística**, la **competencia social y cívica** y la **competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.**
- La metodología basada en el aprendizaje activo y participativo desarrolla la **competencia de aprender a aprender.**
- Los propios contenidos temáticos, tanto musicales como matemáticos, así como el planteamiento interdisciplinar, son el vehículo para el trabajo de la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** y la **competencia de conciencia y expresiones culturales.**

4.4 Propuesta de actividades

Tras ver los fundamentos matemáticos de la música que podrían tener relación con los contenidos del currículo de la etapa de Educación Secundaria, y una vez analizadas las conexiones curriculares que nos permiten conectar ambas materias en función de la normativa vigente en la Comunidad de Madrid, se propone el siguiente planteamiento de actividades divididas por cursos y temas (las actividades en rojo se detallan en los anexos):

	Matemáticas	Música	Actividad (fuentes)
2º ESO	Potencias.	Lenguaje musical: figuras.	✓ Dominó de fracciones y potencias (Liern & Queralt, 2008 a). ✓ Partitura matemática.
	Máximo común divisor (algoritmo de Euclides).	Lenguaje musical: ritmo y tempo. La voz, la palabra, los instrumentos y el cuerpo como medios de expresión musical. Interpretación de repertorio vocal, instrumental y de danzas.	✓ Ritmos euclidianos y mcd. (Gómez, 2011)
	Mínimo común múltiplo.	Lenguaje musical: ritmo y tempo.	✓ M.c.m. y percusión corporal. (Musicomàtics, 2015 a)

		La voz, la palabra, los instrumentos y el cuerpo como medios de expresión musical. Interpretación de repertorio vocal, instrumental y de danzas.	
	Números triangulares.	Profundización en el conocimiento del lenguaje musical y su práctica: ritmo, tempo, intervalos, escalas, armonía.	✓ Pitágoras, el monocordio y los acordes musicales esenciales (tetraktys). (Arqui2, s.f.)
	Cuerpos geométricos.	Danza. Instrumentos musicales.	✓ Geodanza. ✓ Las formas de los instrumentos.
	Concepto de función.	El sonido, parámetros y representación gráfica. Lectura y escritura musical.	✓ Audiográficos. (Venegas, y otros, 2013)
3º ESO			
	Fracciones.	Los grandes periodos de la Historia de la Música. Composición. Lenguaje musical.	✓ Sistema afinación pitagórico. ✓ Intervalos. (Liern & Queralt, 2008 a), (Peralta, 2011 b), (Peralta, 2003), (Peralta, 2011 a), (Vlashi & Cruz) ✓ Puzle musimático.
	Potencias.	Los grandes periodos de la Historia de la Música. Composición. Lenguaje musical.	✓ Sistema afinación pitagórico (encadenamiento de quintas) y temperado (utilización de guitarra como herramienta de experimentación y aprendizaje). (Liern & Queralt, 2008 a), (Peralta, 2011 b), (Peralta, 2003), (Peralta, 2011 a), (Vlashi & Cruz)
	Sucesiones. Progresión geométrica.	Los grandes periodos de la Historia de la Música. Composición. Lenguaje musical.	✓ Sistemas de afinación. (Peralta, 2003), ✓ Fibonacci en Música para cuerdas, percusión

			y celesta, Bartók 1936 (Sans & Astor). ✓ Proporciones en instrumentos (Nº áureo, proporción cordobesa, flauta).
	Geometría.	Los instrumentos.	✓ Áreas y volúmenes en instrumentos.
	Movimientos en el plano.	Composición. Lectura y escritura musical. Escucha. Actividades de expresión corporal y danza.	✓ Análisis de geometrías musicales en partituras. (Vlashi & Cruz), (Losada, 2008)
	Probabilidad (Laplace).	Composición. Lectura y escritura musical. Escucha. Elaboración de arreglos. Interpretación.	✓ El azar como recurso compositivo (juego de dados de Mozart). (Blázquez, 2012)
4ª ESO			✓
	Recta real: intervalos. Números racionales e irracionales.	Técnicas, recursos y procedimientos compositivos en la improvisación, la elaboración de arreglos y la creación de piezas musicales.	✓ Sistemas de afinación. (Vlashi & Cruz), (Peralta, 2011 b), (Peralta, 2003), (Peralta, 2011 a)
	Potencias.	Técnicas, recursos y procedimientos compositivos en la improvisación, la elaboración de arreglos y la creación de piezas musicales.	✓ Sistemas de afinación. (Vlashi & Cruz), (Peralta, 2011 b), (Peralta, 2003), (Peralta, 2011 a)
	Logaritmos.	Técnicas, recursos y procedimientos compositivos en la improvisación, la elaboración de arreglos y la creación de piezas musicales.	✓ Percepción acústica (Liern & Queralt, 2008 b), (Liern, 1994 b), (Peralta, 2003).
	Funciones.	Técnicas, recursos y procedimientos compositivos en la improvisación, la elaboración de arreglos y la creación de piezas musicales.	✓ Las cuerdas vibrantes. (Liern, 1994 a), (Rodriguez, 2011 a), (Keenan, 2013), (Maroto)
	Probabilidad y combinatoria.	Técnicas, recursos y procedimientos compositivos en la improvisación, la elaboración de arreglos y la creación de piezas musicales. Utilización de recursos tecnológicos.	✓ Juego de dados de Mozart. (Vlashi & Cruz) ✓ ¿Alguna vez nos quedaremos sin música?

	Estadística: medidas de centralización, tipos de medias.	Técnicas, recursos y procedimientos compositivos en la improvisación, la elaboración de arreglos y la creación de piezas musicales.	✓ Pitágoras y las proporciones armoniosas de los intervalos. (Peralta, 2003), (Nolla), (Beato, 2003)

Todas estas propuestas se deben apoyar con recursos audiovisuales e incluso con vídeos relacionados que pueden encontrarse en internet, siempre comprobando previamente la fuente de información y el contenido. Por ejemplo, en la web de la American Mathematical Society[6] disponen de una sección con vídeos, podcasts y artículos que resultan interesantes de cara a su uso en el aula, siempre y cuando los alumnos tengan cierto nivel de inglés.

Por otro lado, también se pueden trabajar las matemáticas a través de la música desde otro tipo de enfoque, el uso de las canciones con texto matemático como recurso didáctico nemotécnico para aprender conceptos matemáticos. Se basa en la utilización de letras con contenido didáctico. Es un recurso muy utilizado en etapas educativas anteriores y que puede seguir siendo de ayuda si se utilizan canciones de estilos acordes a las edades en las diferentes etapas de la educación Secundaria. En español son escasos estos recursos, pero en inglés sí existen bibliotecas de canciones como recurso para la enseñanza, como por ejemplo la web 'Songs for teaching'. Estas herramientas también ayudan a desarrollar la audición y comprensión del inglés, idioma presente en nuestra educación como segunda lengua o como lengua vehicular en algunas materias en centros bilingües. Existen canciones sobre el número Pi, el número áureo y Fibonacci, sobre Thales, etc.

Algunos ejemplos de estos recursos los podemos encontrar en los siguientes enlaces:

---

[6] Web: http://www.ams.org/samplings/math-and-music

- ¿Cómo suena pi?: http://concienciamusical-plataforma.blogspot.com.es/2012/03/como-suena-pi.html
- Teorema de Thales, Les Luthiers: https://www.youtube.com/watch?v=OXrYNPJQoTA
- Cómo resolver una canción con matemáticas, Karen Cheng: https://www.youtube.com/watch?v=pCrD9N_3Jkw
- La Fibonacci en Lateralus, Tool: https://www.youtube.com/watch?v=3pUoHmLzC-E

5 Conclusiones

Música y matemáticas han evolucionado históricamente dándose la mano estrechamente, y este es un factor que debería aprovecharse en el sistema educativo desde un enfoque holístico del proceso de aprendizaje y no desde la visión estricta del número de horas de cada materia por separado y sin conexiones. El trabajo interdisciplinar favorece el desarrollo de las capacidades de razonamiento por similitud y comparación de situaciones en la vida cotidiana, integra los conocimientos previos y ayuda al aprendizaje eficaz. Si a esto añadimos el trabajo del alumnado en su entorno más inmediato, es decir, con colaboraciones externas a través de las cuales se les da salida en la sociedad que les envuelve, hay un retorno que tiene un efecto relevante a nivel motivacional.

Este tipo de planteamientos educativos son muy debatidos en foros de educación y en el proceso de formación de los docentes, sin embargo, la puesta en práctica suele resultar compleja debido a la presión institucional por cumplir el currículo. El profesorado debe impartir una serie de temas en un espacio de tiempo que suele quedarse corto, están sometidos a una gran presión por cumplir con los contenidos y los plazos. Es necesario que desde los órganos de gobierno se planteen realizar un diagnóstico de la realidad de los centros educativos con el fin de realizar un plan de acción acorde a la situación actual y las necesidades reales del alumnado y el profesorado, haciendo especial hincapié en la formación de estos últimos, tanto en su formación de base como la formación para el trabajo en proyectos interdisciplinares. El proyecto EMP-M integra la formación de maestros y profesores en su planteamiento, apostando por su formación como eje fundamental para la aplicación didáctica[7].

Tras haber consultado los proyectos existentes en este sentido, se podría decir que en España no existe una clara apuesta por la enseñanza de las matemáticas y la música desde un enfoque interdisciplinar en Secundaria Obligatoria y Bachillerato, aunque sí se están empezando proyectos en las primeras etapas educativas. Es evidente que existe un vacío, especialmente en Secundaria, donde cada asignatura se imparte con independencia del resto; es aquí donde surge la oportunidad de llenar un espacio para el aprendizaje significativo de dos materias que históricamente fueron de la mano y esconden un gran potencial educativo es un recurso didáctico aún desconocido en el campo educativo nacional.

En general, la mayoría de las propuestas consultadas se focalizan en la enseñanza de las matemáticas a través del hilo conductor de la música, es decir, se utiliza la música como herramienta de aprendizaje, no como una enseñanza de dos materias en simbiosis, principalmente en las propuestas de Secundaria y en los artículos de divulgación matemática (las referencias en revistas de divulgación musical que hablen de matemáticas son realmente escasas). La música es una materia que permite el trabajo interdisciplinar con otras áreas del conocimiento de una manera más eficaz y dinámica, quizás por su gran poder integrador es utilizada como recurso pedagógico más allá que como fin en sí misma.

Hoy en día existen multitud de recursos y herramientas que se pueden utilizar en el aula para el enriquecimiento competencial y para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje. El uso de las nuevas tecnologías facilita la labor docente y a su vez es una herramienta motivadora para un alumnado que ha nacido en la era digital. Es necesario crear nuevas experiencias en el aula, pero para ello es fundamental que el profesorado trabaje en este camino, esté motivado e ilusionado,

---

[7] Vídeo de presentación del proyecto EMP-M en Tv3 (en catalán): http://www.ccma.cat/tv3/alacarta/telenoticies-vespre/pla-pilot-per-ensenyar-musica-i-matematiques-juntes-a-primaria/video/5493333/

y este es un tema delicado hoy en día puesto que el sistema educativo tradicional está muy arraigado y resulta complicado proponer nuevas formas de trabajo. Pero ese es otro debate.

Desde este trabajo se ha pretendido encontrar una vía de introducción a nuevas metodologías sin ser un cambio radical, sino paulatino; se ha buscado el equilibrio entre la realidad curricular y la presión institucional y el dar un paso hacia las nuevas teorías del aprendizaje y modelos educativos a través del trabajo y la evaluación por competencias, dentro de una metodología activa y participativa que facilite el proceso de enseñanza-aprendizaje. Plantear preguntas abiertas que todos los alumnos puedan entender, evitando las preguntas directas y técnicas, se fomenta el trabajo en grupo y por tanto la resolución de problemas desde diferentes planteamientos y procedimientos. Al poner en común el trabajo de cada grupo, los alumnos aprenden de los diferentes procesos que han surgido, enriquecen su capacidad de pensar y resolver problemas de una forma más crítica y eficaz.

En conclusión, se debería revalorizar la educación musical en nuestro sistema educativo e impulsar modelos educativos integradores de varias áreas del conocimiento. Es importante cambiar la visión que los alumnos tienen de las matemáticas y su metodología de enseñanza para hacerla más atractiva y con una visión más global e interdisciplinar.

6 Bibliografía

Amster, P. (2013). *Matematica Maestro*. Recuperado el 20 de Mayo de 2016, de http://matematicamaestro.blogspot.com.es/

Arqui2. (s.f.). *Música y arquitectura, el discreto encanto de las proporciones*. Recuperado el 01 de junio de 2016, de Arquitectura y Diseño: http://arqui-2.blogspot.com.es/2014/10/musica-y-arquitecturael-discreto.html

Barraza, D. (2012). *Figuras Musicales*. Recuperado el 26 de abril de 2016, de Teoría de la música: https://musicateoria.wordpress.com/figuras-musicales/

Beato, J. (noviembre de 2003). Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales. *SUMA*, 39-44.

Benson, D. (2008). *Music: A Mathematical Offering.* Department of Mathematics, University of Aberdeen, Scotland.

Blázquez, R. (2012). *Música y Matemáticas (Trabajo Fin de Gradol).* Universidad de Salamanca, Ávila.

Calvimontes, C. (s.f.). *El número de oro en los instrumentos de cuerda*. Recuperado el 11 de mayo de 2016, de Presencia del número de oro: http://exapenta.neocities.org/CUERDAS_STRINGS.html

Casals, A., Carrillo, C., & González-Martín, C. (2014). La música también cuenta: combinando matemáticas y música en el aula. *Revista electrónica de la Lista Europea de Música en la Educación LEEME, 34*. Recuperado el 18 de mayo de 2016, de http://musica.rediris.es/leeme/revista/casalsetal14.pdf

Céspedes, G., Farigu, G., & Gómez, F. (2011 a). Materritmo. *Divulgamat*. Recuperado el 01 de junio de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13180:53-octubre-2011-materritmo-o-el-ritmo-me-mata&catid=69:teatro-y-matemcas&directory=67

Céspedes, G., Farigu, G., & Gómez, F. (2011 b). Matherrhythm en Maths Week Ireland 2011. *Divulgamat*. Recuperado el 01 de junio de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13371:54-noviembre-2011-matherrhythm-en-maths-week-ireland-2011&catid=69:teatro-y-matemcas&directory=67

Contreras, Á., Pacheco, J., & Díez, M. (2007). Las matemáticas y la evolución de las escalas musicales. *SUMA*(54), 43-49.

Departamento de Matemáticas, IES de Pravia. (s.f.). *La sucesión Fibonacci*. Recuperado el 16 de abril de 2016, de Música y Matemáticas: http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/profes/departam/mates/musica/07_Fibonacci,%20%C3%A1ureo%20y%20m%C3%BAsica/bartok.htm

Fernandes, J. (1998). Paralelismo entre história e psicogenese da escrita do ritmo musical. *Psicologia USP, 9*(2), 221-247. Recuperado el 16 de mayo de 2016, de Paralelismo entre história e psicogenese da escrita do ritmo musical: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-65641998000200009

Ferron, E. (1997). *The saxophone is my voice.* Paris, Francia: IMD.

Fox, S. (s.f.). *Practical Mathematics*. Recuperado el 09 de mayo de 2016, de Sfoxclarinets: http://www.sfoxclarinets.com/Mathematics.html

García, J. (s.f.). La didáctica de las Matemáticas: una visión general. En G. d. Canarias (Ed.). Recuperado el 04 de mayo de 2016, de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm

Girón, F. J. (2006). Las matemáticas, la música y la estadística. *Discurso inaugural de la Real Academia de las Ciencias*, (págs. 11-32).

Gómez, F. (2010). Las matemáticas en la música de Xenakis I. *Divulgamat*. Recuperado el 28 de marzo de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=11360&directory=67

Gómez, F. (2011). El algoritmo de Euclides como principio musical. *Divulgamat*, 21-34. Recuperado el 19 de mayo de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=1050&Itemid=

Gómez, F. (2015 a). Otras armonías son posibles (III). *Divulgamat*. Recuperado el 02 de abril de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=16588:67-mayo-2015-otras-armonias-son-posibles-iii&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67

Gómez, F. (2015 b). Teoría matemática de la música. *Divulgamat*. Recuperado el 02 de abril de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article

&id=16768:69-julio-2015-teoria-matematica-de-la-musica&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67

Harrison, P. (s.f.). *Medieval and Renaissance wind instruments*. Recuperado el 18 de abril de 2016, de logarithmic: http://www.logarithmic.net/pfh-files/design/Medieval_Wind_Instruments.pdf

Keenan, P. (2013). *Why do different musical instruments.* Recuperado el 22 de abril de 2016, de Meandering through Mathematics: http://meandering-through-mathematics.blogspot.com.es/2013/09/why-do-different-musical-instruments.html

Keenan, P. (2015). *Consonance and Dissonance in Music.* Recuperado el 22 de abril de 2016, de Meandering Through Mathematics: http://meandering-through-mathematics.blogspot.com.es/2015/03/recently-ive-had-lot-of-fun-composing.html

Kussatz, S. (2011). *Iannis Xenakis*. Recuperado el 12 de abril de 2016, de Whitehot Magazine of Contemporary Art: http://whitehotmagazine.com/articles/contemporary-art-pacific-design-center/2202

Liern, V. (1994 a). Algoritmos matemáticos y afinación musical. *Educación Matemática, 6*(2), 1-15.

Liern, V. (1994 b). La música y sus materiales: una ayuda para las clases de Matemáticas. *SUMA*(14-15), 60-64.

Liern, V. (2004-2005). Afinación. *Divulgamat*. Recuperado el 23 de febrero de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=8747:1-2004-2005-afinaci&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67

Liern, V. (2008). La música y el número siete. Historia de una relación controvertida. *SUMA*(58), 137-143.

Liern, V. (2009). Las matemáticas de Johann Sebastian Bach. *SUMA*(61), 113-118.

Liern, V. (2012). Euler y su interés por la música. *SUMA*(70), 93-98.

Liern, V., & Queralt, T. (2008 a). *Música y Matemáticas, la armonía de los números* (Vol. Día escolar de las Matemáticas). Badajoz: FESPM. Recuperado el 13 de febrero de 2016, de http://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008_-_musica_y_matematicas.pdf

Liern, V., & Queralt, T. (2008 b). *Otras actividades de Música y Matemáticas* (Vol. Día Escolar de las Matemáticas). Recuperado el 13 de febrero de 2016, de http://www.matesymas.es/jm/12mayo/material.pdf

Losada, R. (2008). Geometría musical. *divulgaMAT*. Recuperado el 05 de marzo de 2016, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=8699:9-septiembre-2008-geometrmusical-2&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67

Maroto, Á. (s.f.). *Informática, Matemáticas y Música: La pluma digital.* Recuperado el 10 de mayo de 2016, de Midimath: http://midimath.tucajon.com/

Musicomàtics. (2015 a). *Quin és el mcm dels números 2, 3, i 5? Percudim-ho!* Obtenido de musicomatics: https://musicomatics.files.wordpress.com/2015/01/mcm-i-percussic3b3-corporal1.pdf

Musicomàtics. (2015). *Combinant música i matemàtiques a l'escola*. (EMP-Maths) Recuperado el abril de 2016, de Musicomàtics: https://musicomatics.wordpress.com

Nolla, R. (s.f.). *Apunt sobre la mitjana harmònica des de la geometria.* IES Pons d'Icart, Tarragoa. Recuperado el 17 de mayo de 2016, de http://www.xtec.cat/~rnolla/apunts/MitjHarmoni.pdf

Peralta, J. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias Pedagógicas*(Nº Extraordinario, Vol. II), 235-244.

Peralta, J. (2003). Matemáticas para no desafinar. *La Gaceta de la RSME, 6.2*, 437-456.

Peralta, J. (2011 a). Escalas musicales y matemáticas: estudio interdisciplinar. *Música y educación*(87), 48-61.

Peralta, J. (2011 b). Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula. *Educación matemática, 23*(3), 67-90.

Plaza, R. (2010). *Figuras*. Recuperado el 26 de abril de 2016, de Rubén Plaza Ramos: https://rubanetti.wordpress.com/tag/figuras/

Ríos, R., & García, M. (2003). *Entre las matemáticas y la música*. Recuperado el 15 de marzo de 2016, de http://metode.cat/es/Revistas/Monografics/Fons-i-forma/Entre-les-matematiques-i-la-musica

Rodriguez, A. (2011 a). *El Pentagrama, una escala logarítmica.* Recuperado el 20 de mayo de 2016, de Epsilones: http://www.epsilones.com/epsiclas/paginas/t-calculo/calc-010-funciones-explog-pentagrama.html#inicio

Rodríguez, R. (2011). *Construcción de la guitarra española. Panorama de su construcción en la Extremadura actual (Tesis doctoral).* Universidad de Extremadura, Cáceres.

Rodríquez, J. (s.f.). *2500 años de temperamentos musicales*. Recuperado el 21 de mayo de 2019, de Teoría: https://www.teoria.com/es/articulos/temperamentos/index.php

Sans, J., & Astor, M. (s.f.). *Béla Bartók, análisis de Música para cuerdas, percusión y celesta.* Universidad Central de Venezuela, Cátedra de Análisis Musical. Recuperado el 20 de mayo de 2016, de http://www.academia.edu/2560583/B%C3%A9la_Bart%C3%B3k_An%C3%A1lisis_de_M%C3%BAsica_para_cuerdas_percusi%C3%B3n_y_celesta_

School of Physics, University New South Wales, Sydney. (s.f.). *Music Acoustics*. Recuperado el 25 de febrero de 2016, de http://newt.phys.unsw.edu.au/music/

Solà, J. (s.f.). *Música y geometría*. Recuperado el 17 de mayo de 2016, de Sacred-geometry: http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/m%C3%BAsica-y-geometr%C3%ADa

Tomasini, M. (s.f.). *El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas.* Recuperado el 22 de marzo de 2016, de Palermo: http://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf

Venegas, A., Cádiz, R., Tejada, J., Thayer, T., de la Cuadra, P., Lecaros, P., & Petrovich, M. (2013). Audiográficos: implementación y evaluación de un programa informático para el aprendizaje de la interpretación y representación matemática de coordenadas a través de la música y el sonido. *Revista electrónica de Música en la Educación, LEEME*(32), 135-155. Recuperado el 31 de mayo de 2016, de http://musica.rediris.es/leeme

Vlashi, F., & Cruz , M. (s.f.). *Guía didáctica: Música o Matemáticas.* Consorcio para la promoción de la Música. Recuperado el 24 de 02 de 2016, de http://www.edu.xunta.es/centros/iesterradesoneira/system/files/Didactica_Musica_oMatematicas.pdf

Wollenberg, S. (2003). Music and mathematics: an overview. En R. F. John Fauvel, *Music and Matehmatics, from Pythagoras to fractals* (págs. 2-9). New York: Oxford.

Legislación consultada

Comunidad de Madrid, Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, 29 de mayo de 2007, núm. 126, pp. 48-139.

Comunidad de Madrid, Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, 20 de mayo de 2015, núm. 118, pp. 10-309.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 03 de enero de 2015, núm. 3, pp. 169-546.

ANEXO A. Actividades propuestas

ACTIVIDAD 1. Puzle musimático

Descripción de la actividad

Esta actividad consiste en relacionar las figuras musicales con sus valores expresados en fracciones (tomando como referencia la redonda =1) y potencias de 2 (tomando como referencia la semifusa=1) y sus operaciones, de tal forma que unan los lados con expresiones equivalentes.

Curso recomendado

- 2º y 3º de ESO, (4º de ESO como actividad de motivación)

Material

- Puzle en el que se representan cuadrados divididos espacialmente en 4 partes, en cada una de ellas hay figuras musicales, fracciones o potencias. La notación se ha realizado de diversas maneras posibles: notación musical, fracciones, potencias y operaciones con figuras musicales.
- En la ficha se incluye el puzle resuelto para el profesorado. A los alumnos se les debe repartir las piezas recortadas y mezcladas.

Contenidos que se trabajan

- Conceptos de figuras musicales y sus relaciones.
- Operaciones con fracciones sencillas.
- Simplificación de fracciones.
- Relación de figuras musicales y potencias de base 2.
- Equivalencias entre fracciones, potencias y figuras musicales.
- Modificando algunas de las operaciones propuestas en las fichas del puzle podrían incluirse los números negativos.

Competencias clave

- **Comunicación lingüística:** a través del trabajo en grupo para resolver el puzle. Interacción y diálogo.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología**: trabajo de conceptos matemáticos y resolución de problemas.
- **Aprender a aprender**: puesta en práctica de conocimientos previos. Los alumnos aprenden a través de una actividad práctica.
- **Competencias sociales y cívicas**: trabajo en grupo, desarrollo de habilidades sociales.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:** organización y toma de decisiones para la resolución del problema.
- **Conciencia y expresiones culturales:** esta competencia se trabaja con los conceptos musicales.

Preguntas complementarias

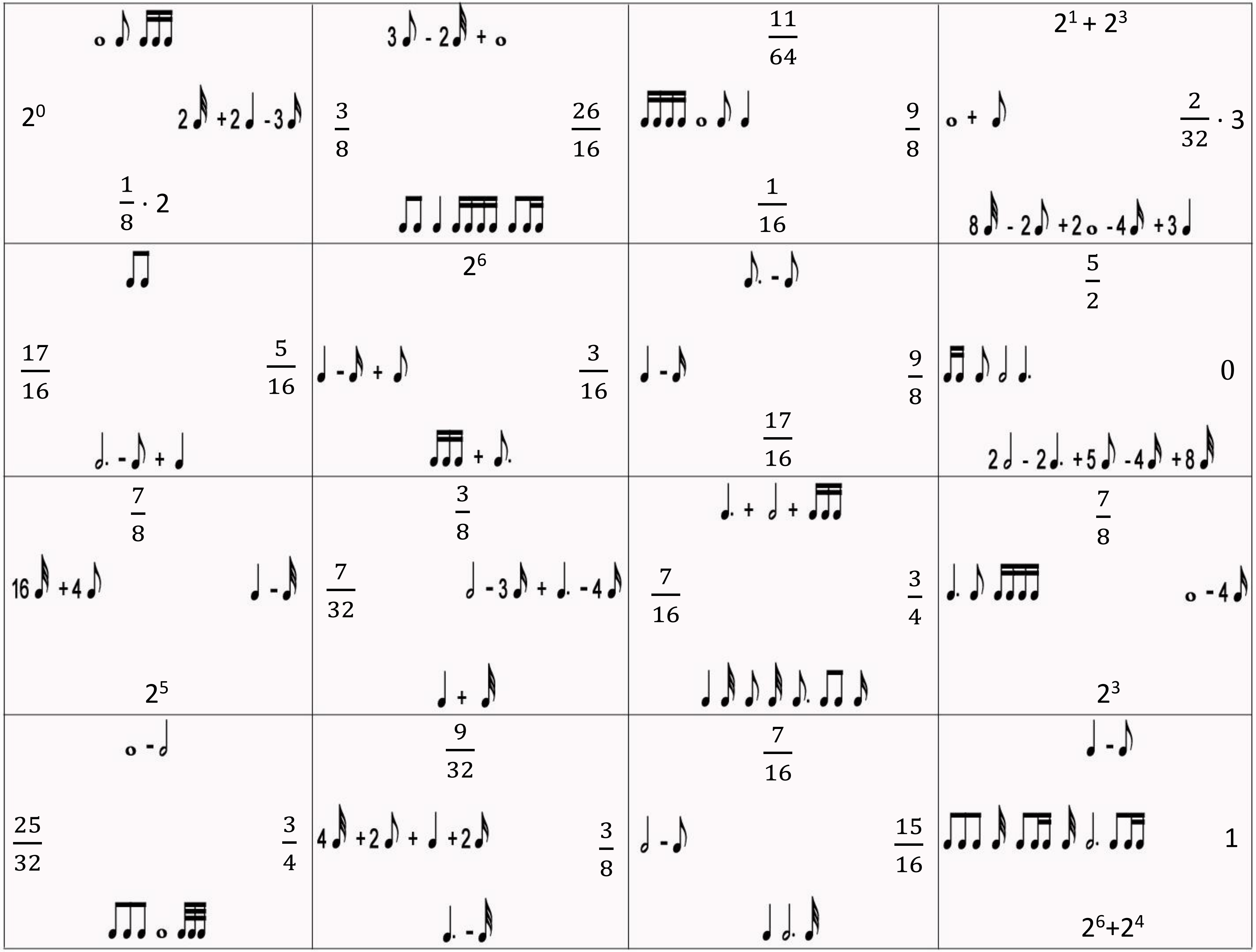
- ¿Qué dificultades has encontrado realizando el puzle?
- ¿Hay una única pareja para cada pieza?
- ¿Recuerdas qué es un número racional?
- Escribe en tu cuaderno de música los ritmos obtenidos de las operaciones con fracciones y potencias.

Recuerda:

		𝅝	𝅗𝅥	𝅘𝅥	𝅘𝅥𝅮	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
REDONDA	𝅝	1	2	4	8	16	32	64
BLANCA	𝅗𝅥	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
NEGRA	𝅘𝅥	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
CORCHEA	𝅘𝅥𝅮	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
SEMICORCHEA	𝅘𝅥𝅯	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
FUSA	𝅘𝅥𝅰	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
SEMIFUSA	𝅘𝅥𝅱	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Para solucionar el puzle ten en cuenta que:

- Si tomamos como unidad la semifusa=1 estaremos trabajando con potencias de 2. Es decir, una redonda = 64 semifusas = 2^6.
- Si tomamos como referencia la redonda =1 estaremos trabajando con fracciones, un redonda = 1/64 semifusas.



2^0
1/8 · 2
3/8
26/16
11/64
9/8
1/16
2^1 + 2^3
2/32 · 3
17/16
5/16
2^6
3/16
9/8
17/16
5/2
0
7/8
2^5
3/8
7/32
7/16
3/4
7/8
2^3
25/32
3/4
9/32
3/8
7/16
15/16
1
2^6+2^4

ACTIVIDAD 2. Partitura en clave matemática

Descripción de la actividad

El objetivo de esta actividad es descifrar una partitura escrita en clave numérica. Por un lado, las figuras musicales se han de deducir a partir de su valor en forma de fracción y, por otro, las notas han de descifrarse a partir de su valor en las diferentes escalas estudiadas (pitagórica, temperada…).

Una vez descifrada la partitura, los alumnos deberán transcribirla a lenguaje musical e interpretarla con instrumentos musicales. La pieza está adaptada para tocar con flauta dulce, instrumento de estudio habitual en las aulas. Los primeros 10 compases son más sencillos, por lo que en función del nivel instrumental de los alumnos pueden interpretar la mitad de la partitura o toda entera.

La dificultad de la actividad puede variar si cambiamos la partitura por una pieza con mayor diversidad de figuras y notas. Otra variable para incrementar la dificultad sería expresar las figuras y las notas en operaciones de fracciones y potencias que han de operar para obtener la figura y la nota. O bien con sus relaciones de frecuencias.

Curso recomendado

- 2º y 3º de ESO

Material

- Papel pautado para transcribir la partitura obtenida.
- Flauta dulce (u otro instrumento) para interpretar la pieza.

Contenidos que se trabajan

- Lenguaje musical.
- Sistemas de afinación.
- Historia de la música.
- Interpretación instrumental.
- Operaciones con fracciones y potencias.
- Equivalencias entre fracciones, potencias y figuras musicales.

Competencias clave

- **Comunicación lingüística:** a través del trabajo en grupo en la resolución del problema. Interacción y diálogo.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología**: trabajo de conceptos matemáticos y resolución de problemas.
- **Aprender a aprender**: puesta en práctica de conocimientos previos. Los alumnos aprenden a través de una actividad práctica.
- **Competencias sociales y cívicas**: trabajo en grupo, desarrollo de habilidades sociales.
- **Competencia digital**: uso de herramientas informáticas para la transcripción de la partitura.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:** organización y toma de decisiones para la resolución del problema.

- **Conciencia y expresiones culturales:** esta competencia se trabaja con los conceptos musicales.

Preguntas complementarias

- ¿Podrías decir de qué canción se trata? ¿Qué sabes acerca de ella?
  Ayúdate de internet para buscar información sobre la pieza, su compositor, época, estilo…
- ¿De qué tipo de compás está compuesta la pieza?
- Cada compás está compuesto de figuras musicales, ¿cuánto ha de sumar cada uno?
- ¿Cuántos compases hay en el fragmento?
- ¿Qué fracción es la más repetida? ¿a qué figura pertenece?
- Si sabemos que el tempo de este fragmento es blanca = 60, ¿cuánto dura la música?, si te resulta más fácil, puedes deducir a partir de este dato el tempo a negras (¿a cuántas negras equivale una blanca?). Ahora ya sabes el tempo, ¿cuánto tiempo dura una blanca? ¿y una negra?

Recuerda:

		𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
REDONDA	𝅝	1	2	4	8	16	32	64
BLANCA	𝅗𝅥	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
NEGRA	♩	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
CORCHEA	♪	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
SEMICORCHEA	𝅘𝅥𝅯	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
FUSA	𝅘𝅥𝅰	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
SEMIFUSA	𝅘𝅥𝅱	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

	Do	Do$^{\#}$	Re	Mi^{b}	Mi	Fa	Fa$^{\#}$	Sol	Sol$^{\#}$	La	Si^{b}	Si
12 NOTAS PITAGÓRICAS	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
TEMPERAMENTO IGUAL	1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$

El puntillo añade la mitad del valor de la nota.

Partitura en clave matemática (sistema de afinación pitagórico):

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4} \\ 0\ 0\ 1\ \frac{3^2}{2^3}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3^2}{2^3}\ 1\ 0\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ 1'\ \frac{3^5}{2^7}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3^2}{2^3}\ 1\ \frac{3^2}{2^3}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3^2}{2^3}\ 1\ 0\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ 1'\ \frac{3^5}{2^7}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3^2}{2^3}\ 1\ 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4} \\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ 0\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3^5}{2^7}\ 1'\ \frac{3^5}{2^7}\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3^5}{2^7}\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ 0\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3^5}{2^7}\ 1'\ \frac{3^5}{2^7}\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3^5}{2^7}\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1 \\ \frac{3^3}{2^4}\ \frac{3^3}{2^4}\ 0\ 1\ \frac{3^2}{2^3}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3^2}{2^3}\ 1\ 0\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^3}{2^4}\ 1'\ \frac{3^5}{2^7}\ \frac{3}{2}\ \frac{3^4}{2^6}\ \frac{3^2}{2^3}\ 1 \end{array}\right.$$

Solución:

- Se trata de un fragmento de 'El señor de los anillos', de Howard Shore, compositor de bandas sonoras para películas.
- Este fragmento está escrito en compás de 4/4, por tanto, cada compás ha de sumar 4 tiempos (en negras, $4 \cdot \frac{1}{4}$). En total hay 24 compases.
- La figura más repetida es la negra, cuyo valor es $\frac{1}{4}$.
- Si el tempo es blanca = 60, quiere decir que en un minuto deben ejecutarse 60 blancas, es decir, hay un pulso de blanca por segundo (recuerda que 1 minuto son 60 segundos), equivalentes a 2 de negras. Si el compás es 4/4, caben 2 blancas, por tanto, cada compás dura 2 pulsos, que serán 2 segundos. En total hay 24 compases (¡cuidado con la repetición del compás 11 al 14!), por 2 segundos cada uno obtenemos una duración de 48 segundos para este fragmento.

24 compases x 2 blancas x $\frac{1}{60}$ minutos = 0,8 minutos, ó 0,8 min. x 60 seg. = 48 segundos

- Si en un minuto caben 60 blancas, cada una dura 1 segundo. Como cada una equivale a 2 negras, también caben 60*2 = 120 negras, cada una tendrá una duración de:

$\frac{1\,minuto}{120\,negras} = \frac{60\,segundos}{120\,negras} = 0{,}5\,segundos$

ACTIVIDAD 3. ¿Alguna vez nos quedaremos sin música nueva?

Descripción de la actividad

La finalidad de esta actividad es que los alumnos indaguen en el cálculo de probabilidades y obtengan, a partir de sus conocimientos musicales y matemáticos, el número de composiciones que potencialmente podrían crearse. En función de cómo se planteen el problema el resultado será diferente, lo que dará pie a debatir sobre las variaciones de resultados en función de los datos de partida en los análisis estadísticos y de probabilidad, así como entrar en temas musicales, puesto que no todas las combinaciones posibles sonarán bien.

Curso recomendado

- 4º de ESO

Material

- Calculadora.
- Ordenador con internet.

Contenidos que se trabajan

- Lenguaje musical.
- Composición y recursos compositivos (belleza y armonía musical).
- Probabilidad.

Competencias clave

- **Comunicación lingüística:** a través del trabajo en grupo en la resolución del problema. Interacción y diálogo.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología**: trabajo de conceptos matemáticos y resolución de problemas.
- **Aprender a aprender**: puesta en práctica de conocimientos previos. Los alumnos aprenden a través de una actividad práctica.
- **Competencias sociales y cívicas**: trabajo en grupo, desarrollo de habilidades sociales.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:** organización y toma de decisiones para la resolución del problema.
- **Conciencia y expresiones culturales:** esta competencia se trabaja con los conceptos musicales.

Recursos de interés:

- Vídeo de apoyo a la actividad (en inglés): https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=DAcjV60RnRw

- **La canción más fea del mundo.** Conferencia TEDx de Scott Rickard (en inglés). Las canciones que nos suenan agradables se basan en la repetición como parámetro

de belleza. Scott Rickard demuestra que la música sin repeticiones de ningún tipo puede resultar difícil de escuchar.
https://www.youtube.com/watch?v=RENk9PK06AQ

- Abrir debate sobre la música "matematizada" y el vínculo entre ambas disciplinas.
- Abrir debate sobre la importancia de la toma de datos y la expresión de resultados. Especial referencia a los datos estadísticos en los medios de comunicación y su manipulación y/o errores.

Pautas para el desarrollo de la actividad:

Para calcular el número de combinaciones posibles, primero debemos definir nuestro rango da datos, puesto que no será lo mismo contemplar 7 notas naturales de una octava que todas las notas posibles en el rango audible o las 7 octavas de un piano, como tampoco se van a crear melodías infinitas.

Cada grupo de alumnos debe definir sus criterios y restringir los datos para hacer viable el cálculo:

- Duración (número de compases, número de notas).
- Notas a considerar (escala diatónica de 7 notas, escala cromática de 12 notas, escala pentatónica de 5 notas…) y número de octavas.
- Número de figuras musicales.
- Compás.

Veamos un ejemplo:

Datos de partida: compás de 4/4, 3 figuras musicales (redonda, blanca y negra), 12 notas musicales, tempo 2 segundos por compás, duración media de una pieza 2 minutos.

Cálculos:

En función de la figura musical tenemos que:

- Si sólo usamos redondas reducimos las combinaciones posibles dentro de un compás a 1 figura, por tanto, tenemos 12 posibilidades.
- Si sólo usamos blancas cada compás tendrá 2 notas, por lo que tendremos 12 x 12 = 144 opciones para cada compás.
- Si sólo usamos negras cada compás estará compuesto por 4 notas, resultando un total de 12^4 = 20.736 combinaciones.
- Si combinamos blancas (B) y negras (N) tenemos 3 combinaciones posibles: BNN, NBN, NNB, lo que nos da un resultado de 12^3 = 1.728 posibilidades.
- Total de combinaciones posibles con estos datos: 12+144+20.736+1.728 = 22.620 combinaciones para un compás.

En función del número de compases:

- Si cada compás dura 2 segundos y en total la pieza dura 2 minutos tenemos un total de 60 compases (120 segundos/2 segundos por compás).

Resultado final:

- El número posible de composiciones musicales con los datos planteados es **22.620^{60}**

Discusión:

Teniendo en cuenta que se han tomado datos de partida con restricciones importantes, el resultado obtenido es realmente alto, por lo que podemos deducir que las posibilidades reales sobrepasan cuantiosamente esta cifra.