

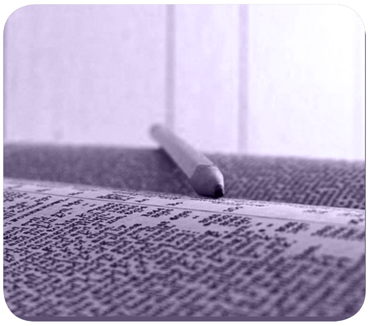
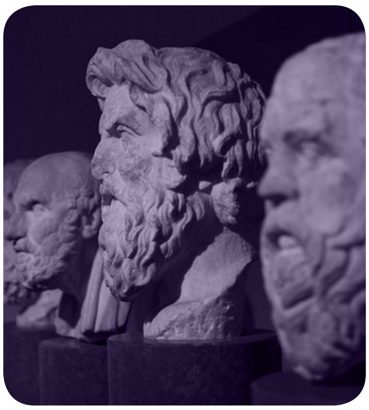
MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de Profesorado y Educación / 16-17

(MESOB)
Especialidad de Matemáticas

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Campus Internacional excelencia UAM CSIC+


Enseñanza del bloque de funciones y de análisis con una perspectiva aplicada a las Ciencias Naturales y Sociales

Jorge Núñez Pascual

UAM EDICIONES

978-84-8344-6215

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Enseñanza del bloque de funciones y de análisis con una perspectiva aplicada a las Ciencias Naturales y Sociales

Autor: **Jorge Núñez Pascual**

Dirigido por: **Bartolomé Barceló**

Trabajo de Fin de Máster

Especialidad de Matemáticas

Curso académico **2016/2017**

Resumen

La asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales está dotada de menos contenidos que las Matemáticas de Naturales, consta de pocas unidades didácticas directamente relacionadas con estas Ciencias (Aritmética Mercantil y Programación Lineal) y frecuentemente se imparte olvidándose de su carácter aplicado. Dado el perfil del estudiante de esta modalidad de Bachillerato tal vez se requiera no olvidar esta orientación para lograr un enfoque menos abstracto y puro de la materia y favorecer un mejor aprendizaje.

Partimos de cómo debería ser la enseñanza de los contenidos de los bloques de funciones y análisis si tuvieran un carácter más aplicado y práctico, no solo para el Bachillerato de Ciencias Sociales, sino también para el de Naturales y, en general, para todos los cursos de la Educación Secundaria.

Se ofrecen actividades, tareas y ejercicios siguiendo estos criterios y se analizan los beneficios y desventajas que pueden encontrarse en el uso de esta metodología, además de las dificultades encontradas y el papel que juegan frente a ellas las nuevas tecnologías.

Palabras clave

Educación Secundaria; Funciones y Análisis; Cálculo Infinitesimal; Matemáticas aplicadas; Ciencias Naturales; Ciencias Sociales; Economía; Nuevas Tecnologías.

Índice

1.- Introducción

El presente trabajo de fin de máster (en adelante TFM), como punto conclusivo del curso de adaptación al profesorado, es el fruto o síntesis de un proceso de formación académica cuyo objetivo es la profesionalización del futuro docente.

Por medio de esta formación no solo se pretende la instrucción en unos conocimientos, habilidades y destrezas educativas, sino también un cambio profundo en la persona hacia una actitud y dinámica nuevas: humildad para considerar los propios fallos y limitaciones; estudio y evaluación formadora constante para enriquecer el proceso de enseñanza; investigación e innovación docente para mejorar el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Es precisamente este un primer ejercicio de investigación e innovación docente de cara al estudio de un tema concreto, desde las consideraciones teóricas, su puesta en práctica en el aula y el ulterior análisis de resultados.

1.1.- Motivación para el tema escogido

En el primer periodo de prácticas del módulo genérico de este máster, que tuvo lugar entre el 21 de noviembre y el 2 de diciembre de 2016 en el IES Jorge Manrique de Tres Cantos (Madrid), tuve principalmente un contacto directo con dos grupos de estudiantes de matemáticas aplicadas y que se correspondían al Bachillerato de primero y de segundo de Ciencias Sociales, respectivamente. Por las observaciones que realicé, los alumnos de ambos grupos presentaban experiencias y percepciones notoriamente negativas hacia las matemáticas, así como bastantes carencias académicas en esta área.

Dada esta realidad, el campo de mi interés personal se centraba en la búsqueda de posibles soluciones o mejoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de ambos grupos, especialmente el de primero por tener un peor desempeño y siempre desde la propia asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

Adicionalmente, también era objeto de interés estudiar la posibilidad y pertinencia de llevar a cabo una orientación más práctica y menos abstracta en esta materia. Analizar y averiguar qué beneficios y ventajas y qué resultados pueden obtenerse al realizar una enseñanza de matemáticas aplicadas a las Ciencias, no solo a las Sociales, sino también a las Naturales.

Por la programación de la materia, en el segundo periodo de prácticas que ahora sí estaría dedicado a la especialidad de Matemáticas y que tuvo lugar entre el 3 de abril y el 19 de mayo de 2017, les correspondía estudiar el bloque de análisis (o cálculo infinitesimal) del currículo establecido. Así que el objeto de estudio podía concretarse en la enseñanza del cálculo infinitesimal aplicado a las Ciencias Sociales.

Uno de los puntos del temario de las oposiciones para profesor de matemáticas está estrechamente relacionado con el asunto principal de este trabajo, concretamente el número 32 “**Aplicación del estudio de funciones a la interpretación y resolución de problemas de la Economía, las Ciencias Sociales y la Naturaleza**” (Orden 9/1993 del BOE, p. 27414), por lo que también se podía aprovechar para valorar la utilidad de esos contenidos con la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y el Bachillerato.

1.2.- Descripción del tema y características del trabajo

La enseñanza del bloque de análisis con un enfoque adaptado a las Ciencias Naturales, Sociales y a la Economía es el tema central del TFM.

Como parte de la labor de investigación se puede considerar la necesidad de un estudio detallado de los aspectos didácticos en la enseñanza del cálculo infinitesimal, de la relación entre este con las diversas ciencias y de la idoneidad de una orientación hacia las mismas en su enseñanza.

Por su parte, la innovación consiste en el diseño de clases y actividades tanto teóricas como prácticas para llevar al aula. Aquí los puntos de interés consisten en el análisis, al menos cualitativamente, de los beneficios que pueden aportar a los alumnos y la determinación de los mejores métodos y momentos para realizar una enseñanza aplicada del bloque de análisis.

1.3.- Proceso de documentación y estudio

Para llevar a cabo el proceso de documentación, estudio y preparación del tema realicé varias vías exploratorias.

Por un lado, realicé una búsqueda, lectura y resumen de artículos de investigación y libros especializados relacionados con los puntos objeto de estudio, es decir, que trataran de didáctica del cálculo infinitesimal; la relación histórica y actual de las matemáticas con las disciplinas científicas de la naturaleza y la sociedad y de algunas herramientas tecnológicas que pudieran servir de apoyo; entre algunos otros temas.

Por otro lado, efectué la revisión de diversas revistas matemáticas que pudieran ofrecer tanto desarrollos matemáticos o actividades, como aspectos teóricos del estudio de las funciones y del cálculo infinitesimal de forma aplicada a las ciencias. Se han considerado principalmente las revistas estadounidenses *Mathematics Magazine* y *Math Horizons;* y las españolas *Sigma*, *Suma* y *Modelling in Science Education and Learning*. En esta tarea se han revisado desde los números más recientes hacia los más antiguos, hasta unos siete años atrás y según se podía por accesibilidad o existencia. Los artículos que mejor relación tenían con el tema y que presentaban una dificultad asequible para los alumnos fueron los de *Math Horizons*. En los otros casos o no se logró encontrar artículos que estuvieran directamente relacionados con los criterios de búsqueda o su dificultad resultaba excesiva.

Por último, otro recurso interesante ha sido el de los libros de texto, tanto algunos encontrados de carácter pre-universitario y que presentaban un tratamiento matemático aplicado a las Ciencias Naturales y Sociales; como el de libros de texto de matemáticas españoles para estudiantes de instituto.

1.4.- Objetivos

Por tanto, como objetivos del TFM se pueden enumerar los siguientes:

- Estudiar la idoneidad educativa del enfoque aplicado a las ciencias para la enseñanza del bloque de análisis propio de las matemáticas.
- Proporcionar pautas para la elaboración de actividades y clases que tengan este planteamiento.
- Ofrecer recursos de apoyo didáctico y tecnológico al docente de ESO y Bachillerato en la enseñanza de matemáticas aplicadas.

1.5.- Estructura del documento

El primer punto que se desgranará en detalle en este TFM será el del marco teórico y la descripción del contexto de prácticas.

El siguiente apartado versará sobre el diseño de la innovación, pautas para la elaboración de clases y actividades y algunos modelos propuestos para llevar a cabo en el aula.

Después se procederá a explicar las tareas realizadas en el aula para posteriormente proceder a analizar los resultados obtenidos por las mismas y proponer algunas mejoras significativas.

Finalmente, se añaden unas conclusiones sobre todo el trabajo y unos anexos que aportan información sobre los datos recopilados para evaluar esta innovación (ANEXO I).

2.- Marco teórico y contexto de prácticas

En el tema tratado concurren diversos elementos relacionados entre sí. En primer lugar, los aspectos didácticos propios de la enseñanza de las matemáticas, precisamente la materia objeto de estudio. Como se le quiere dar un sentido aplicado, conviene estudiar la conexión entre Matemáticas y las diversas Ciencias, centrándonos en el caso específico del cálculo infinitesimal y el análisis funcional.

En segundo lugar y concretando un poco más, repasaremos los contenidos de los bloques de funciones y de análisis del currículo oficial de ESO y Bachillerato. Después se considerarán las ventajas de utilizar las nuevas tecnologías en este paradigma. Al marco teórico se le une la descripción del contexto de prácticas como el ámbito que se dispuso para realizar algunas actividades con este planteamiento.

2.1.- Didáctica de la educación y de las matemáticas

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede clasificarse de forma simplificada, según Chamorro (2010) en dos grandes modelos teóricos: el empirismo y el constructivismo. En el **empirismo** *"el discurso del maestro se registra en el alumno, a quien no se considera capaz de crear conocimientos"* (p. 38) y su objetivo es que el grupo supere todas las dificultades presentes en la realización correcta de ejercicios y problemas, hecho que constituye el logro del aprendizaje.

En el **constructivismo**, gran marco teórico en cuya elaboración ha participado la Psicología social y genética y la Pedagogía (Chamorro et al., 2010) se basa en la idea principal de que *"aprender matemáticas significa construir matemáticas"* (p. 40). Para este modelo el alumno aprende al descubrir activamente la realidad (sujeto que aprende), mediante las herramientas adecuadas que le permiten interaccionar con los elementos de aprendizaje (objeto), de modo que, a partir de sus conocimientos previos, los modifique readaptándolos y progrese así en su entendimiento (construcción), con la debida guía y supervisión del maestro y de los otros agentes educativos (sujeto que enseña).

Bajo esta teoría se enmarcan las destacadas aportaciones de, entre otros, Piaget, Vygotsky y Ausubel. Este último, distingue el **aprendizaje significativo** que es el que se produce cuando *"se asimila un nuevo conocimiento relacionándolo con algún aspecto relevante ya existente en la estructura cognitiva del sujeto"* (Nortes, 2007, p. 418). Para conseguir este aprendizaje es necesario partir del conocimiento previo del alumno sobre el que edificar el nuevo, sin que la diferencia entre ambos le resulte inalcanzable (**distancia óptima de aprendizaje**). En matemáticas se traduce en la adquisición mental de lo representado o referido por los símbolos del lenguaje matemático; en la comprensión y asimilación de los conceptos y objetos matemáticos y sus relaciones entre sí. Según continúa explicando Nortes (2007), Ausubel sostiene que se alcanza el nivel de significación óptimo cuando se promueve una **enseñanza por descubrimiento** guiada por el docente.

La **enseñanza por descubrimiento** contrasta con la **enseñanza por recepción o receptiva**, dado que en esta última los contenidos se presentan al alumno directamente en su forma final, mientras que en la primera se parten de casos concretos con los que el alumno debe interaccionar previamente para adquirir la actividad mental necesaria como para alcanzar (o descubrir) esa forma final e incorporarla (Nortes, 2007).

Frente a ambos tipos de enseñanza (por descubrimiento o por recepción) existen dos tipos de aprendizaje: **aprendizaje significativo** y **aprendizaje de memoria o memorístico**. Según Ausubel, *"la mayor parte del trabajo escolar es del tipo enseñanza receptiva y aprendizaje significativo"* (Díaz Godino, 1991, p. 86). En matemáticas existen reglas y algoritmos requeridos para la resolución de cálculos y problemas, destrezas que se adquieren mediante la práctica y la memoria. Sirvan como ejemplos las tablas de multiplicar o las reglas y procedimientos de derivación e integración. No obstante, *"la retención y la memorización son más fáciles si lo que se ha aprendido es significativo en relación con la estructura del conocimiento ya existente en la mente del que aprende."* (Orton, 1996, p. 39).

De entre los factores personales del alumno, como su capacidad intelectual, desarrollo cognitivo y madurativo y conocimientos previos, destaca la **motivación** del alumno, imprescindible para que sea un agente activo y protagonista del aprendizaje. Una buena **autoestima**, es decir, una valoración positiva del autoconcepto, genera en el estudiante unas expectativas de éxito frente a la materia o, mejor aún, frente al aprendizaje de las matemáticas, que a su vez incide en su motivación y rendimiento personal (García y Doménech, 1997).

Para Pekrun, según referencian García y Doménech, la motivación puede clasificarse según su valoración, positiva o negativa. Es positiva cuando así lo son las emociones ligadas a la participación en el proceso de aprendizaje, como cuando se disfruta resolviendo un ejercicio, un cálculo o un problema; cuando se obtienen resultados exitosos, se recibe aprobación y reconocimiento o simplemente se tiene el gusto por aprender. En cambio, tiene un carácter negativo (pero aun así con posibilidad de que resulte motivante) cuando el estudiante siente presiones por aprobar, por superar un examen, por no ser regañado o apercibido, por librarse lo más rápido posible de la asignatura que no le gusta… Lo ideal es conseguir en los estudiantes una motivación positiva porque los efectos suelen ser siempre buenos y mejores; en comparación con la motivación negativa que puede generar resultados variables, en uno u otro sentido, siendo los contraproducentes la frustración, la desesperanza, la ira o incluso el abandono.

La motivación también puede ser intrínseca o extrínseca (Murayama, Pekrun, Lichtenfeld y Hofe, 2013). Es intrínseca si procede del propio interés del alumno en la tarea en sí, y por el deseo y curiosidad por saber, superar retos y desarrollar sus capacidades. Por el contrario, es extrínseca si la motivación está basada en aspectos externos, como las recompensas obtenidas por las buenas notas, la búsqueda de juicios positivos o la aprobación de padres y docentes.

Por lo que he podido observar e informarme con los profesores, los alumnos de Ciencias Naturales tienen unos hábitos de estudio, una preferencia y una motivación de media más elevada que sus compañeros de Ciencias Sociales. Si generar una buena motivación es importante, hacerlo con este tipo de alumnos adquiere una relevancia primordial.

Para lograr esta motivación tan deseada, conviene: expresar la presencia de las matemáticas en realidades cotidianas e insospechadas, para despertar su interés y curiosidad; conocer sus gustos y aficiones para relacionarlos en lo posible con los contenidos a estudiar, cuestionando la idea de que las matemáticas son aburridas; establecer un sistema de recompensas y de refuerzos positivos para incidir en la superación personal y en la mejora del autoconcepto y fomentar un clima de aprendizaje propicio, distendido, seguro, con valores importantes como la cooperación, el respeto y la confianza. Tampoco se ha de olvidar involucrar a todos los agentes del entorno de enseñanza, la llamada noosfera (Chamorro et al., 2010).

2.2.- Relación entre Matemáticas y Ciencias

Para hablar de las Matemáticas y Ciencias expongo una pequeña relación de las disciplinas científicas existentes, para de ahí pasar a una brevísima relación de hitos históricos. Un primer orden de división de las **Ciencias** es el de **formales y factuales** (Rodríguez, 2011), propuesto por Bunge, que permite distinguir a la Lógica y la Matemática pura, en el estudio de las abstracciones del pensamiento, del resto de disciplinas basadas en la realidad que nos rodea. De acuerdo a las explicaciones de Rodríguez, Carnap realiza la división de las ciencias entre las formales (donde estaría la Matemática); las Ciencias Naturales, que examinarían la realidad natural; y las Ciencias Sociales, que harían lo propio en el estudio de la comunidad humana y su forma de evolución, su pensamiento, organización y necesidades.

A su vez, en las **Ciencias Naturales** podemos distinguir numerosas disciplinas y que agrupadas en diversas categorías permiten de nuevo numerosas subdivisiones como: la astronomía, la biología, la física, la química, la medicina, las ciencias de la tierra, del medio ambiente, del espacio y de la computación.

Por su parte, en las **Ciencias Sociales** pueden enumerarse muchas parcelas de conocimiento: la antropología, la criminología, la demografía, la geografía, la historia, la ecología, el derecho, la biblioteconomía, la sociología, la politología, la lingüística, la psicología, la pedagogía, las ciencias económicas, la mercadotecnia…

No hay que olvidar las ciencias de carácter aplicado, como la arquitectura; o las interdisciplinares, como combinación de otras dos; o campos nuevos de estudio como el análisis de las redes sociales. Es vastísimo el conocimiento científico, diversificado en numerosas ramas e influido en su desarrollo por las matemáticas. E incluso si nos salimos del campo científico y nos dirigimos hacia las Humanidades, también existen conexiones con el arte, la literatura, la pintura o la música (Sáenz y García, 2015).

En las **Ciencias Naturales** existía durante siglos la necesidad de profundizar en la astronomía para conocer el funcionamiento del sistema solar y en la física para estudiar la caída de graves, la velocidad instantánea de objetos en movimiento, la trayectoria de proyectiles y de balas de cañón o la relación entre fuerza y aceleración (Stewart, 2008). Además, había problemas matemáticos como *“encontrar la tangente a una curva, encontrar la longitud de una curva, encontrar los valores máximo y mínimo de una magnitud variable, encontrar el área de una forma en el plano y el volumen de un sólido en el espacio”* (p. 123), así como hallar la forma de la catenaria o resolver el problema de la braquistócrona (Simmons, 1992, p. 314). Con el desarrollo del Cálculo Infinitesimal por Leibniz y por Newton en el siglo XVII se resolvieron estos problemas y se descubrió que *“las pautas matemáticas gobernaban* *casi todo en el mundo físico: los movimientos de los cuerpos terrestres y celestes, el flujo del aire y del agua, la transmisión del calor, la luz y el sonido, y la fuerza de la gravedad"* (p. 115).

Según detalla Millán (1996), no solo las Ciencias Naturales, sino que también las **Ciencias Sociales** y los otros saberes se han visto beneficiados del rigor científico y de la aplicación matemática. En Inglaterra, en el siglo XVII, se desarrolló una aritmética política para el estudio de la demografía, las formas de inversión y seguros; continuada en Francia en el siglo XVIII con la matemática social para la organización de la vida pública o los sistemas de votaciones. En el siglo XIX, el belga Verhulst propone la ecuación diferencial logística para el estudio del crecimiento de las poblaciones humanas. Desde finales del siglo XIX y durante el XX irrumpen las matemáticas con muchísima fuerza en el desarrollo de las Teorías Económicas.

La estadística y la probabilidad han sido clave para la **Economía**, pero también el Cálculo Infinitesimal. Peña (2006) hace un recorrido en la historia reciente de esta disciplina de Economía. En el siglo XIX el francés Walras inicia la Teoría General del Equilibrio con las curvas de oferta y demanda y su punto de corte, posteriormente formulada con rigor por el matemático Debreu. Otro salto importante es la introducción de la Teoría de Juegos, iniciada por Morgenstern y Von Newman y mejorada después por Nash (matemáticos estos dos últimos); en la que se estudian casos económicos de cooperación o competencia de varios agentes para buscar las estrategias existentes, los puntos de equilibrio o las decisiones más favorables. Otras aplicaciones matemáticas aparecen en la resolución de problemas de optimización, en las predicciones económicas, en la planificación de la producción, en las técnicas de distribución de un producto o en los mercados bursátiles y los derivados financieros.

Así mismo, son numerosísimas las contribuciones de las matemáticas en áreas muy diversas, como en la medicina (cirugía, óptica, cardiología, diagnóstico…), la biología, la informática, la teoría de la información y de la decisión (Millán, 1996); la sociología, la psicología, la arqueología, la educación, las ciencias de la comunicación, la lingüística, la etnografía o el urbanismo (Rodríguez, 2011).

2.3.- El bloque de análisis en el currículo

Para tener una visión global de los contenidos involucrados, conviene repasar los bloques de funciones y de análisis de los currículos oficiales de las asignaturas de matemáticas (Real Decreto 1105/2014 del BOE). El siguiente es un compendio de todos estos contenidos de forma acumulada, separados de su curso y asignatura:

- **Funciones**: coordenadas cartesianas, ejes y representación de puntos; concepto de función; variable independiente y dependiente; funciones de variable real; expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o gráficas; utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.
- **Características de las funciones**: crecimiento y decrecimiento; continuidad y discontinuidad; máximos y mínimos relativos; curvatura y puntos de inflexión.
- **Análisis de funciones que describen situaciones reales**: análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias; análisis de una situación a partir de las características locales y globales de la gráfica correspondiente y de dependencia funcional.
- **Aplicación de funciones a situaciones reales**: interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica y análisis de resultados; reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales; funciones de oferta y demanda; resolución de problemas e interpretación de fenómenos sociales y económicos mediante funciones.
- **Familias de funciones**: funciones lineales; cuadráticas; polinómicas, racionales, valor absoluto, raíz, trigonométricas (y sus inversas), exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos.
- **Operaciones con funciones**: operaciones y composición de funciones; función inversa.
- **Límites**: concepto de límite de una función en un punto y en el infinito; cálculo de límites; límites laterales; resolución de indeterminaciones.
- **Continuidad**: continuidad de una función; estudio y tipo de discontinuidades; teorema de Bolzano.
- **Derivación**: tasa de variación media y tasa de variación instantánea; derivada de una función en un punto; interpretación geométrica; recta tangente y normal; función derivada; cálculo de derivadas; regla de la cadena.

- **Teoremas y aplicaciones avanzadas de las derivadas**: teoremas de Rolle y del valor medio; regla de L'Hôpital; representación gráfica de funciones; problemas de optimización (y relacionados con las ciencias sociales y la economía); aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales.
- **Integración**: concepto de primitiva; primitiva de una función; propiedades básicas; integral indefinida; técnicas elementales para el cálculo de primitivas; la integral definida y técnicas de integración; teorema del valor medio y fundamental del cálculo. Regla de Barrow.
- **Cálculo de áreas**: aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

Puede observarse que ya en el currículo oficial existen menciones explícitas a las aplicaciones de estos contenidos con situaciones reales y de la vida cotidiana y de realidades de las ciencias sociales y de la economía. Entre ellas, las siguientes:

- **3º de ESO (aplicadas y académicas)**: análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- **4º de ESO (aplicadas y académicas)**: reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.
- **1º de Bachillerato, Matemáticas I**: funciones de oferta y demanda.
- **1º de Bachillerato, Matemáticas aplicadas a las CCSS I**: resolución de problemas e interpretación de fenómenos sociales y económicos mediante funciones; aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales.
- **2º de Bachillerato, Matemáticas aplicadas a las CCSS II**: problemas de optimización (y relacionados con las ciencias sociales y la economía).

Por lo tanto, existe un notorio tratamiento aplicado de algunos contenidos en el currículo que, al margen del presente interés por extenderlo aún más, es importante y necesario tenerlo en cuenta, para saber enseñarlo y practicarlo en el aula de cara a una enseñanza completa de la materia, tanto de la versión académica de la misma como de la aplicada. Especialmente en esta última en la que según el Real Decreto 1105/2014, esta materia:

> *"[…] no debe desvincularse de su aplicación a la interpretación de los fenómenos sociales, por lo que además de centrarse en la adquisición del conocimiento de los contenidos de matemáticas [...], debe dirigirse hacia la adquisición de la habilidad de interpretar datos, seleccionar los elementos fundamentales, analizarlos, obtener conclusiones razonables y argumentar de forma rigurosa." (p. 381)*

Repasemos ahora algunos elementos a tener en cuenta para la enseñanza de estos contenidos. Para las funciones, (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner, 2016) evidencian las dificultades de los alumnos para pasar de una perspectiva puntual y global a otra de estudio local, necesaria para el aprendizaje de este bloque. Por su parte, Swenton (2009) señala los peligros de reducir el concepto de función únicamente a la representación visual, olvidándonos de qué la función actúa sobre sus conjuntos dominio y recurrido, mandando *"cada elemento de su dominio a algunos elementos de su recorrido"* (p. 34); de hecho, llevando *"subconjuntos del dominio a sus imágenes en el recorrido."* (p. 34).

El mayor problema representa el concepto de límite, que además influye luego en el entendimiento del cálculo de derivadas e integrales. Numerosos son los errores en la enseñanza y aprendizaje en este campo, destacando Liang (2014) la idea de que la función no puede rebasar el límite, sugiriendo como remedio la explicación de su definición formal (relación épsilon-delta), aunque sea de forma visual. Otros errores pasan por las diferencias entre el lenguaje natural y el matemático y por no entender bien el proceso del cálculo del límite (Bressoud et al., 2016).

Para las derivadas destaca el problema que los alumnos tienen para relacionar bien los siguientes pares de elementos: la definición de derivada y su representación visual; el concepto de función derivada y su cálculo mediante las reglas; la derivada de la función en un punto y la función derivada (Bressoud et al., 2016). Además, existe la tentación de centrar la atención solo en la parte algorítmica y algebraica (Ortega y Sierra, 1998) cayendo *"en un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es […] considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa"* (p. 87).

Y con las integrales existen obstáculos para comprender la integración como límite de una acumulación infinita de sumas o la desconexión entre la integral definida como cálculo de área y el Teorema Fundamental del Cálculo (Bressoud et al., 2016).

2.4.- Las nuevas tecnologías como recursos de apoyo

Las herramientas tecnológicas suponen un valioso recurso adicional para la adaptación orientada a las Ciencias de la materia, *"tanto para la mejor comprensión de conceptos o en la resolución de problemas complejos, como para contrastar con mayor rigor las hipótesis propuestas y presentar y comunicar los resultados obtenidos"* (Real Decreto 1105/2014, p. 381). Estas permiten afrontar mejor las dificultades inherentes a este estilo de enseñanza, permiten desarrollar sus competencias tecnológica e informática, *"contribuyen a la preparación para el aprendizaje a lo largo de la vida y apoyan el trabajo fuera del aula"* (Real Decreto 1105/2014, p. 381). Según recoge Bressoud (2016) las conclusiones de numerosos estudios *"subrayan el poder de la tecnología para mejorar las habilidades de visualización"* (p. 28) y suponen una buena aproximación a los conocimientos del Cálculo.

Entre diversos programas enumero algunos con una mayor incidencia en la enseñanza de los contenidos del bloque de análisis. Un caso destacado es el de **Geogebra** (https://www.geogebra.org), un excelente programa informático con funcionalidades para la Geometría y la Estadística, pero también para la representación de funciones y el cálculo infinitesimal (Caligaris, Schivo y Romiti, 2015), precisamente nuestro campo de interés.

Similar a Geogebra hay otros programas informáticos, como **Desmos** (https://www.desmos.com), calculadora gráfica especializada, gratuita, de uso intuitivo y sencillo, accesible a través de internet y con muchas opciones para compartir entre alumnos y profesores. Puede usarse para enseñar conceptos del cálculo infinitesimal (Seneres y Kerrigan, 2014), como la noción de límite, de derivada o de integral (Liang, 2016) y ofrece la posibilidad de crear actividades permanentes en internet en forma de ejercicios y pruebas para los alumnos. Me centraré en el uso de esta aplicación, muy popular en su utilización por parte de los profesores de matemáticas de los institutos estadounidenses y que por su facilidad de uso entraña muchos beneficios para los alumnos.

El sistema **Moodle** (https://moodle.org) entre otras muchas características permite al estudiante realizar con comodidad ejercicios de entrenamiento y autoevaluaciones con y sin temporizador, siendo de provecho para el aprendizaje memorístico, de manera que pueda entrenar, entre otras cosas, la identificación de las familias de funciones y de las funciones con su expresión algebraica; el cálculo de límites, la obtención de la función derivada o la realización de integrales.

Por su parte, **Khan Academy** (https://www.khanacademy.org) y **Brilliant.org** (https://brilliant.org) fomentan el aprendizaje significativo, gracias a sus contenidos organizados en temas donde explican detalladamente los conceptos y ofrecen actividades que permiten clarificarlos al derribar concepciones erróneas. En el mismo sentido y con un carácter expositivo **Maths Experiencing** (http://www.experiencingmaths.org) cuenta con un rico material en matemáticas con un carácter experimental y organizado en destrezas y temas muy vistosos. La desventaja que presenta Brillitan.org es la necesidad de registrarse y algunas limitaciones en las cuentas gratuitas, paliadas en parte por su planteamiento de retos y problemas diarios disponibles a todos; mientras que Maths Experiencing está diseñada con tecnología Flash Player, menos accesible si no se tienen bien configurados los dispositivos y navegadores actualmente en uso.

Por su parte, la web de **WolframAlpha** (https://www.wolframalpha.com), el programa **Wiris** (http://www.wiris.com/) y la hoja de cálculo **Microsoft Excel** (https://products.office.com/es-es/excel) o su contraparte gratuita **Libre Office Calc** (https://es.libreoffice.org/descubre/calc/) son herramientas valiosas para la realización automática de cálculos que, sin exonerar la necesidad de que los alumnos aprendan a realizarlos manualmente, constituyen un recurso tecnológico muy provechoso para su desempeño futuro.

Paso a mencionar brevemente otro tipo de utilidades, también con un perfil educativo, algunas de ellas abarcando más disciplinas que las de matemáticas, pero igualmente interesantes por los contenidos y posibilidades que brindan. Algunas reseñables son **Playpostit** (https://www.playposit.com), que permite enriquecer videos con actividades interactivas; **ThingLink** (https://www.thinglink.com), que hace lo propio con imágenes o **Kahoot** (https://kahoot.it/), que posibilita realizar concursos de preguntas en grupo. En determinadas circunstancias estos recursos pueden ser prácticos y efectivos para hacer trabajar al alumno dentro y fuera del aula, de manera individual o colectiva, para realizar ejercicios de forma más amena y motivante y obtener evaluaciones unitarias (por el tipo de ejercicio tratado en cada caso) de forma muy ágil y accesible.

2.5.- Contexto de prácticas

El grupo con el que pude practicar la innovación fue uno de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales en la asignatura de **Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I**. En cuanto a la composición del mismo, estaba formado por veintiún alumnos, doce chicos y nueve chicas, uno de los cuales era repetidor.

Si bien el número reducido de estudiantes en el aula suponía una ventaja significativa para conocerlos mejor de manera individual, lo cierto es que el nivel académico, de motivación, de atención y de hábitos de estudio del conjunto era notablemente bajo, al tiempo que el grado de disrupción era algo alto.

Muchos alumnos provenían de la opción de matemáticas de 4º de la ESO que establece una reducción considerable de nivel y que hacía que la distancia respecto al nuevo aprendizaje fuera aún mayor.

A ello se unen obstáculos adicionales en cuanto a sus conocimientos y destrezas en matemáticas, como carencias en el cálculo mental; errores en la manipulación de objetos matemáticos; problemas en el uso del lenguaje matemático y dificultades de abstracción.

Otro inconveniente adicional era la actitud psicológica de los alumnos frente a las propias matemáticas. Su experiencia pasada con esta materia era negativa, su autoconcepto condicionado a esta experiencia les hacía creer que no eran capaces de superarla y por consiguiente su grado de motivación para abordarla era muy bajo. Este perfil parece responder a una especie de indefensión aprendida, fenómeno descrito por Martin Seligman (Yates, 2009).

Hay que tener en cuenta que existían alumnos que, aunque con un progreso irregular, iban superando los distintos hitos y evaluaciones del curso. Pero aun sobre ellos, como en el resto, se podía observar cómo en general su dedicación extraescolar era escasa y de ahí que su rendimiento no fuese acorde a su potencial real.

Todo este contexto constituyó un verdadero reto de no fácil abordaje y remedio. Pero precisamente es en situaciones como esta donde hay que intentar ser creativo y buscar soluciones para paliar o mejorar tantos puntos débiles como sea posible.

3.- Diseño de la innovación

Presento en este capítulo una reflexión sobre algunos criterios y métodos que sirvan de ayuda para la elaboración de actividades con contenido relacionado con las Ciencias y que puedan ser puestas en práctica.

Incluyo un apartado con algunas actividades propuestas para llevar al aula, diseñadas con este enfoque; y otro en el que se hace lo propio con el soporte de las nuevas tecnologías.

3.1.- Criterios y métodos para las Matemáticas aplicadas

Dentro del diseño e impartición de una unidad didáctica se diversifican las sesiones en distintas fases (Gómez, 2002) según el propósito, el progreso y la dinámica de estas, como pueden ser, entre otras: introducción, diagnóstico, desarrollo teórico y práctico, síntesis, profundización, evaluación y consolidación. El primer criterio es determinar en cuáles de estas fases se requiere o desea establecer la orientación aplicada.

El segundo criterio es determinar la forma de transmisión de la sesión: si se centrará más en una enseñanza expositiva o más en una por descubrimiento. En ambos casos se puede recurrir a la historia, la conexión con realidades curiosas o anecdóticas, la realidad cotidiana, la utilidad práctica, etc. Igualmente se ha de determinar si se abordarán contenidos teóricos o prácticos; o bien una mezcla de ambos. Tendrá un carácter teórico si se basa en la transmisión, elaboración o descubrimiento de los axiomas, definiciones, proposiciones, teoremas y algoritmos que dan forma y contenido al área matemática correspondiente. Por último, tendrá un carácter práctico si la tarea se centra en la experimentación, la resolución de problemas o la enseñanza sistemática de ejercicios o de algoritmos.

Así mismo, se ha de considerar el tipo de razonamiento utilizado, según tenga este un carácter deductivo, partiendo desde la matemática y desde los casos generales y más abstractos y llegando a los casos particulares y concretos de una o varias disciplinas científicas; o inductivo, comenzando por casos propios de las disciplinas científicas, procurando llegar después al marco teórico matemático que le dé cobertura. En principio ambas formas de actuación son legítimas y dependerán de la facilidad o de la conveniencia de una u otra según el contexto.

Otro criterio existente es el del propósito de la sesión o de la tarea que se quiere realizar, si se requiere para motivar al alumnado, consolidar o ampliar conocimientos, realizar una introducción a contenidos avanzados o futuros, mejorar el rendimiento, repasar o profundizar en el entendimiento de conceptos, entre otras posibilidades. Según sea el propósito convendrá realizar tareas con una temática o carácter determinados (expositivo, teórico, práctico), con actividades de un tipo o de otro (entrenamiento, problemas, cuestiones teóricas…).

La forma de aprender, ya sea más por descubrimiento o por exposición (Díaz et al., 1991, pp. 85-86); el carácter colaborativo o individualizado de la tarea o la duración (podría ser algo corto, como un simple ejercicio, o algo más duradero en el tiempo, como un proyecto de trimestre) son otros aspectos que siempre se han de valorar porque influyen en el diseño de las sesiones.

Finalmente, hay que determinar el peso de la disciplina científica o del contexto con el que se relacionen las matemáticas. No se trata de profundizar como para invadir los contenidos de las otras materias, ni de sustraer el de la propia; sino de encontrar ejemplos y contraejemplos tangibles que permitan una mejor comprensión de la matemática que se desea estudiar (Orton, 1996) y que mediante esos casos prácticos se entienda la utilidad, la necesidad y la pertinencia de la misma.

Encontrar temas que se puedan aplicar no siempre es fácil, ya sea por la dificultad inherente de estas disciplinas o por el progreso académico actual del estudiante; por las cantidades numéricas que aparecen y que obligan a efectuar cálculos farragosos o recurrir a las aproximaciones, heurísticas o técnicas numéricas (si bien se dispone de la ayuda de las nuevas tecnologías); por el trabajo que conlleva encontrar datos reales y coherentes o por la formación y habilidades del docente. Es por tanto una labor que requiere de un considerable esfuerzo y dedicación y que se realiza, como no puede ser de otra manera, para la mejora educativa de los futuros ciudadanos.

3.2.- Sugerencias concretas de actividades

Dado que en el desarrollo de la innovación realicé sesiones con un carácter más bien expositivo y teórico, la siguiente es una propuesta de actividades prácticas (algunas más por descubrimiento) relacionadas con otras materias.

a) Propagación de un virus

PROPAGACIÓN DE UN VIRUS EN UNA POBLACIÓN
Aplicación: Informática (Ciencias de la Computación), Biología (Ciencias Naturales)
Relación con matemáticas: Concepto de función, estudio y representación de funciones, aplicaciones de la derivada, ampliación de funciones básicas conocidas.
Curso: 4º de la ESO (académicas, si el grupo va avanzado), 1º y 2º de Bachillerato (ambas modalidades)
Ejercicios: (inspirado en LaTorre et al., 2010, pp. 94-95) Se ha propagado un peligroso virus informático en los ordenadores de una ciudad. Se ha podido determinar la función $f(t)$ que relaciona el número de ordenadores infectados (en miles) con el tiempo transcurrido en horas (con $t \geq 0$): $$f(t) = \frac{10}{1 + 99\, e^{-3{,}676\, t}}$$ Para investigar el comportamiento de la propagación de este virus informático, se nos pide: 1.- ¿Cuántos ordenadores estaban infectados cuando había transcurrido una hora? ¿Y cuando transcurrieron dos horas? 2.- ¿Cuántos ordenadores se infectarán a medida que pase mucho tiempo? Si ha pasado ya un día, ¿se ha controlado ya la infección? 3.- Estudia el dominio y recorrido de la función; la monotonía y la concavidad y determina los extremos relativos y puntos de inflexión. 4.- Representa la función. 5.- La función estudiada pertenece a un tipo de función conocida como logística y cuya expresión general es (con A, B y L constantes distintas de 0 y $L > 0$): $$f(x) = \frac{L}{1 + A\, e^{-Bx}}$$ ¿Qué características tiene (dominio, recorrido, monotonía, asíntotas…)? ¿En qué otras situaciones y contextos crees que aparecen este tipo de funciones?
Comentario: Concurren en la actividad la interpretación de variables, de valores y de sucesos reales; la ampliación de las familias de funciones estudiadas; la puesta en práctica de las aplicaciones de la derivada y la representación de funciones. Además se procede a realizar una generalización a partir de un caso particular.

b) Estudiando la evolución de poblaciones

ESTUDIO DE POBLACIONES
Aplicación: Demografía (Ciencias Sociales), Biología (Ciencias Naturales)
Relación con matemáticas: Derivación, aplicaciones de la derivada, integración, integración definida.
Curso: 4º de ESO (académicas primer ejercicio), 1º y 2º de Bachillerato (ambas modalidades)
Ejercicios: 1.- (Inspirado de Lial et al., 2015, p. 191) La población mundial en 1999 era de 5.978 millones de personas, la tasa de crecimiento es de 1,26% aproximadamente y sigue un modelo exponencial de crecimiento. a) Determina la función que modela el crecimiento de la población siendo $t = 0$ el año 1999. (Solución: $f(t) = 5978\, e^{0{,}0126t}$). b) ¿Qué población estimada habrá en 2018? (contrasta este dato aproximado con un contador de población mundial online para la fecha actual) ¿Y en 2030? 2.- (Tomado de Lial et al., 2015, p. 690) De acuerdo a las proyecciones de las Naciones Unidas, la población de la República Popular China (en miles de millones) se puede aproximar por la función: $f(x) = -0{,}00164x^2 + 0{,}014532x + 1{,}1385 \quad (0 \le x \le 60)$ Donde $x = 0$ se corresponde con el año 1990. ¿En qué año alcanzará China su población máxima y cuál será esa población? 3.- (Tomado de Lial et al., 2015, p. 702) La población del estado de Wyoming (EEUU) en miles de personas se ha estimado con la función ($x = 5$ es el año 2005): $f(x) = 18 \cdot \ln(x) + 478 \quad (5 \le x \le 20)$ a) Según la previsión, ¿la población de este estado crecerá o decrecerá durante 2020? b) Determina la concavidad de la función y explica su significado. 4.- (Modelo de crecimiento extraído de Lial et al., 2015, p. 803) La tasa de crecimiento de la población de un país en millones de habitantes se ha modelado en función del tiempo (en años) mediante la función $f(t) = 1{,}3e^{0{,}13t}$. Donde $t = 0$ se corresponde con el año 2017. Se sabe que la población en 2017 fue de 20 millones de habitantes. a) Calcula la función de la población respecto al tiempo t. b) ¿Cuál será el incremento de población desde el año 2017 hasta el año 2020?
Comentario: En un contexto de estudios demográficos sencillos se practica con varios tipos de funciones, útil para poner en práctica los conocimientos sobre funciones y de derivación e integración. En Gapminder (http://www.gapminder.org) hay disponibles categorías de datos para el estudio de poblaciones, así como numerosos gráficos interactivos para representarlos.

c) Economía

ECONOMÍA
Aplicación: Economía (Ciencias Sociales)
Relación con matemáticas: Aplicaciones de la derivada, optimización, cálculo de primitivas, integración e integración definida.
Curso: 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales (también de Ciencias Naturales)
Ejercicios: 1.- (Elaboración propia) Una empresa de fabricación de electrodomésticos ha determinado la función del beneficio obtenido por la fabricación y posterior venta de televisores. Dicha función es $f(x) = -x^2 + 1.000x - 249.000$, donde x es el número de unidades fabricadas ($x \geq 0$) y $f(x)$ el beneficio en euros. ¿Cuál es el número de televisores que debe fabricar la empresa para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? 2.- (Inspirado en Lial et al., p. 754) Las siguientes son diversas funciones de coste marginal. Para cada una de ellas calcula la función de coste con la ayuda del dato proporcionado: a) $f'(x) = \frac{x}{2}$, 4 unidades cuestan 20€. b) $f'(x) = x^2 - 6x + 9$, 5 unidades cuestan 10€. c) $f'(x) = 10 \cdot e^{-0,25x} + 10$, 1 unidad cuesta 3€. d) $f'(x) = 1,45 \cdot e^{0,60x}$, 2 unidades cuestan $3,50$€. 3.- (Elaboración propia) Un equipo de agentes bursátiles ha estimado mediante la función $f(t)$ el número de acciones que se venderán por minuto de una empresa durante la primera hora en la que salga a bolsa, tiempo en el que prevén que se habrán vendido prácticamente todas. $$f(t) = 20t \cdot e^{-0,15 \cdot t}$$ Se pide: a) ¿En qué minuto se alcanzará el mayor número de venta de acciones? ¿Cuándo habrá una crecida en el ritmo de venta y cuándo una reducción? b) ¿Cuántas acciones se habrán vendido durante los 20 primeros minutos? c) ¿Cuántas acciones habrá vendido la empresa en la primera hora? d) Aproximadamente, ¿cuántas acciones ha puesto a la venta la empresa?
Comentario: En Economía existen bastantes contextos donde se utilizan las derivadas y, por ende, también las técnicas de integración. Suponen un tipo de actividades interesantes para los alumnos de Ciencias Sociales, que ya estudian esta asignatura; pero también a los de Ciencias Naturales, para que aprendan otras aplicaciones de las matemáticas.

d) Ejercicios de Ciencias Naturales

EJERCICIOS VARIOS DE CIENCIAS NATURALES
Aplicación: Física (Ciencias Naturales)
Relación con matemáticas: Integración, resolución de problemas, iniciación a las ecuaciones diferenciales (para 2º de Bachillerato de Ciencias Naturales, si el grupo es avanzado).
Curso: 1º y 2º de Bachillerato de Ciencias Naturales
Ejercicios: 1.- (Elaboración propia) En el desierto de Australia se realizan pruebas de coches de alta velocidad en larguísimas pistas con trazado recto preparadas para tal efecto. Se ha probado un vehículo cuya aceleración media es de $17\, m/s^2$, su deceleración para frenar (aceleración negativa) es de $39\, m/s^2$ y su velocidad máxima es de $400\, Km/h$. Las pruebas siempre consisten en acelerar el vehículo hasta alcanzar la velocidad máxima (tramo A), permanecer en ella un tiempo fijado de 5 minutos (tramo B) y frenar hasta detenerlo (tramo C). a) Calcula la función de velocidad en metros por segundo del vehículo durante toda la prueba. b) Calcula la función de recorrido del vehículo en metros durante toda la prueba. c) ¿Cuántos metros se desplaza el vehículo en cada una de las fases? ¿Y en total? 2.- (Inspirado en Martínez y de Prada, 2001) En La Lanzadera de un parque de atracciones se han subido 4 personas que pesan de media $70\, Kg$ cada una. La cabina de la lanzadera pesa $1.500\, Kg$ y produce su bajada en caída libre de $26\, m$ hasta que el freno magnético actúa, parando la atracción. Calcula: a) La función de velocidad de la cabina en función del tiempo en el tramo de caída libre. b) La función de altura de la cabina en función del tiempo en el tramo de caída libre. c) La velocidad máxima y tiempo en el que la alcanza en el tramo de caída libre. d) El tiempo que transcurre la atracción en caída libre. e) ¿Cuál es la aceleración de frenado (sabiendo que es constante) si hacen falta $20\, m$ para frenar del todo la cabina? 3.- (Inspirado en Lial et al., p. 802) Un lago cuenta actualmente con 50.000 litros y está recibiendo un caudal que se incrementa progresivamente de forma que la cantidad de agua contenida en el lago aumenta con una tasa de crecimiento mensual del 2%. a) Calcula la función $y = f(t)$ que da la cantidad y de agua en el lago en el mes t. b) Después de 4 meses, ¿cuál es la cantidad total de agua que tendrá el lago? c) Si la capacidad total del lago es de 100.000 litros, ¿cuándo comenzará a desbordarse?
Comentario: Existe una gran variedad de problemas relacionados con las Ciencias Naturales, especialmente Física, y que resultan muy interesantes para manejar múltiples herramientas matemáticas en el proceso de resolución. Resultaría muy útil coordinarse con los profesores de esta asignatura, de modo que las Matemáticas no supongan un obstáculo para su normal desarrollo.

DEMOSTRACIÓN DE UNA LEY FÍSICA – LEY DE SNELL

Aplicación: Física, Óptica (Ciencias Naturales)

Relación con matemáticas: demostraciones y aplicaciones de la derivada.

Curso: 1º y 2º de Bachillerato de Ciencias Naturales

La Ley de Snell: El ratio entre el seno del ángulo de incidencia α y del seno del ángulo de refracción β de un haz de luz que pasa de un punto P a un punto Q y de un medio de propagación a otro es constante:

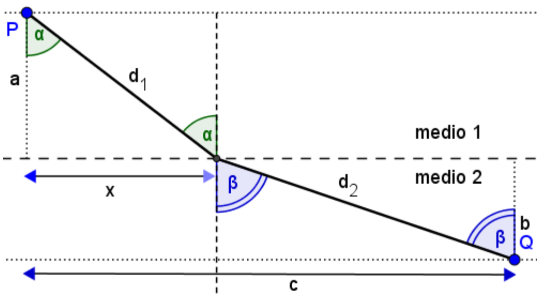


Figura 1. Representación de la Ley de Snell (elaboración propia en Geogebra)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\mathbb{C}/n_1}{\mathbb{C}/n_2} = \frac{n_2}{n_1} = cte$$

Donde v_1 y v_2 son las velocidades de propagación constantes; n_1 y n_2 los índices de refracción de los medios 1 y 2 y $\mathbb{C}$ la velocidad de la luz. Nótese que *"el camino real tomado por el haz de luz que viaja desde P a Q es aquel que minimiza el tiempo total de viaje"* (Simmons, 1992, p. 101).

Demostración: Es fácil observar las siguientes relaciones por el Teorema de Pitágoras y por la definición del seno:

$$d_1 = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad d_2 = \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \qquad \sin\alpha = \frac{x}{d_1} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \sin\beta = \frac{c-x}{d_2} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

El tiempo que toma la luz en recorrer los dos tramos es:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} \Rightarrow t(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2} \quad \text{con } x \in (0,c).$$

Buscamos minimizar ese tiempo con la primera derivada e igualando a 0*:

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \Rightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Y para esta ecuación sustituimos las identidades de los senos indicadas antes:

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Que es justo lo que queríamos demostrar.

*Existe punto crítico porque $t'(x)$ continua en $x \in (0,c)$ y como $t'(0) = -\frac{c}{v_2\sqrt{b^2+c^2}} < 0$ y

$t'(c) = \frac{c}{v_1\sqrt{a^2+c^2}} > 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (0,c)$ tal que $t'(x_1) = 0$ (Teorema de Bolzano).

Ese punto crítico es mínimo porque $t''(x) = \frac{a^2}{v_1\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + \frac{b^2}{v_2\sqrt{(b^2+(c-x)^2)^3}} > 0 \ \forall x \in (0,c)$.

Y de hecho es el único porque $t'(x)$ siempre creciente por ser $t''(x) > 0$ siempre.

Comentario: En el currículo de Bachillerato de Ciencias se pide dar una iniciación a las demostraciones, siendo la Ley de Snell un ejemplo. Como relación histórica, cabe mencionar que justamente este es, entre otros, uno de los problemas que resuelve Leibniz aplicando el nuevo cálculo diferencial, introduciendo un salto cualitativo del tipo de problemas que las Matemáticas podrían resolver a partir de entonces y suponiendo además una auténtica revolución para el desarrollo de las Ciencias.

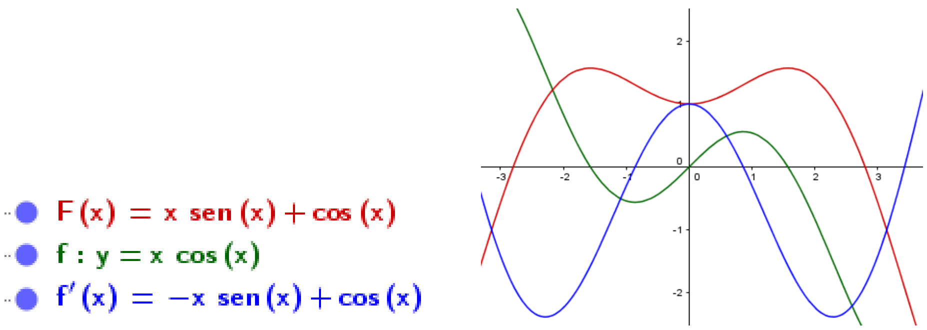
3.3.- Uso de las herramientas y recursos tecnológicos

Los programas informáticos de matemáticas o de propósito educativo general y demás herramientas multimedia, como aplicaciones web, son recursos didácticos de gran valor que para el caso que nos ocupa permiten ser utilizados para:

- Desarrollar específicamente las destrezas tecnológicas, para la representación de funciones, el cálculo infinitesimal o numérico.
- Facilitar las operaciones y los cálculos, realizar con facilidad las aproximaciones numéricas, modelizaciones, etc.
- Realizar tareas repetitivas que involucran la memorización.
- Trabajar en casa, tanto teoría como práctica, y en clase, con carácter colaborativo, participativo o interactivo.
- Explicar conceptos que requieran representación visual o dinamismos.

A continuación, se incluyen algunas posibilidades para cada uno de estos usos.

a) Representación de funciones y Cálculo Infinitesimal

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES Y CÁLCULO INFINITESIMAL
Software: Geogebra, Desmos, WolframAlpha, Wiris.
Curso: todos los niveles e itinerarios.
Ejemplo de uso: Sea la función $f(x) = x\cos(x)$, calcula su primitiva $F(x)$, su derivada $f'(x)$ y represéntalas:  Figura 2. Representación de una función y una primitiva y derivada suyas (elaboración propia en Geogebra)
Comentario: Permite aprender el uso de un software matemático.

b) Métodos numéricos: ajuste de datos mediante una función

AJUSTE DE UNA TABLA DE DATOS MEDIANTE UNA FUNCIÓN

Software: Geogebra, Microsoft Excel.

Curso: 4º ESO (académicas), 1º y 2º Bachillerato (todas las modalidades).

Ejemplo de uso: A partir de la proyección de la población española, representa la gráfica y realiza un ajuste con una función de tipo conocido.

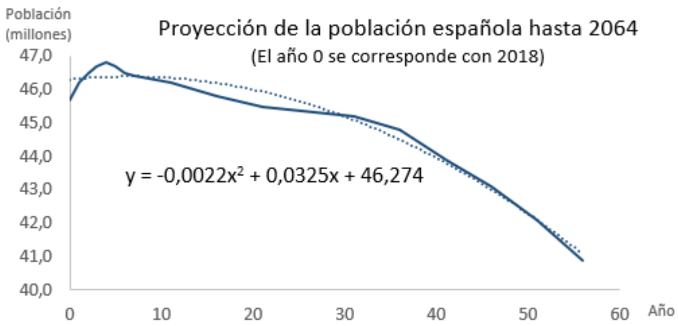


Figura 3. Proyección población española (elaboración propia en Excel con datos del INE, http://www.ine.es/prensa/np870.pdf)

Comentario: Realizado el ajuste en Excel mediante una función polinómica de grado 2, pero permite realizarlo con una exponencial, logística, logarítmica, lineal, etc.

c) Actividades para memorizar

ACTIVIDADES PARA MEMORIZAR

Software: Moodle.

Curso: Todos los niveles e itinerarios.

Ejemplo de uso: Realizar cuestionarios de unas veinte preguntas cada uno, con límite de tiempo y respuesta múltiple en los que se pide asociar funciones con su tipo.

La siguiente es una función:

a) Polinómica

b) Trigonométrica

c) Exponencial

d) Logarítmica

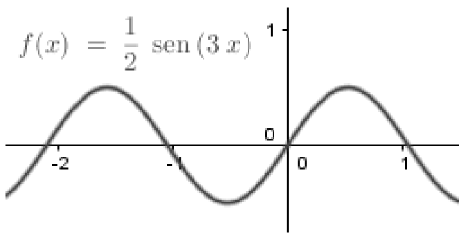


Figura 4. Función trigonométrica (elaboración propia en Geogebra)

Comentario: Ejercicio que se puede realizar en casa y tantas veces como se quiera. Permite, de una forma interactiva y rápida memorizar ciertos contenidos.

d) Actividades teóricas

ACTIVIDADES TEÓRICAS
Software: Brilliant.org, Maths Experiencing
Curso: Cursos de ESO (Maths Experiencing), 3º, 4º ESO y Bachillerato (resto).
Ejemplo de uso (Brilliant.org): Investiga cómo se comporta $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ cuando x se hace muy pequeño. Prueba con, por ejemplo, $x = 1$, $x = 0{,}1$, $x = 0{,}001\ldots$ ¿A qué número tiende $f(x)$? Utiliza una calculadora y asegúrate de evaluar el seno en radianes y no en grados. Ejemplo extraído y traducido de https://brilliant.org/practice/motivating-example-for-limits/?p=2. Contenidos de Cálculo en: https://brilliant.org/math/calculus/.
Comentario: La plataforma cuenta con muchas actividades interactivas interesantes, algunas teóricas, muchas prácticas y otras relativas a las Ciencias. Son útiles para asentar y afianzar conocimientos. Esta en concreto, aunque está sin relacionar, permite un aprendizaje por descubrimiento que sirve de introducción al concepto de límite.

e) Actividades prácticas

ACTIVIDADES PRÁCTICAS
Software: Khan Academy, Brilliant.org, ThingLink
Curso: Todos los niveles e itinerarios (ThingLink), 3º, 4º ESO y Bachillerato (resto).
Ejemplo de uso (Khan Academy): Dada la siguiente función, ¿cuál es el valor de $f'(0)$? $f(x) = \begin{cases} -2x-5, & si\ x < -1; \\ -3, & si -1 \leq x < 1; \\ -3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & si\ x \geq 1. \end{cases}$ Ejemplo extraído y traducido de uno de los ejercicios de la colección de https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/basic-differentiation-bc/basic-differentiation-review-bc/e/symbolic-differentiation Contenidos de Cálculo en: https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab y https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc
Comentario: Tanto Khan Academy como Brilliant.org disponen de itinerarios preparados para el aprendizaje. Estaría bien fomentar entre los alumnos su uso más allá del tiempo escolar, como una actividad de ocio. Con ThingLink es el docente el que ha de diseñar y preparar las actividades. No se ha de olvidar que con Geogebra y Desmos también es posible crear actividades para realizar en línea.

4.- Desarrollo de la innovación

En este capítulo se describen los casos utilizados en el instituto de educación secundaria, como ejemplos de la innovación que está estudiando. Primero se comenzará por la consideración de los criterios previos que determinaron la concreción de los casos y posteriormente se expondrá el contenido y el relato de la puesta en práctica de cada uno de ellos.

Será en el siguiente capítulo donde se analicen los resultados.

4.1.- Consideraciones para la elaboración de los casos

Como ya se había adelantado, la audiencia con la que tuve la oportunidad de poner en marcha esta pequeña innovación fue la correspondiente al grupo de veintiún alumnos de primero de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales.

El nivel de dificultad de los dos casos no podía ser muy alto, dada la escasa motivación e interés generales y debido también a las carencias y baja soltura con las matemáticas. Por ello, la distancia de aprendizaje debía ser la menor posible y urgía encontrar las formas adecuadas para despertar el interés y la motivación de los alumnos.

Otra variable a tener en cuenta fue la del tiempo, además de no poder dilatar mucho las unidades didácticas, para no impedir la correcta finalización del curso, se requerían más sesiones de refuerzo y práctica para que el alumnado ganara en destreza y entrenamiento.

4.1.1.- Caso 1: Estudio de familias de funciones elementales y de la continuidad con Desmos

Se dispuso de dos sesiones para realizar este caso. La parte que se quería impartir se correspondía al estudio de la continuidad de las funciones, más que a la continuidad puntual que se acababa de ver en las clases anteriores. Tocaba hacer un repaso de las familias más comunes de funciones, junto con otras especiales, como las del valor absoluto, la función parte entera y parte decimal o las funciones definidas a trozos.

El nivel de dificultad no era muy alto, pues en parte conocían ya las funciones elementales, por lo que esta vez no hacía falta adaptarlo, dado que la continuidad de una función es una extensión de la continuidad puntual en el dominio de la misma. El salto cualitativo no era muy alto. Sí se necesitaba mostrar de una manera novedosa para ellos, que atrajera su atención y que fomentara su escasa participación.

Así que pensé que una buena forma de estudiar esta propiedad sería mediante el uso de una aplicación tecnológica, decantándome por Desmos. Se podía aprovechar para repasar la continuidad puntual; ilustrar la parte teórica de la continuidad en un intervalo; mostrar la continuidad de las funciones elementales, mientras se repasan sus características; ofrecer ejemplos de funciones existentes en las ciencias naturales o sociales y ver de forma gráfica un ejercicio de determinación del valor de un parámetro para que funciones definidas a trozos sean continuas en todo $\mathbb{R}$ (recta real) o en su dominio. El profesor-tutor también pidió que viéramos algo de simetría de funciones, así que también incluí material sobre eso.

La parte aplicada de este caso se reduce a ilustrar ejemplos de funciones propias de las disciplinas científicas. Si bien es cierto que se podría haber incidido mucho más en este aspecto, ya veremos después cómo, en principio tampoco convenía cargar a los alumnos con demasiados datos. Sea como fuere, el caso permitió evaluar la conveniencia de la utilización de las nuevas tecnologías, como potencial de gran valor para el enfoque científico.

4.1.2.- Caso 2: Contexto de las derivadas en una red social y en otros ámbitos de la economía o de las Ciencias Sociales

Para este caso se disponía del tiempo aproximado de una sesión y la unidad didáctica que se estaba estudiando era la de derivación y aplicaciones de las derivadas. La lástima es que tenían el examen parcial planificado para justo dos días después y hubo que partir este caso en dos partes, de modo que la mitad se viera en una sesión y la otra mitad en la otra. De esta forma se podía seguir realizando ejercicios para finalizar la unidad didáctica y afrontar el control con una mayor preparación.

Después de haber estado enseñando esta unidad didáctica, con los contenidos de tasa de variación media e instantánea, definición de derivada en un punto, función derivada, reglas de derivación y aplicaciones para el estudio de la monotonía y la curvatura; los alumnos demandaban la utilidad práctica del tema, aun contando con que ya se les introdujo verbalmente en el inicio de la misma, mediante una breve exposición histórica y su impacto en el desarrollo científico y tecnológico subsiguiente. Sin embargo, su demanda estaba más que justificada, después de haber dedicado bastantes sesiones para aprender a derivar, y en cierta manera servía para plantear la utilidad real de la propia innovación. Fomentar el interés y la motivación es uno de los factores fundamentales del TFM, así que también se necesitaba un contexto con el que ellos estuvieran familiarizados sin salirnos del tema, o al menos que sirviera de introducción y nos condujera a él.

Se buscaba mantener una orientación hacia las Ciencias Sociales y la Economía que sirviera como reducción de la abstracción de las matemáticas; tratar con situaciones reales pertenecientes a estas disciplinas sin que la dificultad supusiera una distancia de aprendizaje inalcanzable para los alumnos; mostrar la utilidad y necesidad del estudio de las derivadas para despertar su interés y paliar su percepción negativa hacia las matemáticas; destacar la importancia de saber matemáticas en la vida profesional y motivar positivamente a los alumnos.

Por supuesto, no se pueden olvidar los objetivos respecto a los contenidos de la materia vinculados a casos prácticos de las Ciencias Sociales: interpretar el significado de la función derivada de otra; interpretar la monotonía y curvatura de una función y su relación con la primera y segunda funciones derivadas; identificar e interpretar en los gráficos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión; conocer la existencia de otras utilidades de las derivadas; realizar ejercicios y resolver problemas gracias a la derivación.

No se podía incluir un nivel de dificultad elevado, como ya se ha indicado, antes bien el caso debía servir para clarificar conceptos, enseñar la utilidad y realizar algún ejercicio distinto de los habituales. Por eso mismo y por la falta de tiempo, la parte expositiva representaba una proporción mayor que la práctica.

Pensé que estaría bien poder utilizar el tema de las redes sociales, que es un contexto que los estudiantes conocen muy bien. Observando distintas redes sociales y buscando alguna relación válida, fue entonces cuando se me ocurrió aprovechar las estadísticas públicas de los videos de YouTube, que disponen de varios gráficos, y usarlo como tema principal. Además, existe una clasificación de los cien videos más vistos de YouTube, casualmente la mayoría temas musicales, que permitirían realizar el estudio que pretendía con algo que les iba a gustar.

Existe en la actualidad una disciplina, denominada en inglés Network Science (en español Análisis de Redes), que seguramente cobre una mayor relevancia en el futuro cercano. En ella, el uso del cálculo infinitesimal es posible, si bien es cierto que los componentes principales o más evidentes son, entre otros, la teoría de grafos, la combinatoria y la estadística.

4.2.- Desarrollo del Caso 1

Primer caso, estudio de familias de funciones elementales y de la continuidad con Desmos, desarrollado durante los días 18 y 19 de abril de 2017. No conocían la aplicación, así que se la describí brevemente antes de pasar a utilizarla. Tenía preparados unos gráficos guardados en mi cuenta y accesibles de manera *online* mediante enlaces, de manera que tardara menos en realizar la exposición.

4.2.1.- Familias de funciones elementales y su continuidad

Les definí las funciones polinómicas mediante una expresión general de un polinomio de grado n. Dentro de esta familia, que son continuas en todo $\mathbb{R}$, se tienen los casos particulares de las funciones constantes y lineales y de las cuadráticas (parábolas). A parte de pintarles ejemplos varios en Desmos, mostrándoles cómo varían las representaciones en función de los parámetros dinámicos, les comenté algunos casos reales donde las encontramos, como por ejemplo el siguiente:

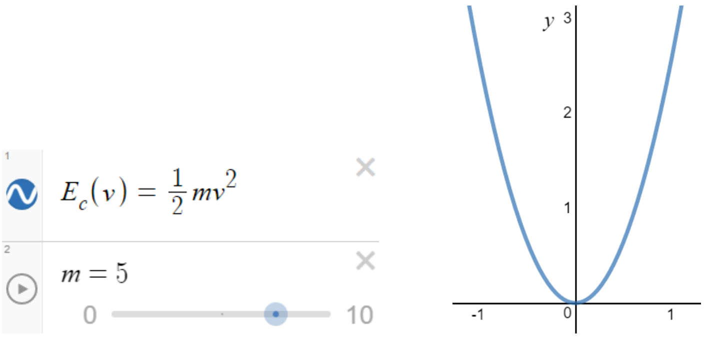


Figura 5. Energía cinética con masa fija y velocidad variable (elaboración propia en Desmos)

Continuamos con las funciones racionales, como familia de funciones formada por el cociente de dos funciones polinómicas, que son continuas en todos los puntos de su dominio, es decir, en todos los puntos de $\mathbb{R}$ salvo donde el denominador se anule. Se pusieron varios ejemplos gráficos, para mostrar las asíntotas cuando estas hacen acto de presencia, de cómo variando ciertos parámetros estas cambian de ubicación y de cómo el comportamiento en el infinito de una función racional se aproxima siempre al de una polinómica del grado correspondiente. Una aparición en las ciencias es la siguiente:

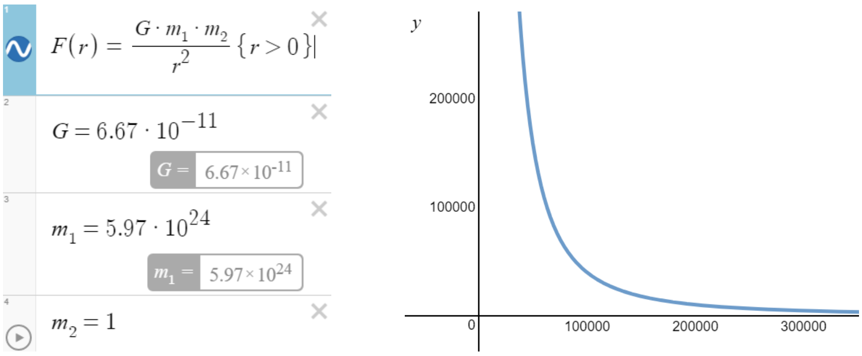


Figura 6. Fuerza gravitatoria para masa de la tierra y objeto de 1Kg, en función de la distancia r entre ambos (elaboración propia en Desmos)

La siguiente familia es la de las funciones radicales o con raíces, para la que podemos considerar aquellos casos sencillos en los que tenemos la raíz de un polinomio y que presentan continuidad en aquellos intervalos donde el radicando no sea negativo.

Llegamos a las funciones exponenciales, en las que nos detuvimos bastante para ver la forma que adquieren y sus características más relevantes en función de la base, para analizar el crecimiento tan fuerte que presentan y para relacionarlas con algunos fenómenos de la biología, de la sociología, de la economía o de la demografía. Se estudiaron también las funciones logarítmicas. Algunos casos de ambos tipos:

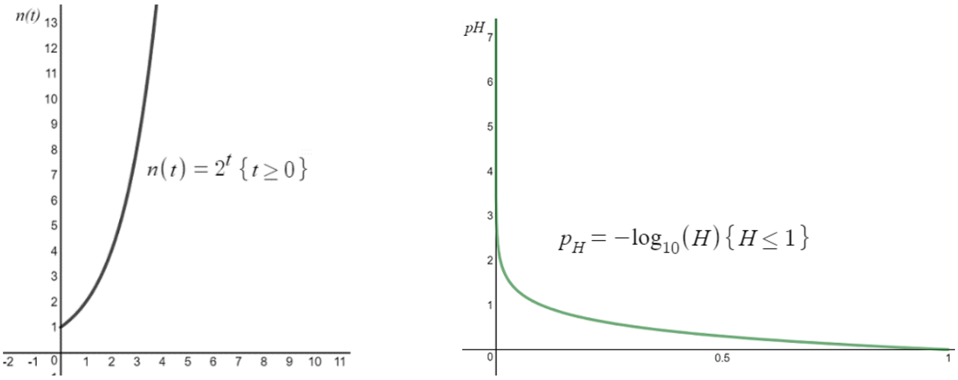


Figura 7. Número de células por día en un organismo en desarrollo cuyas células se duplican diariamente (izquierda) y determinación del pH, indicador del grado de acidez de una disolución según número de iones de Hidrógeno (elaboración propia en Desmos)

Por último, pasamos muy por encima por las funciones trigonométricas, de modo anecdótico, seno, coseno y tangente, dado que no formaban parte del currículo. Sirva al menos la ocasión para mencionar la relevancia de las funciones trigonométricas en algunos campos científicos, como en la física o en las ingenierías de informática o telecomunicaciones.

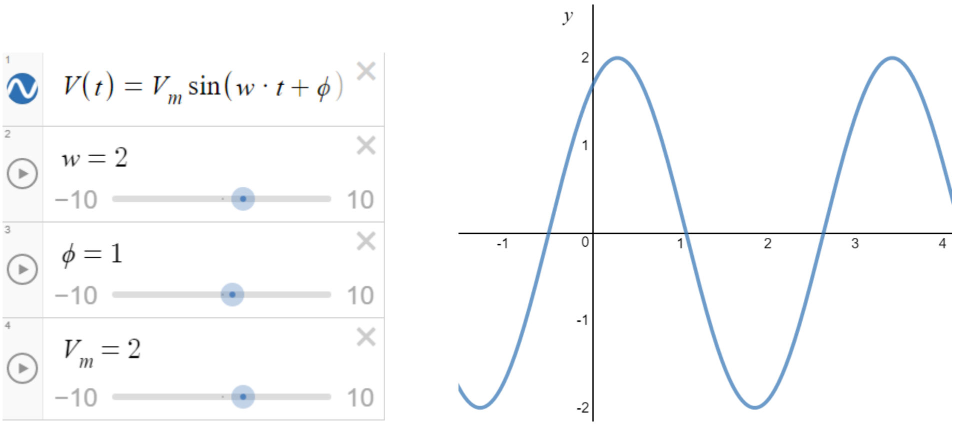


Figura 8. Ejemplo de sinusoide para la tensión en la corriente alterna (elaboración propia en Desmos)

4.2.2.- Otras funciones

Quisimos tanto el tutor como yo mismo introducir otras funciones interesantes como exposición adicional para los alumnos. Entre ellas, las funciones parte entera (o suelo) y parte decimal, que fueron útiles para determinar la continuidad y expresarla en forma de intervalos y que se utiliza para hacer redondeos o en contextos donde se utilice matemática discreta.

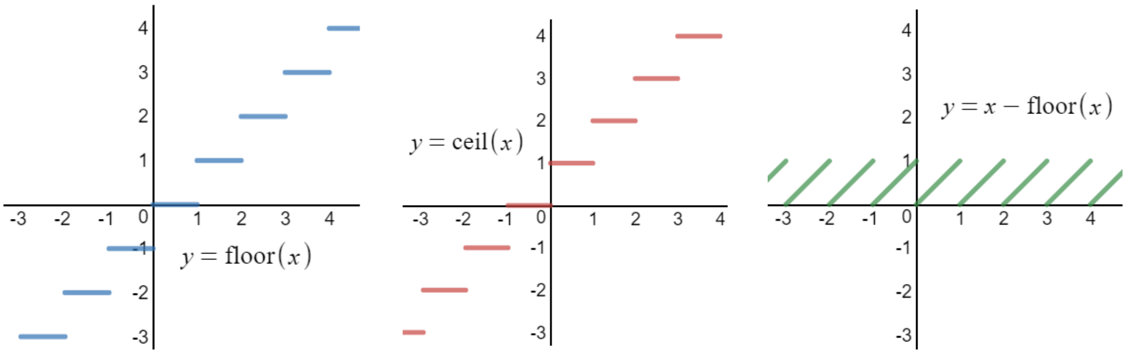


Figura 9. Funciones suelo, techo y parte decimal (elaboración propia en Desmos)

Las dos últimas funciones son interesantes solo para clases con buen ritmo y preferiblemente para alumnos del Bachillerato de Ciencias Naturales. La primera es la función de Dirichlet, para ilustrar el concepto de que la función puede estar definida en un conjunto infinito de puntos (dominio) y sin embargo no ser continua en ninguno de ellos (continuidad).

La otra función es $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, para indicar cómo se dan casos donde la función no solo no está definida en un punto concreto ($x = 0$) sino que además no están definidos los límites laterales al mismo.

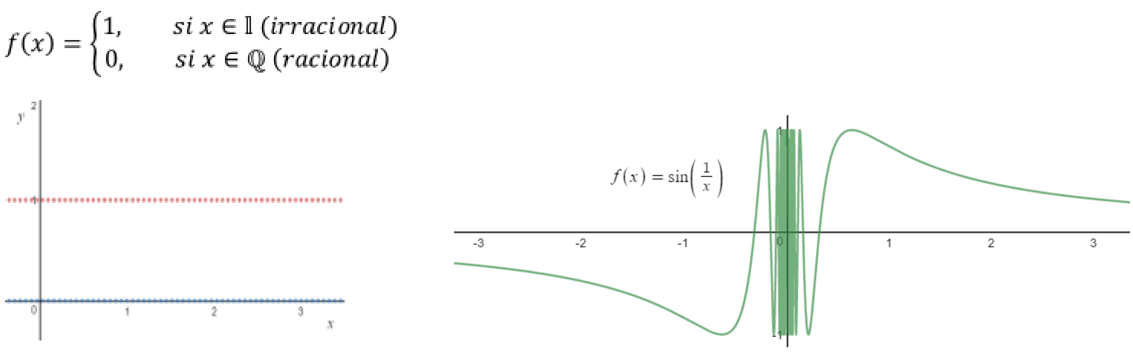


Figura 10. Función de Dirichlet (izquierda), función $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (derecha) (elaboración propia en Desmos)

4.2.3.- Paridad y simetría

Aquí se enseñaron las condiciones para determinar cuándo una función es par y cuándo es impar y comprobar algunas propiedades. Pongo algunos ejemplos vistos:

Funciones pares $f(x) = f(-x)$: $y = |x|$, $y = x^2$, $y = x^4 + x^2$, $y = \cos x$, $y = \frac{1}{x^2}$.

Funciones impares $f(x) = -f(-x)$: $y = -x$, $y = x^3$, $y = x^3 + x$, $y = \sin x$, $y = \frac{1}{x}$.

4.2.4.- Continuidad: ejemplos y repaso

Seguimos en la siguiente sesión con parte de lo anterior y con un pequeño repaso de la continuidad puntual y los ejercicios que estábamos realizando. De especial utilidad para este propósito son las funciones definidas a trozos. Se repasaron de forma visual ejercicios puestos como ejemplos y realizados con anterioridad como repaso.

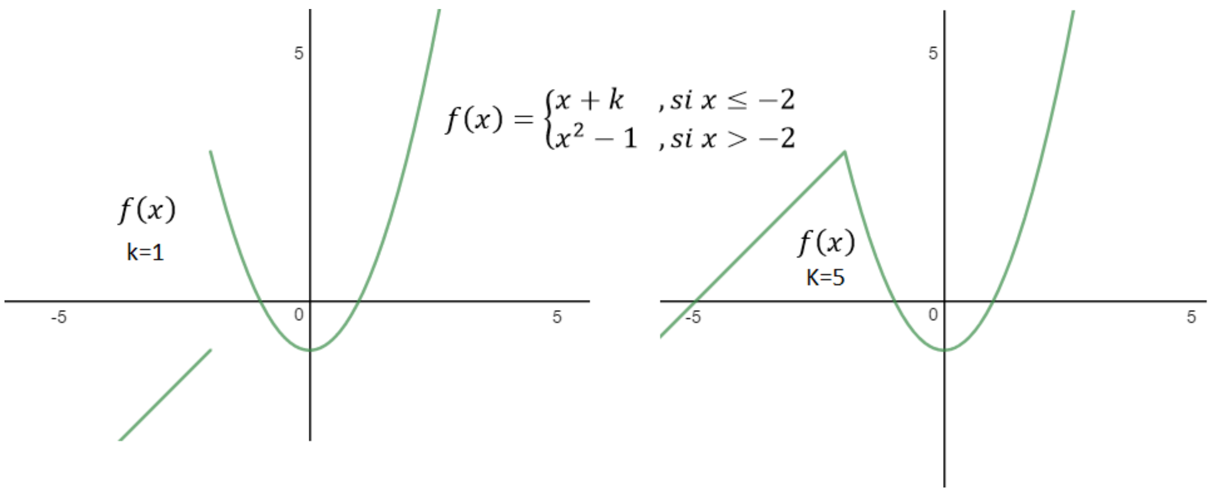


Figura 11. Ejemplo de función definida a trozos con un parámetro a calcular para que sea continua (parámetro con un valor en la izquierda y otro en la derecha) (elaboración propia en Desmos)

Otros ejemplos que había disponibles versaban sobre funciones racionales y la determinación de su continuidad, que también podía comprobarse de forma gráfica.

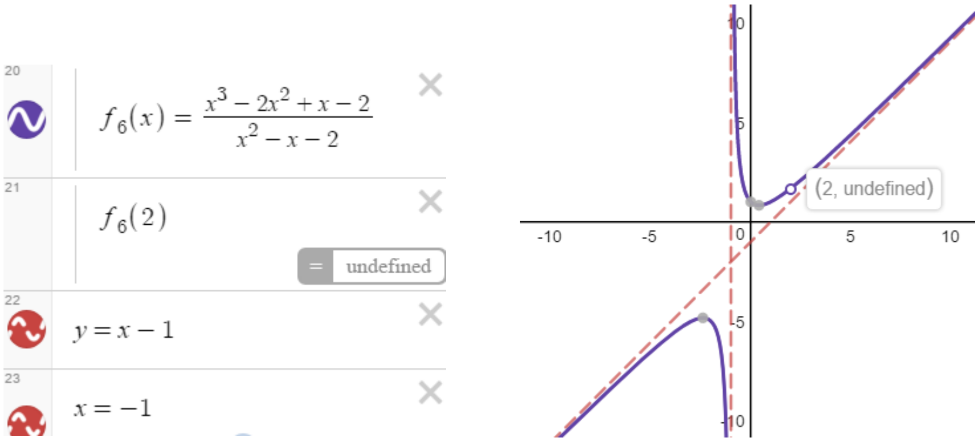


Figura 12. Ejemplo de funciones racionales (elaboración propia en Desmos)

4.2.5.- Ejercicios

Por falta de disponibilidad temporal no dio tiempo a practicar más ejercicios preparados, en la tónica de los mostrados antes: trabajando con funciones definidas a trozos, estudiando su continuidad o calculando el valor de parámetros para hacerlas continuas en los puntos de unión de los trozos que las definen o trabajando con funciones racionales para estudiar su dominio y continuidad.

4.3.- Desarrollo del Caso 2

Segundo caso, sobre el contexto de las derivadas en YouTube, desarrollado entre los días 15 y 16 de mayo de 2017, con el apoyo de una presentación de PowerPoint.

4.3.1.- Introducción a las estadísticas de YouTube

Comencé el desarrollo del caso, a unos veinte minutos de terminar la clase ese día, porque se estaba dedicando la otra parte a la práctica de ejercicios para el próximo examen. Y lo hice preguntando si había algún "*youtuber*" en la sala, es decir, alguna persona que tuviera un canal en la plataforma de YouTube sobre alguna temática y subiera a la misma videos con regularidad. Como anécdota graciosa, rápidamente señalaron a uno de los alumnos que por lo visto tenía un canal y él mismo reconoció que en su pasado solía dedicar parte de su tiempo a esta actividad.

En aquel momento copé la atención del alumnado que estaba totalmente expectante ante lo que intuían que sería una clase (o parte de ella) de lo más inusual. Aprovechando que estaban atentos, les comenté sobre la importancia de las redes sociales en la actualidad, especialmente entre el público más joven, señalándoles algunas de ellas como muestra. Tanto es así, les dije, que incluso mucha gente gana mucho dinero con ellas, por lo que el tema era digno de ser considerado. Proseguí contándoles que una herramienta imprescindible para poder analizar resultados y tomar decisiones para maximizar el rendimiento propio en las redes sociales es la estadística, una parte fundamental de las matemáticas que trata sobre la descripción e interpretación de grandes cantidades de datos.

Así que pasé a explicarles que muchas de estas redes sociales cuentan con muy buenos sistemas estadísticos a disposición de sus usuarios registrados. Y aquellos que fueran muy populares tendrían datos muy interesantes que analizar, pero lejos de nuestra posibilidad de acceder a ellos. Sin embargo, teníamos suerte porque YouTube, además de disponer de forma privada su módulo estadístico YouTube Analytics, contaba para cada video con una serie de estadísticas públicas en forma de gráficas.

¿Qué tema íbamos a analizar y cómo? Analizaríamos un canal de YouTube que tenía una lista de reproducción con enlaces actualizados a los cien videos más vistos de toda la historia de esta plataforma.

4.3.2.- Los gráficos de visitas totales y de visitas por día

Por cada video de los más recientes se tienen dos gráficas que nos interesan, el número de visitas totales en función del día y el número de visitas por cada día. En ambas la variable independiente se corresponde con el día desde la publicación del video hasta el día actual y se trata de una variable discreta, aunque la representación de la gráfica es continua. Por su parte, la variable dependiente es el número acumulado de visitas en la primera y el número de visitas unitarias en la segunda.

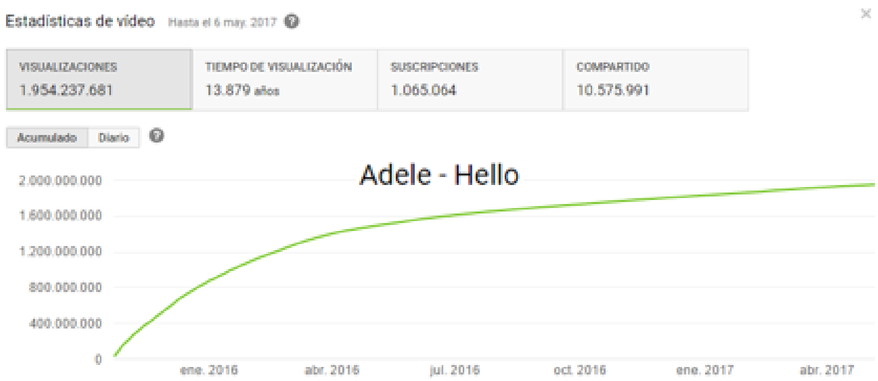


Figura 13. Función de visitas acumulada de un video de YouTube (estadísticas de YouTube)

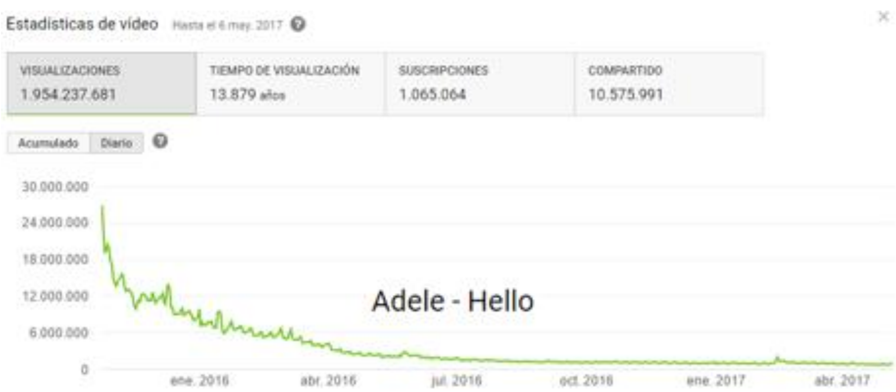


Figura 14. Función de visitas diarias de un video de YouTube (estadísticas de YouTube)

Si se consideran ambas variables como continuas, entonces la función de visitas por día es la derivada de la función de visitas totales.

Repasamos los videos con más visitas de YouTube (temas musicales todos salvo uno, un corto infantil) desde el que ocupa la posición séptima al primero. Nos detuvimos en el más visto de todos, para reseñarles que llegó a desbordar el contador de visitas y que también había matemáticas ahí, aunque relacionado con otro tema. Como mostraron interés, les conté brevemente y de forma sencilla cómo una variable en informática solo puede representar un número finito de números y que por tanto puede desbordarse si se sobrepasa esa cantidad ante una operación, pasando desde el valor máximo posible al mínimo posible, en este caso negativo. Así mismo, les conté que los administradores de la plataforma tuvieron que ampliar el tamaño de aquella variable para poder almacenar cantidades mucho mayores.

4.3.3.- Interpretación de conceptos, aspectos musicales y técnicos

Repasamos algunos casos curiosos de los gráficos de videos musicales que había preparado previamente donde se podía observar su comportamiento en una canción que está actualmente teniendo mucho éxito y en otra que claramente había pasado ya de moda. Podía verse incluso que la concavidad de la función de visitas acumuladas era hacia arriba cuando el tema era actualmente exitoso y hacia abajo en otro cuyo momento de popularidad ya había pasado.

Figura 15. Función de visualizaciones acumuladas de varios vídeos de YouTube (estadísticas de YouTube)

Comparamos la función de visualizaciones de un tema muy popular de un artista cuando no era conocido y de otro tema popular suyo estando ya consagrado y contando con un gran número de seguidores y suscriptores. El punto de partida marcaba una diferencia significativa.

Describimos el significado en este contexto de la monotonía (crecimiento y decrecimiento), de los extremos relativos, de la curvatura (concavidad y convexidad) y de los puntos de inflexión.

Otra aplicación existente de las derivadas es la de conseguir un polinomio que aproxime una función cuya expresión algebraica nos es desconocida, como es el caso. Les mostré solamente que esto existía y que había herramientas como Excel que podían hacer los cálculos por nosotros. También vimos cómo a pesar de la aproximación se producen ciertos errores y que para minimizarlos convenía aumentar el grado del polinomio y realizar aproximaciones por trozos o intervalos pequeños.

día	nº visitas
0	1
1	2
2	10
3	22
4	50
5	120
6	500
7	1000
8	1100
9	1101
10	1100
11	1090
12	1080
13	1065
14	1030

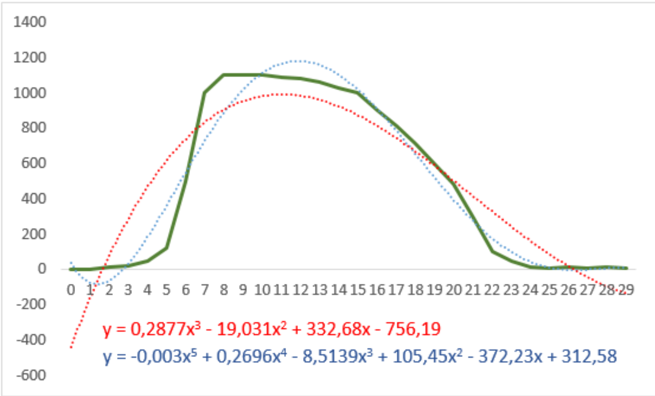


Figura 16. Ajuste de una función a los datos de una tabla (elaboración propia en Excel)

Dado que el crecimiento del segundo video más visto respecto del primero era superior, realicé una predicción sencilla de cuándo sería superado, punto que también les resultó de lo más interesante.

También, realicé una breve reflexión sobre algunas cuestiones de temática variada, como la globalización y su impacto cada vez mayor en el número de visitas de los videos más populares; la importancia de la estadística y del análisis para realizar estudios, describir situaciones y tomar decisiones; cómo y cuándo actuar ante la observación de un decrecimiento en el número de visitas diarias de un tema que estamos promocionando; en qué lugares promocionar; cuándo decidir sacar un tema nuevo y cómo buscar interpretaciones ante cambios de comportamiento en los hábitos de los usuarios.

Y por último hice una pregunta abierta sobre el caso hipotético que tuviéramos que contratar a un gestor de comunidad (o “*community manager*”), un representante o una discográfica; o si fuéramos alguien que tuviera que trabajar en un puesto así. ¿No interesaría que además de música y de gestión de redes sociales esta persona supiera también de matemáticas?

4.3.4.- Otros contextos donde usar la derivada y sus aplicaciones

Reservé algo de tiempo para ver otros contextos en los que se hiciera patente que usar la derivada como herramienta tiene grandes ventajas.

Un ejemplo que me pareció interesante fue mostrarles los beneficios de la empresa Apple, en la época de Steve Jobs, y observar su crecimiento exponencial y posterior estancamiento tras su pérdida. ¿Cómo sería en este caso la primera y la segunda derivada?

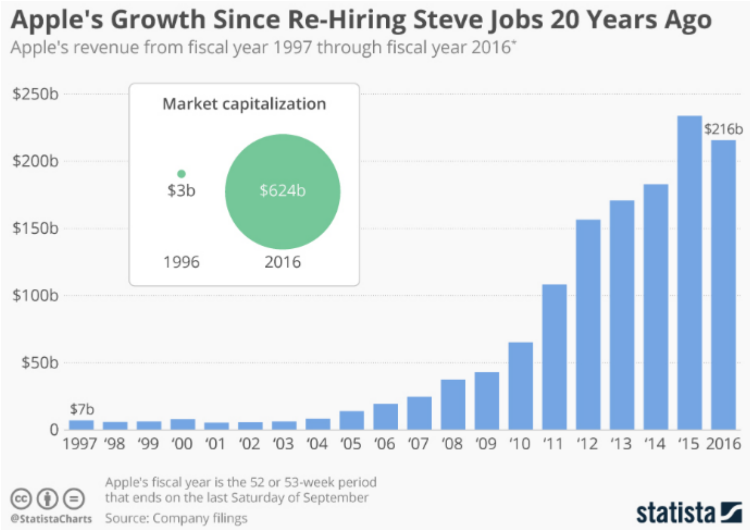


Figura 17. Beneficios de Apple por año (Statista.com https://www.statista.com/topics/847/apple/)

Otro ejemplo fue el de los niveles de agua embalsada en la totalidad de los embalses de España. Si obtenemos una expresión aproximada para la media de los niveles de los diez últimos años se puede determinar los periodos temporales donde hay un aumento o disminución de los niveles, así como calcular de forma aproximada los puntos máximos y mínimos.

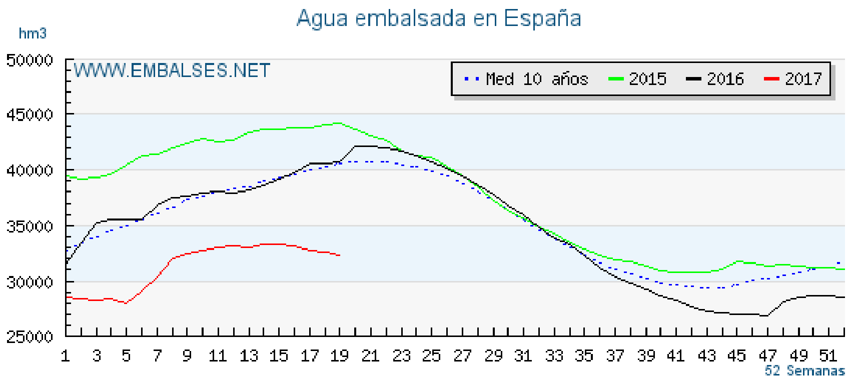


Figura 18. Niveles de agua embalsada durante el año (Embalses.net http://www.embalses.net)

En el consumo eléctrico se hace imprescindible estimar la función de consumo previsto para no dejar sin abastecimiento eléctrico a los hogares y empresas.

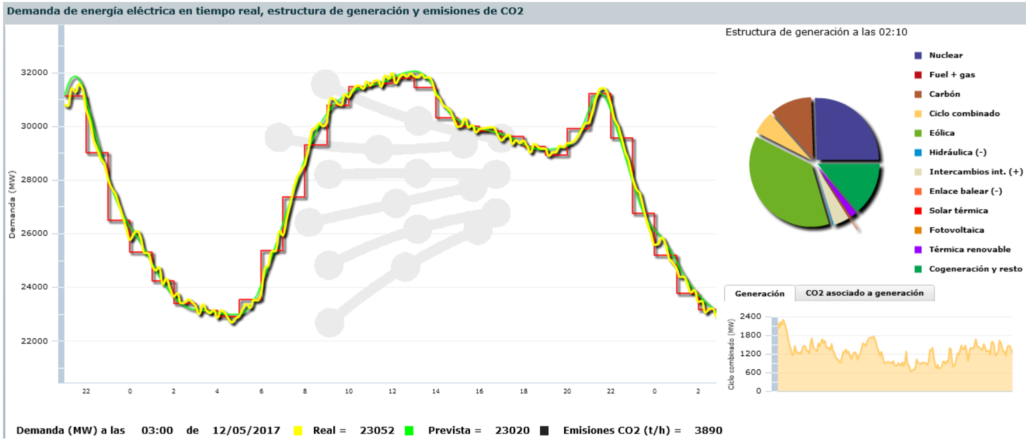


Figura 19. Funciones del consumo eléctrico (Red Eléctrica Española https://demanda.ree.es/demanda.html)

Los ciclos de la economía son un claro ejemplo de la importancia de conocer los periodos de crecimiento y decrecimiento económico, los puntos de auge (máximos) y de depresión (mínimos). Además, interesa que cuando se produce un crecimiento este se acelere cada vez más y en los periodos de decrecimiento este se desacelere lo más posible, es decir, que la curva presente en ambos casos concavidad hacia arriba.

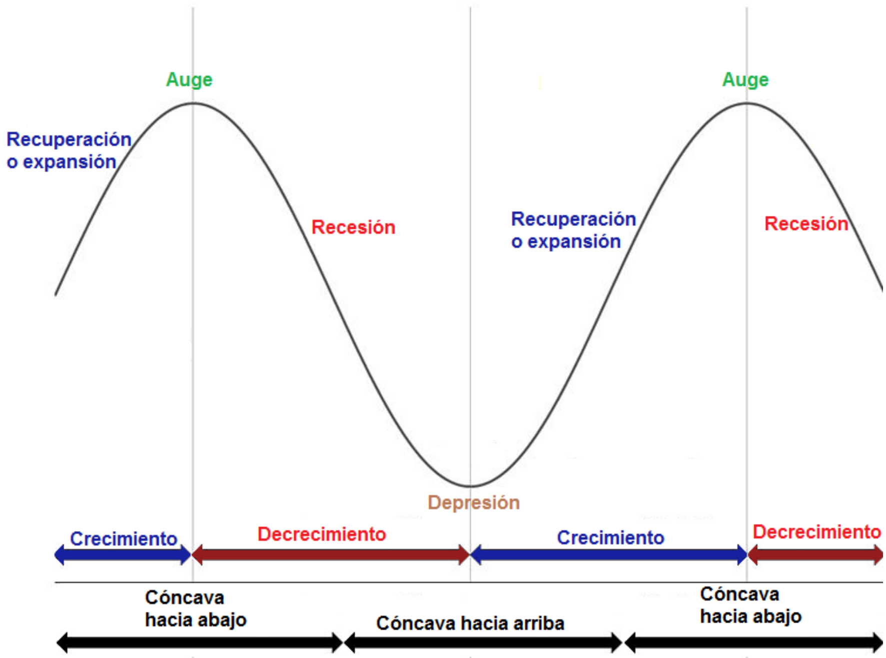


Figura 20. Ciclos de la economía (función representada) según crecimiento (dado por el signo de la primera derivada y concavidad (dada por el signo de la segunda derivada) (imagen modificada a partir de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Business_cycle.jpg)

En el mercado de valores se pueden estudiar las funciones del precio de un producto mediante las derivadas primera y segunda.

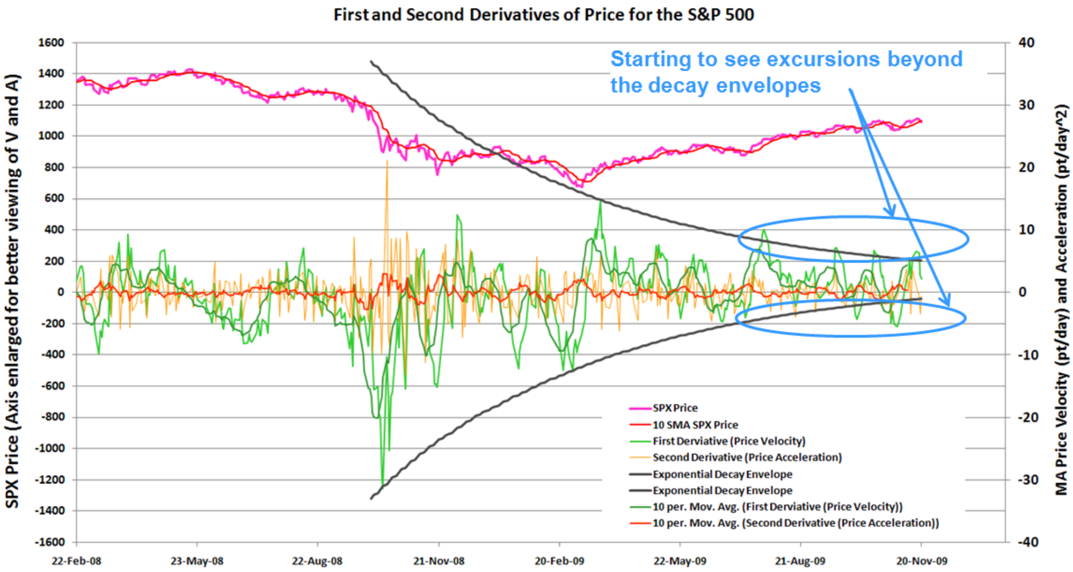


Figura 21. Ejemplo de función del mercado de valores donde aparecen la primera y segunda derivadas (Fuente: Market, Thoughts and Analysis, http://marketthoughtsandanalysis.blogspot.com.es/2009/11/first-and-second-derivatives-of-spx.html)

Para acabar, propuse algunos ejercicios sencillos pero interesantes con este trasfondo, uno de poblaciones y otro de beneficio marginal (parecidos a algunos de los indicados en el punto 3.2), y que de haber dispuesto de más tiempo me hubiera gustado realizar.

5.- Análisis y evaluación de la innovación

Divido el análisis y evaluación de la innovación en dos partes principales, la primera la de los casos como aproximación práctica y la segunda la del análisis de la innovación en su conjunto.

Se realizará dicho análisis con un carácter cualitativo, basado en las características observadas, los contenidos de los casos y sus potenciales usos, la experiencia personal, las opiniones manifestadas por los alumnos y el rendimiento en el parcial realizado.

5.1.- Análisis de los casos

Pasemos a analizar la puesta en práctica de los casos descritos en el anterior apartado, la pertinencia de sus contenidos, la forma de aprendizaje y la motivación en el alumnado.

Así mismo, se podrá evaluar el resultado por medio de una pequeña encuesta realizada a los alumnos, con las que se podrá tener en cuenta sus opiniones en ambas experiencias. También se comentarán los resultados de la prueba escrita que realizaron de carácter parcial, evaluando de forma unitaria las últimas unidades didácticas que se habían impartido en el periodo transcurrido del trimestre y contrastándolo con dos parciales realizados en el trimestre anterior. Tanto las encuestas como las notas de las evaluaciones están recogidas en el ANEXO I.

5.1.1.- Análisis del Caso 1

Fue interesante llevar a cabo este caso porque de entrada los alumnos no estaban acostumbrados a usar el ordenador en la clase de matemáticas. Sus expectativas hacia la asignatura parecían ser más bien negativas, generando sentimientos de apatía y aburrimiento. Sin embargo, la utilización de un programa con tantos dinamismos como Desmos supuso una bocanada de aire fresco para ellos. Desde el primer momento mostraron mucho interés, puede que un poco por la novedad, pero necesario para despertar en ellos la curiosidad, la enseñanza de una aplicación nueva y aprovechar para continuar con la unidad didáctica de la continuidad en las funciones.

Como ya se comentó, los contenidos no presentaban una dificultad para nada insalvable, todo lo contrario, así que con facilidad se podía aprovechar para ilustrar gráficamente algunos conceptos, como la continuidad puntual, la continuidad en un intervalo, la diferencia entre dominio de la función y continuidad de la función, la paridad (cuando existe) o la resolución gráfica de ejercicios con funciones definidas a trozos en los que se requiere calcular un parámetro para hacerla continua en los puntos de unión de sus subdominios.

Así mismo, era bastante rápido ofrecer muestras sencillas de situaciones de fenómenos naturales o sociales donde las funciones elementales hacen acto de presencia. Quizá, y aquí es donde puede encontrarse un punto débil del caso, se debía de haber hecho más hincapié en aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Economía. De hecho, pienso que una alternativa hubiera sido si en lugar de comenzar por los tipos de familias de funciones hubiéramos comenzado por la descripción de fenómenos reales propios de las Ciencias, sobre las que de forma guiada fuéramos identificando un comportamiento y a partir de ahí realizar una generalización para obtener una expresión algebraica que, ahora sí, podríamos pasar a clasificar dentro de distintas familias.

Este modo de proceder hubiera supuesto un ejemplo claro de enseñanza por descubrimiento, muy necesario para el aprendizaje significativo y desde luego una mejora importante del caso realizado. La parte de la participación no supondría mucho problema, porque durante el transcurso de las clases estuvieron muy participativos y parecía que les gustaba el tono diferente. No obstante, faltaría relacionar la parte de la continuidad con los fenómenos relacionados o buscar algunos ejemplos reales.

Respecto al aprendizaje memorístico, también relevante, considero necesario incluir más actividades para practicar con ellas; aunque en parte se había hecho ya en las clases anteriores, donde practicamos la continuidad puntual con diversos ejemplos y ejercicios. Pero recalco este hecho porque considero que se debe practicar más para que se afiancen los contenidos, los procedimientos y se adquiera la soltura suficiente para poder realizar los ejercicios de manera autónoma.

En los resultados del pequeño tanteo de la opinión de los alumnos (ver ANEXO I) casi todos ellos afirmaron que trabajar con esta herramienta les facilitaba el aprendizaje con una media de 7.8 (del 1 al 10) y desviación típica de 2.4. Solo un estudiante indicó que no consideraba que la herramienta le ayudara a aprender, indicando que le distraía y que consideraba más efectiva la pizarra tradicional. A otro le parecía como cualquier otra clase de matemáticas, sin indicar cómo valoraba esas otras, aunque creo que podemos hacernos una idea. Varios la puntuaron con un 5, lo que significa que ni les dificultaba ni les favorecía el aprendizaje.

Una mayoría indicó que le gustaría trabajar con esta herramienta con bastante frecuencia, con una media de 7.7 (del 1 al 10) y desviación típica de 2.2. Dos personas puntuaron para expresar que no se debía utilizar esta herramienta nunca o casi nunca. Muchos mostraron conformidad en los comentarios libres acerca de la clase, al indicar que era diferente, útil, entretenida, sirvió para aclarar dudas, les gustaba la forma de dar la clase o les motivaba. Otro alumno consideró que fui demasiado rápido al explicar los conceptos, así que tomo nota para próximas ocasiones.

5.1.2.- Análisis del Caso 2

La verdad es que este caso me causaba cierta expectativa sobre si realmente iba a incidir positivamente en los alumnos, si tenía un contenido real como los que estaba buscando y si la clase podía resultar provechosa para ellos. De hecho, por la temática existía el riesgo de que la clase se desviara o que los alumnos adquirieran un comportamiento disruptivo.

Pero no resultó así en absoluto. Desde el principio conecté muy bien con los alumnos, logré una atención universal y se obró el pequeño milagro de que todos participaran de forma positiva durante el desarrollo del caso. Incluso alumnos que durante mi estancia de prácticas se notaba claramente que habían abandonado la asignatura y no hacían nada, en este momento hicieron aportaciones con la realizaron de alguna pregunta. El objetivo de la motivación se consiguió.

Otro objetivo que tenía en mente y que en cierta manera motivó el caso en sí, era el de mostrar el provecho real del tema de las derivadas para varios contextos. Y para hacerlo se necesitaba interpretar el significado de la derivada en los mismos, la identificación y sentido de la monotonía y de la curvatura, donde intervienen la primera y segunda derivada, amén de otras aplicaciones existentes que, aunque no se fueran a impartir, al menos supieran que existían y que por ello estaba más que justificado estudiar la derivación de funciones. En cierta manera creo que también este objetivo fue cubierto. De hecho, para ellos resultó evidente que saber matemáticas en general y este tema en particular, era de provecho para analizar mejor algunas realidades.

Clarificar conceptos que no se hubieran entendido bien durante las clases anteriores y la consolidación de las destrezas de cálculo de la derivación suponían el tercer y cuarto objetivos. Este último tenía una prioridad menor, dado que ya se habían realizado ejercicios de este tipo y tampoco se disponía de mucho más tiempo para realizarlos. Aun así, se recogieron varios ejercicios en la presentación. En cierta manera, el tercer objetivo no se consiguió del todo, pues hubiera sido necesario expresar matemáticamente todo lo que se estaba viendo, a modo de repaso y para clarificar aún más.

De manera razonable se relacionaron los contenidos con la unidad didáctica. El tipo de aprendizaje fue más bien por exposición, aprendieron a observar de una manera diferente, más profunda y con enfoque matemático una realidad que ya conocían, pero que desconocían su relación con las matemáticas. Un ejemplo que se podría haber utilizado para lograr un aprendizaje por descubrimiento hubiera sido una relación de actividades donde ellos mismos razonaran si una función constituía la derivada de otra, para aprender las relaciones entre las mismas, y posteriormente trabajar con sus expresiones.

De hecho, podría realizarse en estas dos vertientes: visualmente, para asociar posibles funciones de visitas acumuladas con sus derivadas y manualmente, para calcular la expresión de la función derivada a partir de otra dada (todas definidas en los $x \geq 0$). Los siguientes son algunos ejemplos de esta actividad en su forma final:

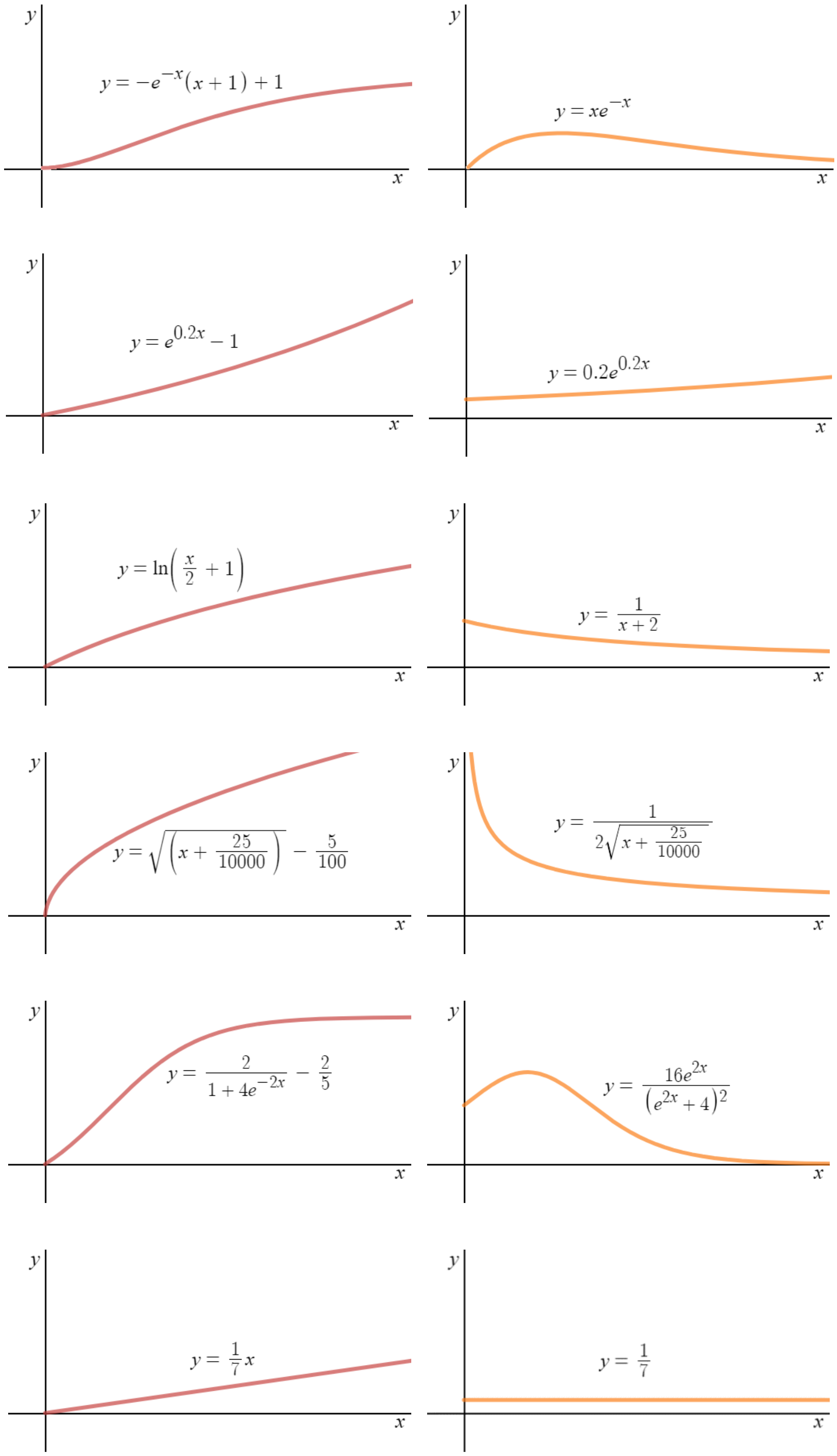


Figura 22. Posibles funciones de visualizaciones acumuladas (izquierda) y sus derivadas (derecha) (elaboración propia en Desmos)

Después se pueden calcular las segundas derivadas y, junto con las primeras ya obtenidas en el paso anterior, estudiar cada una de las funciones originales, monotonía, curvatura, extremos relativos y puntos de inflexión.

En el tanteo de las opiniones se les pidió que valoraran el aprendizaje al aplicar las matemáticas a situaciones de la vida real, de las Ciencias Sociales y de la Economía y lo hicieron muy positivamente con una puntuación media de 8.7 y desviación típica de 1.4; siendo la puntuación más baja de 6. Peor valoración recibió el desarrollo de este caso en el papel de clarificación de conceptos de la unidad didáctica, aunque aprobando con una media de 6.8 y desviación típica de 2.8; con un total de 3 notas por debajo del 5. Sin embargo, sí consideraron que la sesión sirvió para conocer la utilidad de las derivadas con una aprobación unánime y con una más que positiva media de 8.3 y desviación típica de 1.9.

Entre los comentarios se realizaron valoraciones generalmente positivas, destacando el carácter entretenido y motivador, la utilidad de lo estudiado, una mayor facilidad de aprendizaje. En general, recalcaron que les hizo darse cuenta de la presencia universal de las matemáticas y que les había motivado bastante.

5.1.3.- Valoración conjunta de los casos

Mediante estos dos casos ha sido posible realizar una primera aproximación hacia dos aspectos fundamentales del presente TFM: la utilidad de una orientación matemática hacia las Ciencias, la Economía y las situaciones reales y la conveniencia para este propósito de las nuevas tecnologías, como un recurso más a valorar y a tener en cuenta.

Parece que los alumnos de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I tienen bastante claro que les resulta más fácil aprender cuando se da a la materia el enfoque aplicado, independientemente de que se consiga una mejora global del aprendizaje (motivación, rendimiento, habilidades y destrezas matemáticas, pensamiento matemático, capacidad para resolver problemas, etc.). Se ha podido comprobar que sí que produjo una mejora sustancial en la motivación, manifestada por ellos mismos y observada personalmente, así como una mejora en la percepción que ellos realizan de las matemáticas, debido en parte a la reflexión sobre la utilidad de las mismas.

Respecto al uso de las nuevas tecnologías puede afirmarse que también supone una notable motivación inicial en el alumnado, que les ayuda a ver de una forma visual, directa y dinámica realidades y propiedades matemáticas, al tiempo que sirve para aclarar algunos contenidos. Características como la accesibilidad, la interfaz o el lenguaje del sistema pueden suponer barreras nuevas al aprendizaje, lo que exige la inversión de tiempo en la enseñanza de las herramientas utilizadas. En el caso de Desmos, puede decirse que su facilidad de uso no supuso un problema inevitable para el seguimiento de la clase por parte de los estudiantes.

Ambas experiencias resultaron satisfactorias desde el punto de vista personal como futuro docente, pero mejorables respecto a los conocimientos adquiridos por parte de los alumnos. Para valorar este punto tenemos disponible las notas obtenidas en el parcial de las unidades didácticas de límites (ver ANEXO I), continuidad, derivación y aplicaciones de la derivada. Siendo que el profesor-tutor realizó la unidad de límites y parte de aplicaciones de la derivada y dejándome a mí impartir el resto. Esta forma de evaluar el rendimiento ni mucho menos es concluyente, solamente tiene carácter orientativo y cualitativo.

El número de aprobados en el parcial (Parcial 1, 3Ev) fue de 7 personas, sobre un total de 20 examinados (media de 3.38). En otros dos parciales anteriores (Parcial 1, 2Ev y Parcial 2, 2Ev) aprobaron 8 de 21 (media de 4.10) y 7 de 20 (media de 4.44). Aunque el número de personas aprobadas fue igual o ligeramente inferior al de otros parciales, sí se obtuvo una bajada de la nota media de entorno a un punto, propiciada en parte por cuatro alumnos que entregaron en blanco el examen.

Respecto al parcial en sí, había 6 ejercicios correspondientes a la resolución de indeterminaciones, estudio de continuidad, definición de límite, determinación de recta tangente a un punto, estudio de la función y cálculo de derivadas mediante las reglas de derivación. Los ejercicios que mejor resultados dieron fueron precisamente los del estudio de la función (46% de puntación posible obtenida en el ejercicio), la derivación (44%) y la continuidad (41%). Si bien influyen otros factores como la proximidad temporal (en el caso de los ejercicios de derivadas) y el de facilidad (para el de continuidad), lo cierto es que precisamente son los temas para los que se hizo un hincapié mayor y para los que se realizaron los casos. Menor énfasis se hizo en el cálculo de la derivada de una función en un punto (32%) y en el de la obtención de la ecuación de la recta tangente en un punto (13%). Y muy atrás quedaba en el tiempo el cálculo de límites (19%). Precisamente fueron estos los dos ejercicios con peores resultados. Parce claro que para mejorar las calificaciones necesitaba un par de sesiones más para hacer más ejercicios de este tipo.

En cierto sentido el rendimiento académico obtenido fue un revés, al margen de las características académicas del grupo y su rendimiento pasado. Es verdad que se tienen las mejoras conseguidas en la motivación y percepción de las matemáticas y estas suponen un pequeño punto de partida, pero hay que seguir trabajando para mejorar de verdad la marcha global de la clase.

En la siguiente tabla se indican los contenidos que se consiguen abordar en un tratamiento integral de ambos casos:

CASO	CONTENIDOS
Caso 1	Repaso de familias de funciones.
	Continuidad de funciones básicas (polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas).
	Continuidad en otras funciones (Dirichlet, $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, suelo, techo, parte entera).
	Paridad de funciones.
	Repaso de continuidad puntual en funciones definidas a trozos y racionales.
Caso 2	Interpretación de funciones y variables independiente y dependiente.
	Interpretación de la función derivada.
	Reglas de derivación.
	Determinación de máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.
	Estudio de monotonía y curvatura.

Figura 23. Tabla de contenidos abordados en los Casos 1 y 2 (elaboración propia)

Y en la siguiente tabla se recoge una relación de las competencias trabajadas:

CASO	COMPETENCIAS						
	Matemática, Ciencia y Tecnología	Lingüística	Digital	Aprender a Aprender	Sociales y Cívica	Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor	Conciencia y Expresiones Culturales
Caso 1	Contenidos matemáticos y científicos usando herramienta Desmos.	Lenguaje matemático en intervalos de continuidad.	Uso de herramienta online Desmos.	Realización de matemáticas con la ayuda de software.	N/A	N/A	Representación de funciones y utilidad en casos reales.
Caso 2	Contenidos matemáticos aplicados a contextos sociales y económicos varios.	Cálculo de derivadas y uso de sus aplicaciones.	Uso de Microsoft Excel y de Redes Sociales.	Búsqueda de herramientas para resolver problemas, como ajustes de funciones.	Asociación de las redes sociales a las matemáticas.	Aplicación de matemáticas para mejorar el rendimiento de una actividad.	Asociación del mundo de la música a las matemáticas.

Figura 24. Tabla de competencias trabajadas en los Casos 1 y 2 (elaboración propia)

5.2.- Evaluación de la innovación

Toca ahora evaluar el tema del TFM de manera global, dividido en dos partes: una valoración de la innovación y sus posibles puntos de mejora.

5.2.1.- Valoración de la innovación

Ya se recalcó anteriormente que se debía fomentar en el alumnado un modo de aprendizaje tanto significativo como memorístico, ambos a ser posible por un descubrimiento activo. Con las actividades que se han propuesto se puede lograr este propósito, al estar enfocadas al descubrimiento de las relaciones matemáticas de situaciones naturales o sociales y a la realización de ejercicios a partir de este trasfondo. Por supuesto, se pueden crear tantos ejercicios como sean necesarios para lograr este cometido. Se hace necesario estudiar más a fondo el potencial de este enfoque en el rendimiento académico.

Otro de los propósitos es el del fomento del interés por la asignatura y una mayor motivación en el alumnado. Y esto se consigue al mostrar la utilidad de las matemáticas, hecho que se realiza de forma directa al relacionarlas con realidades del ámbito científico.

Es cierto que al introducir contenidos científicos en la materia se están añadiendo complicaciones nuevas, no sencillas para los niveles de ESO y de Bachillerato, al crear la necesidad de trabajar con expresiones matemáticas más complicadas, con más restricciones, con pérdida de generalidad o con un modelo de carácter aproximado y no exacto, y no preciso o idílico como podría encontrarse en la matemática pura y abstracta. Sin embargo, el uso de las nuevas tecnologías palia estas dificultades agregadas, al tiempo que permite a los alumnos desarrollar sus competencias en tecnología.

Otra dificultad adicional es la de encontrar la variedad suficiente de temáticas y de ejercicios que estén acordes al desarrollo cognitivo de los alumnos para poder trabajar con frecuencia con esta perspectiva. Los libros de matemáticas de carácter aplicado a las ciencias como los utilizados en el diseño de actividades de este TFM constituyen buenos recursos para proveer de la suficiente variedad temática y de ejemplos y casos asequibles, sobre todo para los estudiantes del Bachillerato.

Considero que puede haber una reducción de los tres tipos de obstáculos propios de la enseñanza de las matemáticas identificadas por Brousseau, epistemológica, ontogenética y didáctica (McShane, 2014), sobre todo en alumnos de Sociales. Reduce las dificultades epistemológica y ontogenética porque se utilizan casos tangibles que disminuyen el grado de abstracción matemática, adaptándose más al nivel cognitivo del estudiante; y en la didáctica por la propia metodología escogida que opta por una forma aplicada de enseñanza.

Respecto a los objetivos marcados inicialmente, se precisa seguir profundizando, tanto cualitativa como cuantitativamente en las ventajas y desventajas de la propuesta inicial. Pero sí creo que se ha conseguido bien los objetivos de ofrecer actividades y recursos tecnológicos para trabajar bajo esta perspectiva orientada a las Ciencias Naturales, Sociales y Economía.

5.2.2.- Puntos de mejora

Algunos puntos genéricos de mejora para el tema del TFM son los siguientes:

- Realizar una unidad didáctica completa, introducción, clases de teoría, clases de ejercicios, consolidación y evaluación con el enfoque de matemáticas aplicadas.
- Extender el enfoque a todo el temario, sobre todo para la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.
- Coordinarse con los profesores correspondientes de física, química, biología y geología, ciencias de la tierra, tecnología o economía para realizar un proyecto multidisciplinar en este sentido.
- Mejorar las formas de evaluación para determinar el aprendizaje real y el grado de alcance de los objetivos curriculares para la materia.
- Formar mejor a los profesores de matemáticas en las materias complementarias de las Ciencias para enseñar mejor la asignatura de Matemáticas aplicadas.

Seguro que hay más aspectos a mejorar, pero considerar estos puede ser un buen punto de partida.

6.- Conclusiones

Sabido es por todos que muchos alumnos tienen problemas con el estudio de la asignatura de matemáticas, conocimiento que he podido comprobar en el entorno de prácticas tanto por observaciones personales como por conversaciones con profesores de esta y de otras asignaturas. De hecho, es triste constatar cómo bastantes alumnos se decantan por el itinerario de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales tratando de evitar lo que se pueda el estudio de la asignatura y no tanto por una legítima preferencia hacia esta modalidad de estudios. Al reflexionar un poco más, no es difícil percatarse que la asignatura propia de este Bachillerato es Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales y por tanto idílicamente debería diferenciarse más, no tanto en el grado de dificultad de la materia, que también, sino por la naturaleza de la misma. Sin embargo, no veo que esta idea se traduzca en la práctica y muchos de los problemas que los alumnos tienen con la misma permanecen. La búsqueda de pequeñas reformas de la asignatura hacia este cometido ha sido una intención personal que también se ha visto reflejada en el tema del TFM.

Trabajar con la idea de las Matemáticas aplicadas me ha resultado muy interesante desde un principio. Desde el punto de vista académico y cultural considero que tiene un aspecto altamente enriquecedor. Otorga a las matemáticas un sentido, una razón de ser, una utilidad, mientras que la libera parcialmente de su inherente abstracción tan característica. Matemáticas aplicadas es, de hecho, una rama con derecho propio dentro de la disciplina, junto con las Matemáticas puras o académicas y las Matemáticas elementales; y quién sabe si es también parte de la solución al problema de tantos estudiantes en el periodo de la Secundaria y sobre todo en el del Bachillerato.

Por lo que he podido comprobar, es posible cambiar la percepción negativa de este tipo de alumnado hacia el aprendizaje. Cuando aprecian la utilidad ven el sentido y la necesidad de su estudio y también el gusto por dar un significado más profundo a aquellas realidades descritas por las matemáticas. Como profesores debemos ser *“capaces de transmitir una buena actitud ante las matemáticas, consistente en que supieran disfrutarlas y hacerlas atractivas, usándolas con soltura y buen tino”* (Escudero, 2009, p. 117, según indica el autor era opinión de Miguel de Guzmán).

Sea como fuere, por mi parte creo que es preciso seguir profundizando en el tema, sobre todo para valorar su eficacia final como herramienta educativa. Y por supuesto, al margen del tipo de metodología utilizada, siempre es posible recurrir a esta en casos puntuales y no solo para alumnos de Ciencias Sociales, sino también, cómo no, de Naturales.

El hecho de introducir esta perspectiva no evita tener que afrontar las abstracciones, el uso del lenguaje matemático, el pensamiento lógico, deductivo e inductivo, el aprendizaje de métodos y algoritmos, el razonamiento y la búsqueda de soluciones aproximadas o exactas a problemas, etc. Mientras que por otro lado agrega las complicaciones de cada una de las Ciencias que se utilicen. Quizá este sea el punto más importante, conjugar bien el grado de abstracción realmente necesario, para evitar perder el seguimiento del alumnado sin perder la adquisición de competencias y destrezas matemáticas, y la cantidad y profundidad de contenidos científicos para dar el sentido y la motivación sin introducir una complejidad o desviación innecesaria.

Se requeriría invertir tiempo y recursos en estudiar la utilidad final de esta metodología, aislando distintas variables, contrastando en distintos grupos, utilizando unidades didácticas de carácter tradicional por un lado y de carácter aplicado por otro. También existe una dependencia en las habilidades de los profesores, quienes pueden ser lo suficientemente buenos como para ofrecer desde las matemáticas puras la más valiosa de las formaciones académicas. O bien requerir métodos distintos para conseguirlo.

Lo que parece claro es que para poder enseñar matemáticas aplicadas se requiere de una formación específica y de un material didáctico debidamente preparado, por medio de libros de texto o de material y apuntes propios y con la ayuda o no de las aplicaciones surgidas por el avance tecnológico e informático. Cuantos más recursos didácticos y metodológicos estén a disposición del docente, con más criterio podrá tomar decisiones adaptadas a las necesidades y características de su alumnado y mejores resultados académicos y formativos logrará finalmente.

7.- Bibliografía

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., y Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. Hamburg: Springer.

Caligaris, M. G., Schivo, M. E., y Romiti, M. R. (2015). Calculus & GeoGebra, an interesting partnership, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 174, 1183-1188. Obtenido de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042815007879.

Chamorro, M. C., Belmonte Gómez, J. M., Llinares, S., Ruiz Higueras, M. L., y Vecino Rubio, F. (2010). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Education.

Díaz Godino, J., Gómez Alfonso, B., Gutiérrez Rodríguez, A., Rico Romero, L., y Sierra Vázquez, M. (1991). *Área de conocimiento Didáctica de la matemática.* Madrid: Síntesis.

Escudero, M. (2009). Una reflexión sobre el papel del Profesor de Matemáticas. *Modelling in Science Education and Learning*, 2(10), 115-119. Obtenido de https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/issue/view/413.

García Bacete, F. J., y Doménech Betoret, F. (1997). Motivación, aprendizaje y rendimiento escolar. *Revista electrónica de motivación y emoción*, 1(0). Obtenido de http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/158952.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.

LaTorre, D., Kenelly, J., Biggers, S., Carpenter, L., Reed, I., y Harris, C. (2010). *Calculus Concepts. An Informal Approach to the Mathematics of Change.* Boston: Brooks Cole.

Lial, M., Hungerford, T., Holcomb, J., y Mullins, B. (2015). *Mathematics with Applications in the Management, Natural and Social Sciences.* Boston: Pearson.

Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(1), 35-48. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=EJ1105103.

Martínez Pons, J., y de Prada Pérez de Azpeitia, F. (2001). *Aprende Física en el parque de atracciones.* Madrid: Edupubli.

McShane Warfield, V. (2014). *Invitation to Didactique*. New York: Springer.

Millán Gasca, A. (1996). El ideal de la matematización: la aplicación de las matemáticas a las ciencias biológicas, humanas y sociales. *Arbor: ciencia, pensamiento y cultura*, 606, 79-102.

Murayama, K., Pekrun, R., Lichtenfeld, S., y Hofe, R. (2013). Predicting Long-Term Growth in Students' Mathematics Achievement: The Unique Contributions of Motivation and Cognitive Strategies. *Child Development*, 84(4), 1475-1490.

Nortes Checa, A. (2007). *Matemáticas y su didáctica*. Murcia: Diego Marín.

Orden 9/1993, de 9 de septiembre de 1993, *por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas*. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 21 de septiembre de 1993, núm. 226.

Ortega del Rincón, T., y Sierra Vázquez, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 32, 87-115.

Orton, A. (1996). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014, *por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3.

Rodríguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números*, 77, 35-49. Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_01.pdf.

Peña Sánchez de Rivera, D. (2006). Las matemáticas en las Ciencias Sociales. *Encuentros multidisciplinares*, 8(23), 67-79. Obtenido de http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%BA23/Daniel%20Pe%F1a%20S%E1nchez%20de%20Rivera.pdf.

Sáenz Castro, C., y García Suárez, X. (2015). *Matemáticas. Placer, poder, a veces dolor. Una mirada crítica sobre la matemática y su enseñanza*. Madrid: UAM Ediciones.

Seneres, A. W., y Kerrigan, J. A. (2014). Using Dynamic Software to Address Common College Calculus Stumbling Blocks. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 5(2), 29-37. Obtenido de http://journals.tc-library.org/index.php/matheducation/article/view/1042/646.

Simmons, G. F. (1992). *Calculus gems: Brief lives and memorable mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años*. Barcelona: Crítica.

Swenton, F. (2009). Graphical Dysfunction. *Maths Horizons*, 16(4), 39. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/i25678808.

Yates, S. (2009). Teacher Identification of Student Learned Helplessness in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 21(3), 86-106.

8.- ANEXOS

ANEXO I.- Datos recopilados

Datos recopilados sobre la opinión de los estudiantes de los casos llevados al aula y de las evaluaciones realizadas.

a) Opinión sobre el Caso 1

Pregunta 1: Evalúa del 1 al 10 la facilidad de aprendizaje al trabajar con programas como Desmos.

Pregunta 2: Evalúa del 1 al 10 la frecuencia con la que consideras que se debe trabajar con programas como Desmos en clase.

Pregunta 3: Escribe tu opinión de forma libre sobre esta clase (motivación, pertinencia, utilidad, dificultad…).

Clase con Desmos (18/04/2017 y 19/04/2017)			
ESTUDIANTE	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**
1	8	8	Es cierto que facilita el aprendizaje y hace que los alumnos estén más atentos y participen más
2	7	7	Es algo diferente y sirve para entenderlo mejor
3	9,5	10	Me ha parecido algo diferente y divertido trabajar las matemáticas con las nuevas tecnologías
4	5	6	Me gusta mucho Jorge como profesor, explica muy bien y se le ve tranquilo a la hora de dar las clases. Muy buen profesor.
5	7	8	Me parecieron las clases más dinámicas del curso y a las que más interés puse, un gran instrumento
6	10	7	Creo que tiene mucha utilidad el programa para facilitar el aprendizaje de una [...] más cómoda
7	7,5	8	En mi opinión, yo creo que la aplicación Desmos es muy útil porque te ayuda a entender las cosas
8	1	3	Me parece, bajo mi punto de vista que trabajar con programas desvía la atención del alumno. Me parece que trabajar en la pizarra normal es mucho más efectivo
9	10	10	Me ha parecido muy interesante y sobretodo útil
10	10	10	En mi opinión los programas de gráfica son necesarios ya que te ayudan a comprender mejor la lección
11	8	8	Me gusta esta forma de dar la clase
12	10	7	A los alumnos les puede parecer más interesante, y es una nueva forma de aprender. En mi opinión está muy bien que en alguna clase se utilice.
13	9	10	Me ha gustado, me ha motivado
14	7	10	Ha faltado un poco de claridad en la explicación e ir un poco más lento en la explicación de conceptos
15	10	8	Una nueva forma de dar clases, que a la vez que entretenida me ha resultado muy interesante
16	6	9	Me ha resultado muy entretenido
17	5	2	Como todas las clases de mates
18	8	7	Me han servido de mucha utilidad ya que aclara muchas dudas
19	10	9	Me parece bien utilizar la tecnología en clase porque se facilita el aprendizaje
MEDIA	**7,8**	**7,7**	
DESVIACIÓN TÍPICA	**2,4**	**2,2**	

Figura 25. Preguntas realizadas a los alumnos para evaluar el Caso 1 (elaboración propia)

b) Opinión sobre el Caso 2

Pregunta 1: Evalúa del 1 al 10 la facilidad de aprendizaje al estudiar matemáticas que se aplican a situaciones de la vida real, las Ciencias Sociales o la Economía.

Pregunta 2: Evalúa del 1 al 10 la utilidad de esta clase para clarificar conceptos del tema que estamos estudiando.

Pregunta 3: Evalúa del 1 al 10 la exposición de esta clase para conocer la utilidad del tema que estamos estudiando.

Pregunta 4: Escribe tu opinión de forma libre sobre esta clase (motivación, pertinencia, utilidad, dificultad…).

Aplicaciones Derivación a las Redes Sociales, Economía y Ciencias Sociales (16/05/2017 y 17/05/2017)				
ESTUDIANTE	**Preg. 1**	**Preg. 2**	**Preg. 3**	**Preg. 4**
1	7,5	5	10	Ha sido una clase realmente entretenida en la que todos o casi todos hemos participado en alguna ocasión
2	10	8	8	Es algo mucho más entretenido que una clase normal y me ha sido útil para entender mejor la utilidad de las funciones
3	8	6	6	Opino que ha sido divertido y excitante conocer cosas de la vida cotidiana de las que no nos damos cuenta
4	9	7	9	Me parece muy útil, así sabes que lo que estás estudiando sirve para algo más que para aprobar el examen. Una presentación muy interesante.
5	10	5	9	En lo personal, me pareces un gran profesor y tienes todos mis respetos, clases como las de hoy son las que me hacen recuperar el interés por las matemáticas. Gracias. Me pareces un gran currante.
6	6,7	8	10	Me ha gustado mucho y gracias a esta clase sé como averiguar cuando invertir y cuando no
7	10	10	9	En mi opinión me ha parecido muy interesante aplicar estas cosas a la vida real porque se entiende más
8	8	2	5	Me ha parecido muy interesante la clase de hoy, lo veo necesario de vez en cuando para hacer algo diferente
9	10	10	10	Yo no sabía que las matemáticas tuviesen tanta utilidad, ha sido interesante
10	10	10	10	La clase de hoy me ha gustado ya que nos ha demostrado que las matemáticas son necesarias para todo
11	10	8	10	Me parece bien dar la clase así. (Más fácil de entender).
12	7	8	8	Me ha gustado y me ha parecido interesante ya que se sale de las clases habituales, está bien cambiar.
13	8	5	5	Me anima
14	10	1	5	La clase de hoy era entretenida y poco útil
15	7	9	8	Me ha servido para entenderlo mejor
16	10	8	10	La clase de hoy fue muy esclarecedora en relación a la materia
17	8	2	7	Muy bonita
18	6	8	10	Me ha ayudado mucho ya que he visto la utilidad de las materias
19	10	9	8	Me parece más entretenido ya que con la tecnología estoy más asociado y me parece más fácil
MEDIA	8,7	6,8	8,3	
DESVIACIÓN TÍPICA	1,4	2,8	1,9	

Figura 26. Preguntas realizadas a los alumnos para evaluar el Caso 2 (elaboración propia)

c) Evaluación parcial

Datos del primer parcial del tercer trimestre realizado el 18/05/2017.

Primer parcial del tercer trimestre: 18/05/2017							
ESTUDIANTE	Preg. 1 (1,5) Límites	Preg. 2 (1,5) Continuidad	Preg. 3 (1,5) Def. límite	Preg. 4 (1,5) R. tangente	Preg. 5 (2,5) Estudio función	Preg. 6 (1,5) Derivación	**Total (10 puntos)**
nº 01	0	0	0	0	0	0	**0**
nº 02	0	0	0	0	0	0	**0**
nº 03	0	0	0	0	0	0	**0**
nº 04	0	1,5	1,5	0	2,5	1,5	**7**
nº 05	0,5	0	1,5	0	2	1,5	**5,5**
nº 06	0	1,5	0,25	0	2	0	**3,75**
nº 07	1,25	1,5	1,5	0	2	1,5	**7,75**
nº 08	1	0,25	0	0,5	0,75	1,5	**4**
nº 09	0,5	1,25	1,5	0	1	1	**5,25**
nº 10	0,5	0	0	0,5	0	0	**1**
nº 11	0	0,25	0	0	1,75	0	**2**
nº 12	0,25	1,25	0	0	1	1,5	**4**
nº 13	0,5	1,25	0,25	0,75	1,5	1,5	**5,75**
nº 14	0,5	1,25	0,75	1,5	2,25	0,75	**7**
nº 15	0	0	0,25	0,25	1	0,5	**2**
nº 16	0,25	1,25	0,75	0	2,25	1,5	**6**
nº 17	0	0	0	0	0	0	**0**
nº 18	0,5	0,25	1,25	0,25	1	0	**3,25**
nº 19	0	0,75	0	0	0,75	0,5	**2**
nº 20	0	0	0	0	1,25	0	**1,25**
Media	0,29	0,61	0,48	0,19	1,15	0,66	**3,38**
Desv. Típica	0,37	0,64	0,62	0,38	0,86	0,69	**2,60**
% Media/Puntos Ej.	19%	41%	32%	13%	46%	44%	**34%**

Figura 27. Tabla de notas de examen parcial (elaboración propia)

d) Comparativa de evaluaciones parciales

Datos de dos parciales de la segunda evaluación y uno de la tercera.

Comparativa de parciales			
ESTUDIANTE	Parcial 1, 2Ev	Parcial 2, 2Ev	Parcial 1, 3Ev
nº 01	2	1	0
nº 02	5,25	4	0
nº 03	2	3,5	0
nº 04	5,75	6,75	7
nº 05	4	7	5,5
nº 06	5	3	3,75
nº 07	6,5	8	7,75
nº 08	3,75	0	4
nº 09	6,25	4	5,25
nº 10	4,75	8,5	1
nº 11	5,25	5,75	2
nº 12	4,25	7	4
nº 13	5,25	5	5,75
nº 14	4,75	3,5	7
nº 15	1,5	NP	2
nº 16	4,5	3,75	6
nº 17	1,75	4,75	0
nº 18	3,75	0	3,25
nº 19	4,25	7,75	2
nº 20	5	4,5	1,25
nº 21	0,5	1	N/P
Media	4,10	4,44	3,38
Desv. Típica	1,64	2,60	2,60
Nº aprobados	8	7	7
Nº suspensos	13	13	13

Figura 28. Tabla comparativa de notas de tres exámenes parciales (elaboración propia)