



MÁSTERES de la UAM

Facultad de
Ciencias / 16-17

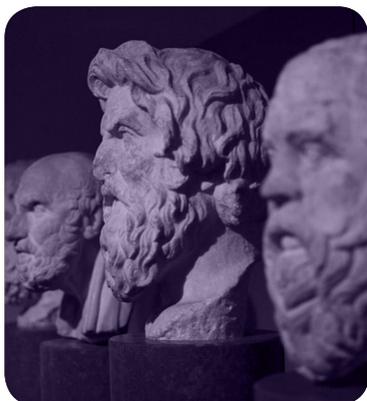
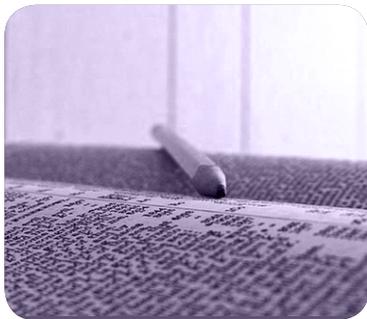
Matemáticas
y Aplicaciones



Campus Internacional
excelencia UAM
CSIC+



**Análisis diádico:
operadores de
Calderón-Zygmund
y operadores *sparse***
Javier Canto Llorente



978-84-8344-6215

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

Análisis diádico: operadores de Calderón-Zygmund y operadores *sparse*

Javier Canto Llorente



FACULTAD DE
CIENCIAS

Julio 2017
Directora: Ana Vargas Rey
Lugar de realización: Departamento de Matemáticas
Clasificación AMS: 42

Trabajo Fin de Máster. Curso 2016-2017

Índice general

Introducción	v
0.1. Abstract	vi
0.2. Laburpena	vii
1. Preliminares	1
1.1. Desigualdades débiles y teoremas de interpolación	1
1.2. El operador maximal de Hardy-Littlewood	3
1.3. Sistemas diádicos. Descomposición de Calderón-Zygmund	5
1.4. La clase de Schwartz y la transformada de Fourier.	6
1.5. El espacio BMO	7
2. La clase de pesos A_p	9
2.1. La condición A_p	9
2.2. La desigualdad de Hölder inversa	15
2.3. La clase A_∞	18
2.3.1. Una cuantificación de la desigualdad inversa de Hölder	20
2.3.2. Otras constantes para pesos en A_p	22
3. Integrales singulares	25
3.1. La transformada de Hilbert	25
3.2. Integrales Singulares de tipo <i>rough</i>	28
3.2.1. Transformada de Fourier de una distribución <i>rough</i>	29
3.2.2. Método de rotaciones	31
3.2.3. Cuando el método de rotaciones falla	33
3.3. Operadores de Calderón-Zygmund	36
3.3.1. El operador maximal truncado	41
4. Desigualdades con peso para integrales singulares	45
4.1. Teoría clásica	45
4.2. Operadores <i>sparse</i>	50
4.2.1. Acotación de los operadores <i>sparse</i>	51
4.3. Dominación de Calderón-Zygmund por operadores <i>sparse</i>	53
4.3.1. Demostración del Teorema 4.14	57
4.4. Cuantificación para las integrales singulares <i>rough</i>	59
Bibliografía	67

Introducción

Las integrales singulares son unos de los operadores más estudiados en análisis armónico. Forman una clase bastante amplia de operadores que aparecen en distintas áreas del análisis matemático, como son las ecuaciones en derivadas parciales o el análisis complejo. El estudio sistemático de estos operadores de manera abstracta permite relacionar operadores a priori distintos pero que realmente tienen mucho en común. Este proceso de abstracción es clave en todas las ramas de las matemáticas, no sólo en el análisis.

El análisis diádico consiste, grosso modo, en hacer una partición del espacio en cubos cada vez más pequeños, de manera que formen un retículo diádico, y elegir de cierta manera estos cubos en función de lo que se quiera probar. Una de las técnicas más utilizadas es la conocida como descomposición de Calderón-Zygmund, empleada por primera vez por Calderón y Zygmund en su célebre artículo [2], publicado en 1952. Esta técnica es una construcción relativamente sencilla pero muy útil: este documento la utilizaremos continuamente para demostrar una gran variedad de resultados, desde desigualdades débiles hasta desigualdades de tipo Hölder inversa.

Los operadores de Calderón-Zygmund son una clase de operadores integrales singulares que tienen una representación mediante un núcleo con ciertas propiedades de regularidad. Este clase de operadores incluye operadores importantes por derecho propio como la transformada de Hilbert, las transformadas de Riesz o el operador de Beurling. En las aplicaciones, es habitualmente interesante obtener resultados de acotación para espacios de tipo $L^p(w)$, siendo w una función peso perteneciente a la clase A_p de Muckenhoupt. En particular, desigualdades con peso del tipo

$$\left(\int |Tf(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para operadores T de Calderón-Zygmund y pesos w de la clase A_p de Muckenhoupt, este resultado es bien conocido (véase por ejemplo [5] o [12]). Lo que no estaba tan claro hasta hace poco era la dependencia de la constante C en el operador T y en la constante de Muckenhoupt A_p del peso w .

La clase de pesos A_p fue introducida por Muckenhoupt en [21] en el año 1972. Uno de los resultados más relevantes sobre pesos en esta clase es la conocida como desigualdad inversa de Hölder. Es un resultado ya clásico, pero nos interesa una versión moderna, en la que el exponente está cuantificado, demostrada en 2012 por Hÿtonen, Pérez y Rela en [15].

El problema de lograr la dependencia precisa de la norma de los operadores de Calderón-Zygmund en la constante A_p del peso w fue finalmente resuelto en 2012 por Hÿtonen en [13], donde el autor da una prueba del ahora conocido como teorema A_2 , pues antes era una conjetura. Este teorema afirma que la norma en $L^p(w)$ de un operador de Calderón-Zygmund T se puede acotar por

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_d C_T [w]_{A_p}^{\max(1, p'-1)}.$$

Se denomina teorema A_2 porque, antes de que fuera probado, era conocido que el caso $p = 2$ implicaba el resultado para el resto de valores de p , como comentan Duoandikoetxea y Rubio de Francia en [8].

Antes de que Hÿtonen probase el teorema A_2 para todos los operadores de Calderón-Zygmund, ya se habían demostrado resultados parciales para operadores concretos: Petermichl lo demostró para la transformada de Hilbert en [23] en 2007 y para las transformadas de Riesz en 2008 [24], y Petermichl y Volberg lo demostraron para el operador de Ahlfors-Beurling en 2002 [25].

La prueba que damos en este documento del Teorema A_2 la dio Lerner en 2016 [19], y se basa en dominar los operadores de Calderón-Zygmund por otros más manejables, conocidos como operadores *sparse*. Estos operadores toman los promedios en una familia de cubos esencialmente disjuntos. En cierto sentido, se parecen al operador maximal de Hardy-Littlewood, aunque en la práctica son más sencillos de manejar que éste último. La teoría de estos operadores es reciente y están resultando muy útiles a la hora de dominar integrales singulares, no sólo para operadores de Calderón-Zygmund.

En este documento trataremos además otro tipo de integrales singulares, las integrales singulares *rough*. Como su nombre sugiere, están representadas por un núcleo que no tiene regularidad, por lo que no entran dentro de los operadores de Calderón-Zygmund. Al no tener esta regularidad, es más difícil trabajar con estos operadores. En particular, no está claro si el teorema A_2 es cierto para las integrales singulares *rough*. En este documento obtenemos un análogo de este Teorema obtenido por Hÿtonen, Roncal y Tapiola en 2017 en [16]. Esta demostración se basa en el mismo principio de dominación de los operadores de Calderón-Zygmund por operadores *sparse* en que se basaba la demostración de Lerner, pero el resultado que se obtiene es peor. Concretamente, se obtiene

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_d C_T [w]_{A_p}^{2\max(1, p'-1)},$$

para un operador T integral singular *rough*. En el caso de $p = 2$ se obtiene una dependencia cuadrática en la constante A_2 del peso w . En el mismo artículo en que prueban este resultado, Hÿtonen, Roncal y Tapiola conjeturan que el teorema A_2 se debería cumplir también para estas integrales singulares *rough*. Todavía esta conjetura no está resuelta.

El objetivo de este documento es estudiar y entender ciertas desigualdades con peso para integrales singulares. La exposición está dividida en 4 capítulos.

En el primero, presentamos herramientas que se utilizan en el resto del documento. Excepto en la sección dedicada a la descomposición de Calderón-Zygmund, no entramos demasiado en detalles ni en demostraciones; nos contentamos con enunciar los resultados que necesitaremos. Aunque bastantes los temas que presentamos en este primer capítulo se suelen ver en cursos de nivel de máster, damos referencias de los resultados que exponemos.

En el segundo capítulo, estudiamos las clases de pesos conocidas como A_p . Damos la definición de esta clase y las propiedades básicas, como la caracterización en términos del operador maximal de Hardy-Littlewood y la desigualdad inversa de Hölder. Finalmente, describimos la clase A_∞ y damos un resultado moderno sobre la desigualdad de Hölder inversa, concretamente una cuantificación del exponente que aparece.

En el tercer capítulo estudiamos las integrales singulares. Empezamos con la transformada de Hilbert, para continuar con las integrales singulares *rough* y terminar con los operadores de Calderón-Zygmund. Para cada uno de estos operadores demostramos acotación en los espacios L^p respecto de la medida de Lebesgue bajo diferentes condiciones en el núcleo.

El cuarto y último capítulo es el principal de este documento. En él demostramos varias desigualdades con peso. Comenzamos dando una demostración más o menos clásica de las desigualdades con peso para operadores de Calderón-Zygmund y pesos en A_p . Luego, introducimos una herramienta muy útil para demostrar este tipo de desigualdades: los operadores *sparse*. Utilizando estos operadores, conseguimos dominar los operadores de Calderón-Zygmund y como consecuencia damos una demostración del celebrado Teorema A_2 . Para terminar el capítulo, damos una desigualdad con peso para integrales singulares *rough*, utilizando el teorema A_2 en su demostración.

0.1. Abstract

The main objective of this document is to study and to understand certain weighted inequalities for singular integrals. The exposition is organized in 4 chapters.

On the first chapter, we present the basic tools that we are going to use in the following chapters. Except for the Calderón-Zygmund decomposition, we do not provide details or proofs of the main

theorems we state. Even though many of the topics covered in this chapter are usually seen in graduate courses, we provide for sources of every result we state without proof.

On the second chapter, we cover the A_p class of weights. We give the definition of this class and we give proof of the basic properties, such as the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator and the reverse Hölder inequality. Finally, we describe the A_∞ class and we give a rather modern result concerning a quantification of the reverse Hölder inequality.

On the third chapter, we study singular integrals. First, we introduce the Hilbert transform and we proof its basic boundedness properties. We then introduce the rough singular integrals and we use the method of rotations to proof their boundedness. Finally, we introduce Calderón-Zygmund operators, and their maximal truncated operators.

The final chapter is the main chapter of this document. Here, we discuss weighted inequalities for the singular integrals we saw on the third chapter. First, we proof the standard wheighted norm inequalities for Calderón-Zygmund operators for weights of class A_p . Then, we introduce the sparse operators, which are a very useful tool when studying these norm inequalities. Using these operators we are able to prove the A_2 Theorem for Calderón-Zygmund operators. Finally, we prove, using the A_2 Theorem for Calderón-Zygmund operators, a similar but weaker theorem for rough singular integrals.

0.2. Laburpena

Lan honen helburu nagusia integral singularrentzako desberdintzak pisuekin ulertzea eta ikastea da. Azalpena lau kapitulutan banatuta dago.

Lehenengo kapituluan, beste kapituluetan erabiliko ditugun tekninka batzuk aurkezten ditugu. Horretarako ez dugu xehetasun handiko azalpena egingo, Calderón-Zygmund-en deskonposizio teknikari buruz izan ezik. Hala ere, erreferentziak emango ditugu aurkezten dugun guztiari buruz, masterreko kurtso askotan gai hauek agertzen diren arren.

Bigarren kapituluan, A_p pisu klasea aurkezten dugu. Honen definizioa eman eta, ondoren, oinarrizko propietateak azaltzen ditugu, hala nola Hardy-Littlewooden funtzio maximalaren bornapena eta Hölderren alderantzizko desberdintza. Azkenik, A_∞ klasea definitzen dugu eta Hölderren alderantzizko desberdintzaren bertsio moderno bat frogatzen dugu.

Hirugarren kapituluan, integral singularrak ikasten ditugu. Lehendabizi, Hilberten transformatua azaltzen dugu; gero, rough integral singularrak azaltzen dugu, eta haien bornapena frogatzeko biraketen metodoa erabiltzen dugu. Amaitzeko, Calderón-Zygmund motako operadoreak azaltzen dira, bai eta haien operadore maximal trunkatuak.

Azken kapitulua lan honen kapitulurik garrantzitsuena da. Hemen azaltzen da bigarren eta hirugarren kapituluetako nahasketa naturala: integral singularrentzako desberdintzak pisuekin. Lehenik, Calderón-Zygmund operadoreentzat desberdintza klaskikoa frogatzen da. Gero sparse operadoreak azaltzen dira, oso erabilgarria den teknika bat osatzen dutenak. Sparse operadoreak erabiliz, Calderón-Zygmund operadoreentzako A_2 teorema frogatzen dugu. Teorema hori erabilita, antzeko enuntziatu bat lortzen dugu rough integral singularrentzat, azkene teorema hau nolabait ahulagoa izanik.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las herramientas básicas que utilizaremos a lo largo del trabajo. Con intención de no desviarnos excesivamente del tema, omitiremos ciertas demostraciones, remitiendo siempre a la bibliografía. Los resultados que están directamente relacionados con el tema que tratamos están rigurosamente demostrados (e.g. el teorema de descomposición de Calderón-Zygmund), mientras que los que son algo más generales no los demostramos en este documento (e.g. los teoremas de interpolación).

1.1. Desigualdades débiles y teoremas de interpolación

Definición 1.1. Sean (X, μ) , (Y, ν) dos espacios de medida. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea T un operador (lineal o sublineal) de $L^p(X)$ en el conjunto de funciones medibles de Y en \mathbb{C} . Diremos que T está acotado de $L^p(X)$ a $L^q(Y)$ si

$$\int_X |Tf|^p d\mu \leq C \int_Y |f|^p d\nu,$$

para toda $f \in L^p(X)$, y cierta constante $C > 0$ independiente de f . Asimismo, diremos que T es de tipo débil- (p, p) si satisface

$$\nu(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_X |f|^p d\mu,$$

para toda $f \in L^p(X)$ y para toda $\lambda > 0$, con $C > 0$ una constante independiente de f y de λ .

Observación 1.2. Un operador acotado en L^p es de tipo débil (p, p) .

Normalmente trabajaremos en el espacio euclídeo \mathbb{R}^d con la medida de Lebesgue. Dado un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$, denotaremos por $|E|$ la medida de Lebesgue de E , como es habitual.

Otro concepto que utilizaremos en este documento es el de convergencia en medida. Es un concepto más débil que la convergencia en norma L^1 , pero es útil en ciertas ocasiones, sobre todo cuando estamos trabajando con desigualdades de tipo débil.

Definición 1.3. Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles. Decimos que (f_n) converge en medida a cierta función medible f si para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}| = 0.$$

El límite en medida de una sucesión es, en caso de existir, único, salvo identificaciones en un conjunto de medida nula.

También utilizaremos el siguiente teorema en alguna ocasión, en referencia a ciertos operadores maximales que aparecerán cuando trabajemos con integrales singulares. La demostración se puede encontrar en [5].

Teorema 1.4. Sea $\{T_t\}$ una familia de operadores lineales en $L^p(X)$ y consideremos el operador

$$T^*f(x) = \sup_t |T_t f(x)|.$$

Si T^* es (p, q) -débil, los siguientes conjuntos son cerrados en L^p ,

$$\{f \in L^p : \lim_{t \rightarrow t_0} T_t f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.}\},$$

$$\{f \in L^p : \text{existe } \lim_{t \rightarrow t_0} T_t f(x) \quad \text{c.t.p.}\}.$$

Como consecuencia de este último teorema, si queremos demostrar la existencia en casi todo punto de ciertos límites de operadores, bastará con probar que el correspondiente operador maximal cumple alguna desigualdad de tipo débil y que el límite existe para las funciones de, digamos, la clase de Schwartz o indefinidamente diferenciables y de soporte compacto.

A continuación damos dos resultados que utilizaremos más adelante. El primero es una conocida manera de calcular ciertas integrales y el segundo es un lema debido a Kolmogorov.

Lema 1.5. Sea f una función integrable y no negativa en un espacio de medida (X, μ) , y sea $\eta > 0$. Entonces

$$\int_X f^\eta d\mu = \int_0^\infty \eta \lambda^{\eta-1} \mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) d\lambda.$$

Lema 1.6. (Kolmogorov) Si S es un operador $(1,1)$ -débil, $0 < \eta < 1$ y E un conjunto de medida finita, existe $C = C(\eta, S)$ tal que

$$\int_E |Sf(x)|^\eta dx \leq C|E|^{1-\eta} \|f\|_1^\eta.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_E |Sf(x)|^\eta dx &= \eta \int_0^\infty \lambda^{\eta-1} |\{x \in E : |Sf(x)| > \lambda\}| d\lambda \\ &\leq \eta \int_0^\infty \lambda^{\eta-1} \min\left(|E|, \frac{C}{\lambda} \|f\|_1\right) d\lambda \\ &= \eta \int_0^{C\|f\|_1/|E|} \lambda^{\eta-1} |E| d\lambda + \eta \int_{C\|f\|_1/|E|}^\infty C\lambda^{\eta-2} \|f\|_1 d\lambda \\ &= C\|f\|_1^\eta |E|^{1-\eta} + \frac{\eta}{\eta-1} C^\eta |E|^{1-\eta} \|f\|_1^\eta \\ &\leq C|E|^{1-\eta} \|f\|_1^\eta. \end{aligned} \quad \square$$

Una herramienta muy útil dentro del análisis matemático es la interpolación. En este trabajo utilizamos tres teoremas de interpolación. No vamos a incluir aquí las demostraciones porque no entran dentro del objetivo de este documento, pero sí que damos referencias de dónde se pueden encontrar. El teorema de interpolación de Marcinkiewicz se puede encontrar en [5], el de Riesz-Thorin se puede encontrar en [26], y el de interpolación con pesos de Stein-Weiss se puede encontrar en [29].

Teorema 1.7 (Interpolación de Marcinkiewicz). Sean $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal de tipo débil (p_0, p_0) y (p_1, p_1) . Entonces T es acotado en L^p .

Teorema 1.8 (Interpolación de Riesz-Thorin). Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador lineal acotado en L^{p_j} con norma M_j , $j = 0, 1$. Entonces, para $\lambda \in (0, 1)$ y

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1},$$

T es acotado en L^p con norma $M \leq M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda$.

Teorema 1.9 (Interpolación con pesos). Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, w_0, w_1 funciones medibles no negativas en \mathbb{R}^d y T un operador sublineal acotado en $L^{p_j}(w_j)$ con quasi-norma M_j para $j = 0, 1$. Es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf|^{p_j} w_j dx \leq M_j \int_{\mathbb{R}^d} |f|^{p_j} w_j dx, \quad j = 0, 1.$$

Entonces, si $\lambda \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1}, \quad w = w_0^{p(1-\lambda)/p_0} w_1^{p\lambda/p_1},$$

$T : L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$ con quasi-norma $M \leq M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda$.

1.2. El operador maximal de Hardy-Littlewood

Uno de los operadores más usados en análisis armónico es el operador maximal de Hardy-Littlewood. En este documento utilizaremos su versión dada por cubos. Lo precisamos en la siguiente

Definición 1.10. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. La función maximal Mf se define para $x \in \mathbb{R}^d$ como

$$Mf(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x . El operador que a cada función le asigna su función maximal se conoce como el operador maximal de Hardy-Littlewood, y lo denotaremos por M .

El operador M es un operador sublineal. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces es claro que $|Mf(x)| \leq \|f\|_\infty$, con lo que M está acotado en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Usando el lema del recubrimiento de Vitali, se demuestra que M es de tipo débil-(1,1), con constante menor o igual a 3^d . Como consecuencia, por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, concluimos que el operador M es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $1 < p \leq \infty$. Es más, podemos dar una estimación de la norma de M en L^p , $\|M\|_p \leq c_d p'$, donde p' es el exponente conjugado de p , $1/p + 1/p' = 1$ y c_d denota una constante dimensional. Esta cota aparece al fijarse en las constantes que aparecen en la demostración del Teorema 1.7 que aparece, por ejemplo en [5].

Es un hecho conocido que M no es acotado en L^1 . De hecho Mf no tiene por qué ser integrable si f es integrable.

Uno de los objetivos de este documento es estudiar la acotación de este operador y sus generalizaciones en espacios de medida diferentes al usual. En concreto, nos interesan ciertas medidas absolutamente continuas, a las que se denominan pesos.

Definición 1.11. El operador maximal centrado es el operador M_c que a cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ le asigna la función dada por

$$M_c f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| dt,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q centrados en x .

Definición 1.12. Sea $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ una función positiva en casi todo punto. El operador maximal centrado con peso w es el operador M_c^w que a cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ le asigna la función dada por

$$M_c^w f(x) = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(t)| w(t) dt,$$

donde el supremo está tomado sobre todos los cubos con centro x , y $w(Q)$ denota la medida w de Q , es decir, $w(Q) = \int_Q w$.

Teorema 1.13. Sea $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Entonces el operador M_c^w es de tipo débil (1,1) con constante independiente de w , es decir,

$$w(\{x : M_c^w f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f|w,$$

con C independiente de w .

Para demostrar este resultado, utilizamos el teorema del recubrimiento de Besicovitch (véase [11]).

Teorema 1.14 (Besicovitch). Sea E un conjunto medible acotado en \mathbb{R}^d y $\mathcal{F} = \{Q(x, r(x))\}_{x \in E}$ un recubrimiento de E de manera que cada elemento de \mathcal{F} es un cubo centrado en un punto de E . Existe una constante c_d (que solo depende de la dimensión y no de \mathcal{F}) y existen c_d subfamilias de \mathcal{F} , A_1, \dots, A_{c_d} , cada una formada de cubos disjuntos, que cumplen $E \subset \cup_{i=1}^{c_d} \cup_{Q \in A_i} Q$.

Demostración del teorema 1.13. Como w define una medida regular, es suficiente comprobar que todo conjunto compacto $E \subset \{x : M_c^w f(x) > \lambda\}$ cumple $\lambda w(E) \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|w$. Para ello, cubrimos E con un recubrimiento del tipo que pide el teorema. Si $x \in E$, entonces $M_c^w f(x) > \lambda$, por lo que existe un cubo Q_x centrado en x tal que $\int_{Q_x} |f|w > w(Q_x)\lambda$. Así, obtenemos un recubrimiento \mathcal{F} de E . Por el teorema de Besicovitch, existen c_d familias A_j formadas de cubos disjuntos, cuya unión cubre todo E . Entonces, usando que los cubos de A_j son disjuntos en las igualdades tercera y quinta, observamos que

$$\begin{aligned} w(E) &\leq w\left(\bigcup_{j=1}^{c_d} \bigcup_{Q \in A_j} Q\right) \leq \sum_{j=1}^{c_d} w\left(\bigcup_{Q \in A_j} Q\right) = \sum_{j=1}^{c_d} \sum_{Q \in A_j} w(Q) \\ &\leq \sum_{j=1}^{c_d} \sum_{Q \in A_j} \frac{1}{\lambda} \int_Q |f|w = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{c_d} \int_{\cup_{Q \in A_j} Q} |f|w \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} |f|w = \frac{c_d}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f|w. \quad \square \end{aligned}$$

Como corolario de este teorema, deducimos que el operador con peso centrado M_c^w está acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, con norma que solo depende de p y de la dimensión n . Esto es por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz. M_c^w es acotado en L^∞ con norma uno, al igual que el operador estándar de Hardy-Littlewood.

El hecho de que la norma del operador maximal centrado con peso no depende del peso que elijamos es útil para demostrar desigualdades con peso, especialmente si necesitamos tener un control especial en las constantes que obtenemos en las cadenas de desigualdades.

Otro operador maximal que utilizaremos es el operador maximal logarítmico, definido de la siguiente manera.

Definición 1.15. Sea f una función localmente integrable en \mathbb{R}^d . La función

$$M_0 f(x) = \sup_Q \exp\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \log |f|\right) \chi_Q(x),$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos que contienen a x , es la función maximal logarítmica de f . El operador M_0 se llama operador maximal logarítmico.

Cuando trabajamos con el operador maximal logarítmico es útil la desigualdad aritmético-geométrica que viene ilustrada en el siguiente

Lema 1.16. Sea (X, μ) un espacio de probabilidad (es decir, $\mu(X) = 1$.) Entonces, para todo $p > 0$ se cumple

$$\exp\left(\int_X \log |f| d\mu\right) \leq \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La demostración del siguiente lema, que puede verse en [14], se basa en la desigualdad de Jensen y en la acotación del operador Maximal de Hardy-Littlewood.

Lema 1.17. *El operador maximal logarítmico satisface, para todo $1 < p < \infty$,*

$$\|M_0 f\|_{L^p} \leq c_d^{1/p} \|f\|_{L^p}.$$

1.3. Sistemas diádicos. Descomposición de Calderón-Zygmund

Definición 1.18. Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y $l > 0$. El cubo con vértice x y lado l es el conjunto

$$Q = \prod_{j=1}^d [x_j, x_j + l),$$

donde $x = (x_1, \dots, x_d)$. Al punto $x + (l/2, \dots, l/2)$ le llamaremos centro del cubo Q y lo denotaremos por c_Q . Si $l = 2^k$, con $k \in \mathbb{Z}$ llamaremos escala del cubo Q al número $k = \log_2 l$.

Sea $[0, 1)^d$ el cubo unidad en \mathbb{R}^d . Consideramos el conjunto \mathcal{Q}_0 formado por los cubos congruentes con $[0, 1)^n$ y que tienen vértices en \mathbb{Z}^n . Dilatando estos cubos por un factor de 2^k , con $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos la familia \mathcal{Q}_k , es decir, $\mathcal{Q}_k = \{2^k Q : Q \in \mathcal{Q}_0\}$. La familia estándar de cubos diádicos es la unión de todas las familias \mathcal{Q}_k . Claramente, el conjunto de cubos diádicos es numerable. Con esta construcción, se cumplen las siguientes afirmaciones:

- Todo $x \in \mathbb{R}^d$ está contenido en un único cubo de cada familia \mathcal{Q}_k .
- Dos cubos diádicos son disjuntos o uno está contenido dentro del otro.
- Cada cubo de \mathcal{Q}_k está contenido en un único cubo de \mathcal{Q}_{k+1} y contiene 2^n cubos de \mathcal{Q}_{k-1} .

Claramente, la elección del cubo unidad es arbitraria. Podríamos haber escogido cualquier otro cubo y mediante el mismo argumento habríamos obtenido otra familia distinta de cubos diádicos, pero con las mismas propiedades. En cualquier caso, cuando hagamos una elección de un sistema diádico diferente al estándar mencionaremos cuál es el cubo base.

El resultado que presentamos ahora explica la importancia de esta partición del espacio mediante cubos. Es un resultado muy útil en análisis, y lo utilizaremos numerosas veces en este documento. Esta descomposición apareció en el artículo de Calderón y Zygmund [2], quienes lo utilizaron acotar integrales singulares.

Teorema 1.19 (Descomposición de Calderón-Zygmund). *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ una función no negativa y $\lambda > 0$. Existe una sucesión de cubos diádicos $\{Q_j\}$ tal que*

- (i) $f(x) \leq \lambda$ c.t. $x \notin \cup_j Q_j$,
- (ii) $|\cup_j Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$,
- (iii) $\lambda < f_{Q_j} \leq 2^n \lambda$, para todo j , siendo $f_{Q_j} = \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f$.

Muchas veces, usaremos este teorema al probar desigualdades de tipo débil para ciertos operadores. Lo usual es dividir la función f en dos funciones b y g , y tratarlas por separado. En concreto, $f = b + g$ con $b = \sum_j b_j$, siendo $b_j(x) = (f(x) - f_{Q_j}) \chi_{Q_j}(x)$. Los nombres b y g vienen del inglés *bad* y *good*, que hacen referencia al comportamiento de ambas funciones.

Para demostrar el Teorema 1.19, utilizaremos el operador maximal diádico.

Definición 1.20. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. La esperanza condicional de f respecto a \mathcal{Q}_k es la función $E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} f_Q \chi_Q(x)$. La función maximal diádica de f , $M_d f$, es la función dada por

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|. \tag{1.1}$$

El operador M_d se llama el operador maximal diádico.

Es fácil ver que el operador maximal diádico está puntualmente acotado por el operador maximal de Hardy-Littlewood. Con este hecho y con el teorema de diferenciación de Lebesgue, se demuestra inmediatamente esta

Proposición 1.21.

- (i) M_d es de tipo $(1,1)$ -débil con constante $C = 1$.
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k f(x) = f(x)$ en casi todo punto si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración del Teorema 1.19. Haremos un argumento de parada. Si Q es un cubo diádico de la familia \mathcal{Q}_j en el que $\lambda < f_Q$ entonces,

$$\lambda < \frac{1}{|Q|} \int_Q f \leq \frac{1}{|Q|} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{2^{jd}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

de donde se deduce que $j \leq \frac{1}{d} \log_2(\|f\|_1/\lambda)$. Es decir, que el lado de Q no puede ser demasiado grande. Por ello, empezamos con los cubos de la familia \mathcal{Q}_k con k_0 el mayor número entero menor que $\frac{1}{d} \log_2(\|f\|_1/\lambda)$. Escogemos los cubos $Q \in \mathcal{Q}_{k_0}$ que cumplen $\lambda < f_Q$. En el siguiente paso, escogemos los cubos $Q \in \mathcal{Q}_{k_0-1}$ que no estén contenidos en un cubo que hayamos conseguido antes, y que cumplan la misma condición $\lambda < f_Q$. Repetimos este proceso para todo $j \leq k_0$. Así, conseguimos una familia numerable de cubos diádicos $\{Q_j\}$. Esta es la familia que buscábamos. Comprobemos ahora que cumple las condiciones que dice el teorema.

Sea $\Omega = \cup_j Q_j$. Entonces $E_k f(x) \leq \lambda$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y para casi todo $x \notin \Omega$. Por la segunda afirmación de la proposición anterior, es obvio entonces que $f(x) \leq \lambda$ para casi todo $x \notin \Omega$.

Por la construcción de los cubos que forman Ω , vemos que $\Omega = \{x : M_d f(x) > \lambda\}$. Como M_d es de tipo débil- $(1,1)$, concluimos que $|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$.

Si Q_j está en la descomposición, sea \tilde{Q}_j el cubo diádico de la generación anterior que lo contiene. Entonces \tilde{Q}_j no ha entrado en la descomposición. Tenemos la desigualdad $f_{Q_j} > \lambda$, por ser Q_j miembro de la descomposición. Por otro lado,

$$f_{Q_j} = \frac{|\tilde{Q}_j|}{|Q_j||\tilde{Q}_j|} \int_{Q_j} f \leq \frac{2^d}{|\tilde{Q}_j|} \int_{\tilde{Q}_j} f \leq 2^d \lambda,$$

donde hemos usado que $f \geq 0$ y que \tilde{Q}_j no había entrado en la descomposición. □

1.4. La clase de Schwartz y la transformada de Fourier.

Este es un tema conocido del análisis matemático, por lo que no entraremos en detalles en esta sección con ánimo de mantener la longitud de este documento razonable. Una exposición de este tema puede ser encontrado en los libros [5] o [12].

Definición 1.22. Sea f una función en \mathbb{R}^d . Diremos que f pertenece a la clase de Schwartz, y escribiremos $f \in \mathcal{S}$, si f es infinitamente diferenciable y para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, se tiene

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x) x^\beta| < \infty.$$

La clase de Schwartz \mathcal{S} es un espacio de Frechet, es decir, tiene una métrica inducida por una familia numerable de seminormas de tal modo que es completo. Al contener trivialmente al conjunto de funciones infinitamente derivables con soporte compacto, la clase de Schwartz es densa en todos los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p < \infty$.

Denotaremos por \mathcal{S}' al conjunto de funcionales lineales continuos sobre \mathcal{S} , y le llamaremos espacio de distribuciones temperadas. En este espacio consideraremos la topología débil-*, es decir una sucesión $\{T_k\}$ de distribuciones temperadas converge a T si para toda función $f \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = T(f).$$

Bajo ciertas hipótesis de integrabilidad, una función f puede definir una distribución temperada de la siguiente manera. Si $\phi \in \mathcal{S}$, definimos

$$T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)f(x)dx.$$

En este caso, identificaremos la función f con la distribución temperada T_f , diciendo que la distribución temperada es una función. Pero hay que tener claro que en realidad las distribuciones (temperadas o no) no son funciones, si no que hay veces en las que se representan mediante una función.

Definimos la convolución de una distribución temperada u con una función de la clase de Schwartz g como la distribución temperada

$$u * g(f) = u(\tilde{g} * f), \quad f \in \mathcal{S},$$

con $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Se cumple que $u * g$ es una función indefinidamente diferenciable que viene dada por

$$u * g(x) = u(g(x - \cdot)).$$

Definición 1.23. (Transformada de Fourier) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Definimos su transformada de Fourier, \hat{f} como la función

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

donde $x \cdot \xi$ denota el producto interior estándar.

Es fácil comprobar que la transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R}^d)$ es siempre continua. Pero no tiene por qué cumplirse $\hat{f} \in L^1$.

Por la densidad de la clase de Schwartz en L^2 , se puede definir la transformada de Fourier en L^2 y resulta que es de hecho una isometría en ese espacio.

Teorema 1.24 (Plancherel). Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se cumplen las siguientes igualdades.

- (i) $\int \hat{f}\hat{g} = \int f\bar{g}$.
- (ii) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Utilizando el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, podemos pues definir la Transformada de Fourier en L^p para $1 \leq p \leq 2$. También se puede definir la transformada de Fourier de distribuciones temperadas. Si $u \in \mathcal{S}'$, definimos su transformada de Fourier $\hat{u} \in \mathcal{S}'$ mediante

$$\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi}), \quad \phi \in (\mathcal{S}).$$

Con esta definición, la transformada de Fourier es continua en \mathcal{S}' .

1.5. El espacio BMO

El espacio BMO es un espacio de funciones que cumplen una cierta característica geométrica. Las siglas BMO provienen del inglés *Bounded Mean Oscillation*, oscilación media acotada. Esta clase de funciones fue descrita por John y Nirenberg en los años 60, en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales. Más tarde, Fefferman demostró una manera de identificar este espacio con el dual del espacio de Hardy H^1 , en el año 1971. Una exposición detallada sobre las propiedades de este espacio puede ser hallada en los libros [5], [10] o [12].

Definición 1.25. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. La función maximal aguda de f es la función

$$M^\# f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

donde el supremo se toma sobre los cubos que contienen a x . Al operador $M^\#$ le llamaremos operador maximal agudo. Si $M^\#f \in L^\infty$, diremos que f tiene oscilación media acotada y escribimos $f \in BMO$. Definimos también

$$\|f\|_* = \|M^\#f\|_\infty.$$

El espacio BMO es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_*$ si tomamos el cociente con las constantes, es decir, identificando dos funciones que difieren en una constante en casi todo punto. Este espacio lo denotaremos BMO también.

El operador maximal agudo se puede dominar puntualmente por el operador maximal de Hardy-Littlewood, es decir, existe una constante dimensional $c_d > 0$ tal que

$$M^\#f(x) \leq c_d Mf(x).$$

Proposición 1.26. *Se tiene la estimación en norma*

$$c_d \|f\|_* \leq \sup_Q \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - a| dx \leq C_d \|f\|_*,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos con lados paralelos a los ejes. También se tiene la estimación puntual

$$c_d M^\#f(x) \leq \sup_{Q \ni x} \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - a| dy \leq C_d M^\#f(x).$$

Capítulo 2

La clase de pesos A_p

Generalmente en Análisis Matemático se trabaja con operadores definidos sobre algún espacio L^p que satisfacen una desigualdad de tipo

$$\int |Tf(x)|^p dx \leq C \int |f(x)|^p dx.$$

Muchas veces, es interesante estudiar qué pasa cuando en vez de la medida de Lebesgue dx tenemos otra medida de tipo $w(x)dx$. En concreto, suele ser interesante caracterizar los pesos w para los que se mantiene la condición

$$\int |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int |f(x)|^p w(x) dx.$$

Este tipo de problemas surgen de manera natural en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales o en Análisis de Funciones Complejas, entre otros.

La clase de pesos que estudiamos en este capítulo, la clase A_p , fue descrita por Benjamin Muckenhoupt en el año 1972 en su artículo [21]. En el libro de García-Cuerva y Rubio de Francia [10] se encuentra una detallada exposición sobre la clase A_p .

2.1. La condición A_p

Sea $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ una función no negativa. Lo primero que nos preguntamos es qué condición tiene que cumplir w para que el operador maximal de Hardy-Littlewood satisfaga una desigualdad de tipo (p, p) -débil respecto de w , cuando $1 \leq p < \infty$. Es decir, queremos concretar qué condición es necesaria para que si $f \in L^p(w)$ y $\lambda > 0$,

$$w(\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int |f(x)|^p w(x) dx. \quad (2.1)$$

Supongamos que M satisface la desigualdad (2.1). Sea $f \geq 0$ y Q un cubo tal que $f_Q > 0$. Sea también λ un número positivo tal que $0 < \lambda < f_Q$. Así, $Q \subset \{x : M(f\chi_Q)(x) > \lambda\}$ y por tanto

$$w(Q) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx, \quad \forall 0 < \lambda < f_Q,$$

lo que implica

$$w(Q) (f_Q)^p \leq C \int_Q |f|^p w, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d). \quad (2.2)$$

Elegimos ahora $S \subset Q$ un subconjunto arbitrario, y $f = \chi_S$ para obtener

$$w(Q) \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^p \leq C w(S) \quad \forall S \subset Q. \quad (2.3)$$

De esta desigualdad deducimos que $w > 0$ en casi todo punto (a no ser que sea idénticamente nula) y que además $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, así que no hemos perdido generalidad al suponer al principio que w era localmente integrable.

En efecto, para ver que w es positiva: si $w = 0$ en A , con $|A| > 0$, elegimos $S = A \cap Q$ y obtenemos $w(Q) = 0$ para todo cubo Q que interseque a A . Así, $w = 0$ en casi todo punto de todo cubo que interseque a A y, cogiendo cubos cada vez más grandes, w se anula en casi todo punto de \mathbb{R}^d , luego w es idénticamente nula.

Para ver que w es localmente integrable, supongamos que no lo es. Entonces existe un cubo Q con $w(Q) = \infty$. Por la desigualdad de arriba, vemos que $w(S) = \infty$ para todo subconjunto S de Q . Como además $W(Q') = \infty$ para todo cubo Q' que contenga a Q , podemos deducir que $w(E) = \infty$ para todo conjunto E de medida de Lebesgue no nula. Por tanto, $w = \infty$ en casi todo punto de \mathbb{R}^d y desigualdades como (2.1) son triviales por lo que carecen de interés. Así que no perderemos generalidad suponiendo que w es localmente integrable.

Consideramos de manera separada los casos $p = 1$ y $p > 1$ porque resultan expresiones distintas respecto a la integrabilidad de w .

Caso $p = 1$. En este caso, si reordenamos la desigualdad obtenida, vemos que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \frac{w(S)}{|S|},$$

para todo subconjunto S de cualquier cubo Q . Sea $a = \text{ess inf}\{w(x) : x \in Q\} = \sup\{\lambda > 0 : |\{x : w(x) > \lambda\}| = 0\}$. Dado un $\varepsilon > 0$, existe $S_\varepsilon \subset Q$ tal que $|S_\varepsilon| > 0$ y $w(x) \leq a + \varepsilon$ para todo $x \in S_\varepsilon$. Obtenemos la desigualdad

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \frac{w(S_\varepsilon)}{|S_\varepsilon|} \leq C(a + \varepsilon) \frac{|S_\varepsilon|}{|S_\varepsilon|}.$$

Haciendo tender ε a cero, obtenemos $w(Q)/|Q| \leq C \text{ess inf}_Q w(x)$, o en otras palabras,

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq Cw(x) \quad \text{c.t. } x \in Q.$$

Caso $p > 1$. Escogemos $f = w^{\frac{1}{1-p}} \chi_Q$ en (2.2) para obtener

$$w(Q) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^p \leq C \int_Q w^{\frac{-1}{p-1}},$$

lo que es equivalente a

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C,$$

para todo cubo Q .

Los argumentos que hemos hecho justifican la siguiente

Definición 2.1. Sea $1 \leq p < \infty$. La clase de pesos A_p es el conjunto de $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ para los que existe una constante $C > 0$ tal que para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$,

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq Cw(x), \quad \text{c.t. } x \in Q, \quad \text{si } p = 1; \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C, \quad \text{si } 1 < p < \infty. \tag{2.5}$$

El ínfimo de tales constantes C se denota $[w]_{A_p}$ y se llama la constante A_p de w .

Lo primero que observamos es que A_p no es un espacio vectorial, al ser todas las funciones no negativas.

La condición (2.4) es equivalente a que la función maximal de Hardy-Littlewood Mw esté acotada puntualmente por w . Más precisamente, $w \in A_1$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.6)$$

En el caso especial de $p = 2$, la condición A_2 para un peso w es

$$[w]_{A_2} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-1} \right) < \infty.$$

Ejemplos 2.2.

- (i) La medida de Lebesgue, correspondiente a $w \equiv 1$ está en A_p para todo $1 \leq p < \infty$.
- (ii) Si $w \in L^\infty$, con $w^{-1} \in L^\infty$, entonces $w \in A_1$.
- (iii) $w(x) = |x|^r$ está en A_p si y sólo si $-d < r < d(p - 1)$.

En la siguiente proposición escribimos propiedades de los pesos de clase A_p que son consecuencia inmediata de la definición.

Proposición 2.3 (Propiedades de los pesos A_p). *Sea $1 \leq p < \infty$ y sea $w \in A_p$.*

- (i) *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Entonces $w_{x_0}(x) = w(x - x_0)$, el trasladado de w , sigue estando en A_p .*
- (ii) *Si $\lambda > 0$, $\lambda w \in A_p$.*
- (iii) *Si $w_\lambda(x) = w(\lambda x)$, $w_\lambda \in A_p$.*

Dentro de la prueba del Teorema 2.5 se demuestra el siguiente resultado que es importante y que merece la pena que sea enunciado como resultado independiente.

Lema 2.4. *Sea $w \in A_p$. La medida $w(x)dx$ es duplicadora en el sentido siguiente: para $\lambda > 1$ y Q cubo,*

$$w(\lambda Q) \leq \lambda^{dp} [w]_{A_p} w(Q),$$

donde λQ denota el cubo con mismo centro que Q y lado $l(\lambda Q) = \lambda l(Q)$.

Hemos definido la clase A_p de pesos como condición necesaria de que el operador maximal de Hardy-Littlewood sea de tipo (p, p) -débil. Pero resulta que es realmente una caracterización.

Teorema 2.5. *Sea $1 \leq p < \infty$. La desigualdad*

$$w(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int |f(x)|^p w(x) dx$$

se satisface para alguna $C > 0$ y toda $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ si y sólo si $w \in A_p$.

Demostración. Como hemos comentado antes de enunciar el teorema, la necesidad de la condición A_p viene garantizada por la discusión previa. Para ver la suficiencia, primero lo demostramos para el operador maximal centrado M_c . Separaremos los casos $p = 1$ y $p > 1$.

Caso $p = 1$. Supongamos que w satisface (2.6). Sean $\lambda > 0$ y $f \geq 0$. Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 1.19) del espacio a altura λ . Obtenemos una familia numerable de cubos disjuntos, $\{Q_j\}$ tales que

$$f(x) \leq \lambda \quad \text{c.t. } x \notin \bigcup_j Q_j = \Omega,$$

$$|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \int f,$$

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq 2^d \lambda.$$

Recordamos que, dado un cubo P , denotamos por $2P$ el cubo con el mismo centro y dos veces su lado. Veamos que se cumple la inclusión

$$\{x : M_c f(x) > 4^d \lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j = \Omega^*.$$

En efecto, si $x \notin \Omega^*$, escogemos Q un cubo arbitrario con centro en x , con lado $2^{k-1} \leq l(Q) < 2^k$. Entonces Q interseca a lo sumo a 2^d cubos del retículo diádico estándar de lado 2^k , digamos R_1, \dots, R_m (con $m \leq 2^d$). Como $x \notin \Omega^*$, tenemos que los R_i no pertenecen a la familia $\{Q_j\}$; por lo que

$$\frac{1}{|R_i|} \int_{R_i} f \leq \lambda.$$

Así, vemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_{Q \cap R_i} f \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \frac{2^{kd}}{|R_i|} \int_{R_i} f \leq m 2^d \lambda \leq 4^d \lambda,$$

por lo que $x \notin \{z : M_c f(z) > 4^d \lambda\}$. Con esto, podemos escribir la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} w(\{x : M_c f(x) > 4^d \lambda\}) &\leq \sum_j w(2Q_j) \leq \sum_j 2^d |Q_j| \frac{1}{|2Q_j|} \int_{2Q_j} w \\ &\leq \frac{2^d}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(y) \left(\frac{1}{|2Q_j|} \int_{2Q_j} w(x) dx \right) dy \leq \frac{2^d}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) M w(y) dy \\ &\leq C \frac{2^d}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) w(y) dy, \end{aligned}$$

donde hemos usado en la última desigualdad la condición A_1 de w .

Caso $p > 1$. Sea $w \in A_p$, es decir, supongamos que w satisface (2.5). Se tienen, pues, las desigualdades (2.2) y (2.3). En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \right)^p &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| w^{1/p} w^{-1/p} \right)^p \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^p w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^p w \right) [w]_{A_p} \frac{|Q|}{w(Q)} = \frac{[w]_{A_p}}{w(Q)} \int_Q |f|^p w, \end{aligned}$$

lo que prueba (2.2) y, tomando $f = \chi_S$, también (2.3). También queda probado el Lema 2.4 con este cálculo. En efecto, si $Q = 2S$, se tiene $|Q| = 2^d |S|$. Entonces tenemos

$$\left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^p \leq [w]_{A_p} \frac{w(S)}{w(Q)},$$

con lo que $w(Q) \leq 2^{dp} [w]_{A_p} w(S)$, lo que prueba el Lema 2.4.

Sea ahora $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, y supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si f no fuera integrable, tomamos $f_k = f \chi_{B(0,k)}$ y siguiendo la argumentación que haremos a continuación, obtendremos la desigualdad con constante independiente de k y al tomar el límite conseguiremos la misma desigualdad, aplicando el teorema de la convergencia monótona.

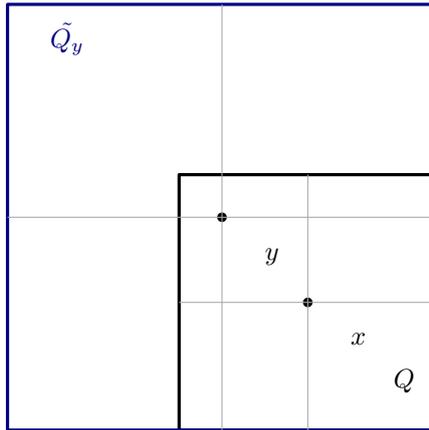


Figura 2.1: Esquema de la situación

Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a altura $\lambda 4^{-d}$. Obtenemos una colección de cubos disjuntos $\{Q_j\}$ con las propiedades

$$f(x) \leq 4^{-d}\lambda \text{ c.t. } x \notin \bigcup_j Q_j = \Omega,$$

$$|\Omega| \leq \frac{4^d}{\lambda} \int f,$$

$$\lambda < \frac{4^d}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq 2^d \lambda.$$

Análogamente al caso anterior, se tiene

$$\{x : M_c f(x) > \lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j,$$

donde $2Q$ denota el cubo de mismo centro y doble lado que Q . Entonces, usando (2.2),

$$\begin{aligned} w(\{x : M_c f(x) > \lambda\}) &\leq \sum_j w(2Q_j) \leq C 2^{dp} \sum_j w(Q_j) \\ &\leq C 2^{dp} \sum_j \left(\frac{1}{f_{Q_j}}\right)^p \int_{Q_j} |f|^p w \leq C 2^{dp} 4^{dp} \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w. \end{aligned}$$

Ahora que tenemos la desigualdad débil para el maximal centrado M_c , la deduciremos para el maximal no centrado M . Veamos que

$$\{x : M f(x) > \lambda\} \subset \{x : M_c f(x) > 2^{-d}\lambda\}.$$

Sea x un punto tal que $M_c f(x) > \lambda$. Entonces, existe un cubo Q con centro x que cumple $|f|_Q > \lambda$. Para cada $y \in Q$, tomamos \tilde{Q}_y el cubo con centro y y de lado minimal para que $Q \subset \tilde{Q}_y$. Entonces $l(\tilde{Q}_y) \leq 2l(Q)$, como está esquemáticamente en la Figura 2.1. Por tanto,

$$\frac{1}{|\tilde{Q}_y|} \int_{\tilde{Q}_y} |f| = \frac{|Q|}{|\tilde{Q}_y|} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \geq \frac{|Q|}{|\tilde{Q}_y|} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| > \frac{|Q|}{|\tilde{Q}_y|} \lambda \geq 2^{-d}\lambda,$$

lo que implica $M_c f(y) > 2^{-d}\lambda$. Ahora, sea y tal que $M f(y) > \lambda$. Existe un cubo Q que contiene a y y con centro x tal que $|f|_Q > \lambda$. Entonces, por la argumentación anterior, $M_c f(y) > 2^{-d}\lambda$. Así,

$$w(\{x : M f(x) > \lambda\}) \leq w(\{x : M_c f(x) > 2^{-d}\lambda\}) \leq C \frac{2^{pd}}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x) dx. \quad \square$$

Proposición 2.6. *Los pesos de A_p tienen las siguientes propiedades.*

- (i) $A_p \subset A_q$, si $p \leq q$;
- (ii) $w \in A_p \Leftrightarrow w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$;
- (iii) Si $w_0, w_1 \in A_1$, entonces $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$.

Demostración. Sea $w \in A_1$ y $q > 1$. Usando la condición (2.4),

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{q-1}} \right) \leq \text{ess sup}_Q w^{-1}(x) = (\text{ess inf}_Q w(x))^{-1} \leq C \frac{|Q|}{w(Q)}.$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{q-1}} \right)^{q-1} \leq C,$$

lo que implica que $w \in A_q$ por la condición (2.5).

Sea ahora $w \in A_p$ con $p > 1$ y sea $q > p$. Entonces $(q-1)/(p-1) > 1$. Aplicamos la desigualdad de Hölder para obtener

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{q-1}} \right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{q-1} \frac{q-1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{q-1}(q-1)} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{p-1},$$

lo que claramente implica que $w \in A_q$, al ser $w \in A_p$ y teniendo en cuenta la condición (2.5).

Sea ahora $w \in A_p$ y veamos que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$. Nótese que $-1/(p'-1) = -(p-1)$, así que $w^{-\frac{1}{p-1} \frac{p-1}{p'-1}} = w$. Entonces, elevando todo a la potencia $(p'-1)$, la condición (2.5) es equivalente a

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{p'-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right) \leq C,$$

ya que $(p-1)(p'-1) = 1$. Esto es a su vez equivalente a

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (w^{\frac{-1}{p-1}})^{-\frac{1}{p'-1}} \right)^{p'-1} \leq C,$$

que es precisamente la condición $A_{p'}$ para $w^{-\frac{1}{p-1}}$.

Sean ahora $w_0, w_1 \in A_1$. Tenemos que probar que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0 w_1^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0^{\frac{-1}{p-1}} w_1 \right)^{p-1} \leq C.$$

Como $w_j \in A_1$,

$$w_j(x)^{-1} \leq \sup_Q w_j^{-1} = \left(\inf_Q w_j \right)^{-1} \leq C_j \left(\frac{w_j(Q)}{|Q|} \right)^{-1}, \quad j = 0, 1.$$

Sustituimos en la expresión anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0 w_1^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0^{\frac{-1}{p-1}} w_1 \right)^{p-1} \\ & \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0 \left(C_1 \frac{w_1(Q)}{|Q|} \right)^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(C_0 \frac{w_0(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{-1}{p-1}} w_1 \right)^{p-1} \\ & = C \left(\frac{1}{|Q|^{2-p}} w_0(Q) w_1(Q)^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|Q|^{1+\frac{1}{1-p}}} w_0(Q)^{\frac{-1}{p-1}} w_1(Q) \right)^{p-1} = C. \quad \square \end{aligned}$$

2.2. La desigualdad de Hölder inversa

Como hemos comentado al inicio de este capítulo, si $w \in A_p$, el espacio $L^\infty(w)$ coincide con L^∞ respecto de la medida de Lebesgue con la misma norma. Esto es porque w es positiva en casi todo punto. Por tanto, el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en $L^\infty(w)$. Como también es de tipo débil (p, p) con respecto a la medida dw , podemos utilizar el teorema de interpolación de Marcinkiewicz para concluir que M es acotado en $L^q(w)$, para todo $q > p$. Esto prueba de una manera alternativa a la Proposición 2.6 el contenido

$$\bigcup_{p < q} A_p \subseteq A_q.$$

Nuestro siguiente objetivo es ver que esa inclusión es en realidad una igualdad. Para ello necesitamos el siguiente

Teorema 2.7 (Desigualdad de Hölder inversa). *Sean $p > 1$ y $w \in A_p$. Existen $C, \varepsilon > 0$ (que dependen de p y de w) tales que para todo cubo Q ,*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w.$$

Esta desigualdad tiene este nombre porque la desigualdad en sentido contrario es precisamente la desigualdad de Hölder con constante $C = 1$.

Lema 2.8. *Sea $w \in A_p$. Para cada $\alpha < 1$, existe un $\beta < 1$ tal que si Q es un cubo y $S \subset Q$, con $|S| \leq \alpha|Q|$, entonces $w(S) \leq \beta w(Q)$.*

Demostración. Si en la desigualdad (2.3) sustituimos S por $Q \setminus S$, obtenemos la desigualdad

$$w(Q) \left(1 - \frac{|S|}{|Q|} \right)^p \leq C(w(Q) - w(S))$$

Reordenando los términos y utilizando la hipótesis vemos

$$w(S) \leq \left(\left(\frac{|Q| - |S|}{|Q|} \right)^p - C \right) \frac{-1}{C} w(Q) \leq \frac{C - (1 - \alpha)^p}{C} w(Q).$$

Eligiendo $\beta = 1 - (1 - \alpha)^p/C$, el resultado es cierto. \square

Demostración. [Demostración del teorema 2.7] Fijamos un cubo Q . Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de la función w en Q , a alturas $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots$. Fijaremos la sucesión más adelante. Obtenemos para cada $k \geq 0$ una familia diádica de cubos $\{Q_{k,j}\}$, con las siguientes propiedades

- $w(x) \leq \lambda_k$, si $x \notin \Omega_k = \bigcup_j Q_{k,j}$,
- $\lambda_k < \frac{1}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} w \leq 2^d \lambda_k$,
- $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, al ser $\lambda_k < \lambda_{k+1}$.

Fijamos un cubo Q_{k,j_0} de Ω_k , y nos damos cuenta de que $Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}$ será la unión de ciertos cubos de Ω_{k+1} . Sean tales cubos $\{Q_{k+1,i} : i \in I\}$. Así, $Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1} = \bigcup_{i \in I} Q_{k+1,i}$ y se tiene

$$|Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}| = \sum_{i \in I} |Q_{k+1,i}| < \frac{1}{\lambda_{k+1}} \sum_{i \in I} \int_{Q_{k+1,i}} w \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k,j_0}} w \leq \frac{2^d \lambda_k}{\lambda_{k+1}} |Q_{k,j_0}|.$$

Queremos usar el Lema 2.8. Para ello, como aún no hemos precisado la sucesión $\{\lambda_k\}$, tomamos

$$\frac{2^d \lambda_k}{\lambda_{k+1}} = \alpha,$$

formando así una sucesión geométrica de razón $2^d \alpha^{-1}$, para algún $\alpha < 1$ aún por determinar. Entonces el lema implica que existe $\beta < 1$ tal que $w(Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}) \leq \beta$. Si sumamos sobre todos los cubos que forman Ω_k obtenemos la desigualdad $w(\Omega_{k+1}) \leq \beta w(\Omega_k)$. Esto implica directamente que $w(\Omega_k) \leq \beta^k w(\Omega_0)$. Realizamos el siguiente cálculo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q \setminus \Omega_0} w^{1+\varepsilon} + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}} w^{1+\varepsilon} \\ &\leq \frac{\lambda_0^\varepsilon}{|Q|} \int_{Q \setminus \Omega_0} w + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}} \lambda_{k+1}^\varepsilon w \\ &\leq \lambda_0^\varepsilon \frac{w(Q)}{|Q|} + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^d}{\alpha}\right)^{(k+1)\varepsilon} \lambda_0^\varepsilon w(\Omega_k) \\ &\leq \lambda_0^\varepsilon \left[\frac{w(Q)}{|Q|} + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^d}{\alpha}\right)^{(k+1)\varepsilon} \beta^k w(\Omega_0) \right] \\ &\leq \left[1 + \frac{2^d}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{d\varepsilon}}{\alpha^\varepsilon} \beta\right)^k \right] \lambda_0^\varepsilon \frac{w(Q)}{|Q|}. \end{aligned}$$

Podemos elegir $\varepsilon > 0$ para que la serie numérica converja, es decir para que $(2^d \alpha^{-1})^\varepsilon \beta < 1$. La elección de α puede ser arbitraria siempre que $0 < \alpha < 1$. Con esta elección de ε , que sólo depende en α, β, d y no en el cubo elegido, basta escoger $\lambda_0 = w(Q)/|Q|$ para que la demostración quede finalizada. \square

Observación 2.9. Si $w \in A_p$ y ε es el exponente que nos da el teorema anterior, la desigualdad de Hölder inversa será cierta para todo exponente $\eta < \varepsilon$.

Corolario 2.10.

- (i) $A_q = \cup_{p < q} A_p$, $1 < q < \infty$.
- (ii) Si $w \in A_p$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w^{1+\varepsilon} \in A_p$.
- (iii) Si $w \in A_p$, existen $C, \delta > 0$ tal que si Q es un cubo y $S \subset Q$, entonces

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta.$$

Demostración. Veamos primero el primer enunciado. Sea $w \in A_q$, lo que implica por la Proposición 2.6 $w^{\frac{-1}{q-1}} \in A_{q'}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1+\varepsilon}{q-1}} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{q-1}},$$

para todo cubo Q con constante $C > 0$ independiente del cubo. Sea ahora $p > 1$ tal que

$$\frac{1}{p-1} = \frac{1+\varepsilon}{q-1}.$$

Claramente, $p < q$. Veamos que $w \in A_p$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{p-1} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1+\varepsilon}{q-1}} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{q-1}} \\ & \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{-1}{q-1}} \right)^{q-1}, \end{aligned}$$

lo que está uniformemente acotado al ser $w \in A_q$.

La segunda afirmación es cierta de manera trivial si tomamos ε el que nos da la desigualdad de Hölder inversa.

Para la tercera afirmación, sea $S \subset Q$. Si tomamos ε el dado por la desigualdad de Hölder inversa, obtenemos

$$w(S) = \int_Q \chi_S w \leq \left(\int_Q w^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} |S|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \leq Cw(Q) \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Hölder (la estándar) en la segunda desigualdad. Despejando, obtenemos lo desado con $\delta = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$. \square

A continuación damos una caracterización de los pesos A_1 que, junto con la Proposición 2.6 nos permitirá construir pesos en las clases A_p .

Teorema 2.11 (Caracterización de los pesos A_1).

- (i) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ con $Mf(x) < \infty$ en casi todo punto y $0 \leq \delta < 1$. Entonces $w = (Mf)^\delta$ es un peso de la clase A_1 con constante $[w]_{A_1}$ independiente de f .
- (ii) Sea $w \in A_1$. Entonces existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\delta < 1$ y $k \in L^\infty$ con $k^{-1} \in L^\infty$ tales que $w(x) = k(x)(Mf(x))^\delta$.

Demostración. Para probar el primer apartado, tenemos que probar para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$ y para casi todo $x \in Q$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q (Mf)^\delta \leq C(Mf(x))^\delta,$$

con constante $C > 0$ independiente de f , Q y x . Sea $2Q$ el cubo con mismo centro y lado dos veces mayor que Q . Escribimos $f_1 = f\chi_{2Q}$, $f_2 = f - f_1$. Como M es sublineal y $0 < \delta < 1$,

$$(Mf)^\delta \leq (Mf_1)^\delta + (Mf_2)^\delta.$$

Al ser M (1,1)-débil, utilizamos el lema de Kolmogorov 1.6 para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q (Mf_1)^\delta & \leq \frac{1}{|Q|} C(\delta) |Q|^{1-\delta} \|f_1\|_1^\delta \\ & \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_{2Q} |f| \right)^\delta \leq 2^{d\delta} C(Mf(x))^\delta. \end{aligned}$$

Así, queda acotada la parte de f_1 . Para acotar la otra parte argumentamos como sigue. Para $y \in Q$, sea R un cubo que contenga a y tal que $\int_R |f_2| \neq 0$. Como $y \in R$ y f_2 está soportada en $(2Q)^c$, R tendrá que tener lado al menos mayor que la mitad del lado de Q , es decir, $l(R) \geq \frac{1}{2}l(Q)$. Para cierta constante $c_d > 0$, (por ejemplo, $c_d = 100^d$) se cumplirá $x \in c_d R$. Así,

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f_2| \leq \frac{1}{|R|} \int_{c_d R} |f| \leq CMf(x).$$

Por tanto, $Mf_2(y) \leq CMf(x)$ para todo $y \in Q$. Tomando la potencia d y la media sobre Q , concluimos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q (Mf_2)^\delta \leq C(Mf(x))^\delta,$$

lo que prueba el primer apartado del teorema.

Sea ahora $w \in A_1$. Entonces w satisface una desigualdad de Hölder inversa, es decir, existen $\varepsilon > 0$, $C > 0$ tales que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w.$$

Es decir, $(M(w^{1+\varepsilon})(x))^{-1-\varepsilon} \leq CMw(x) \leq Cw(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, siendo la última desigualdad porque $w \in A_1$. Además, es claro que $M(w^{1+\varepsilon})(x) \geq w(x)^{1+\varepsilon}$, con lo que escogemos $f = w^{1+\varepsilon}$, $\delta = (1 + \varepsilon)^{-1}$ y $k = w(Mf)^{-\delta}$. Claramente, $w = k(Mf^\delta)$, $f \in L_{loc}^1$ y $k, k^{-1} \in L^\infty$. \square

2.3. La clase A_∞

El Corolario 2.10 sugiere que definamos una nueva clase de pesos, la clase A_∞ como la clase de funciones localmente integrables w que cumplan la condición (iii) de dicho Corolario.

Definición 2.12. Sea w una función localmente integrable en \mathbb{R}^d y positiva en casi todo punto. Diremos que $w \in A_\infty$ si existen $C, \delta > 0$ tal que para todo cubo Q y todo subconjunto $A \subset Q$ se cumpla

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta.$$

De esta manera, el Corolario 2.10 nos dice que

$$\bigcup_{p < \infty} A_p \subseteq A_\infty.$$

Observación 2.13. Si $w \in A_\infty$, entonces $w(x)dx$ es una medida duplicadora en el sentido del Lema 2.4. Este hecho tiene la misma demostración que para el caso $p < \infty$ ya que sólo utiliza la condición A_∞ . Así, podremos hacer una descomposición de tipo Calderón-Zygmund respecto de la medida $w(x)dx$, de manera análoga al Teorema 1.19.

Lema 2.14. Sea w un peso que cumple una desigualdad de Hölder inversa, es decir, existen $\varepsilon > 0$, $C > 0$ tales que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q w,$$

para todo cubo Q . Entonces $w \in A_\infty$.

Demostración. Utilizamos la desigualdad de Hölder con exponentes $1 + \varepsilon$ y $(1 + \varepsilon)/\varepsilon$ para obtener

$$\begin{aligned} w(S) &= \int_S w(x)dx \leq |S|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\int_S w(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\ &= |Q|^{\frac{1}{1+\varepsilon}} |S|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_S w(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(x)dx |Q|^{\frac{1}{1+\varepsilon}} |S|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} = Cw(Q) \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis en la última línea. Claramente, esto prueba que $w \in A_\infty$ con exponente $\delta = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$. \square

Con el siguiente resultado probaremos que en realidad $A_\infty = \bigcup_{p < \infty} A_p$.

Teorema 2.15. Sea $w \in A_\infty$. Existe $p > 1$ tal que $w \in A_p$.

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 2.7 Sea Q un cubo de \mathbb{R}^d . Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de la función w^{-1} a alturas λ_k respecto de la medida $w(x)dx$, para cierta sucesión $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$. Esto produce, para cada $k \geq 0$, sucesiones de cubos $\{Q_{k,j}\}_j$ tales que

$$\lambda_k \leq \frac{1}{w(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} w^{-1}w \leq C\lambda_k, \quad w^{-1}(x) \leq \lambda_k, \quad \forall x \notin \Omega_k = \cup_j Q_{k,j}.$$

Al igual que en la demostración del teorema 2.7, $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ y $Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}$ es la unión de ciertos cubos de Ω_{k+1} , digamos que $\{Q_{k+1,r}\}_r$. Entonces

$$\begin{aligned} w(Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}) &\leq \sum_r w(Q_{k+1,r}) \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \sum_r \int_{Q_{k+1,r}} w^{-1}w \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k,j_0}} w^{-1}w \leq \frac{C\lambda_k}{\lambda_{k+1}} w(Q_{k,j_0}). \end{aligned}$$

Sumando sobre j_0 , obtenemos

$$w(\Omega_k + 1) \leq \frac{C\lambda_k}{\lambda_{k+1}} w(\Omega_{k+1}).$$

Elegimos $\alpha < 1$ para que $C\lambda_k/\lambda_{k+1} = \alpha$, con lo que $\lambda_k = \alpha^k \lambda_0$. Elegimos $\lambda_0 = |Q|/w(Q)$. Haciendo un cálculo análogo al de la demostración del Teorema 2.7, llegamos a

$$\frac{1}{w(Q)} \int_Q (w^{-1})^{1+\varepsilon} w \leq K \left(\frac{|Q|}{w(Q)} \right)^{1+\varepsilon}.$$

Reordenando los factores, vemos que es equivalente a

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^\varepsilon \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \leq K,$$

que es precisamente la condición A_p para $p = (\varepsilon + 1)/\varepsilon$. \square

Introducimos a continuación una constante análoga a la constante A_p que nos permitirá trabajar con los pesos en A_∞ .

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(w\chi_Q) dx, \quad (2.7)$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos con lados paralelos a los ejes de coordenadas y M representa el operador maximal diádico respecto de Q .

El nombre de la constante $[w]_{A_\infty}$ viene justificado porque $w \in A_\infty$ si y sólo si $[w]_{A_\infty} < \infty$. Una de las implicaciones la demostraremos a continuación y la otra en la siguiente sección. Por lo que parece, no hay consenso en lo que es la constante A_∞ de forma canónica, pero en los artículos que desarrollaremos en el capítulo 4 defienden el uso de esta constante, así que trabajaremos con esta.

Si $w \in A_\infty$, $w \in A_p$ para cierto $p < \infty$ y, por la desigualdad de Hölder inversa del Teorema 2.7, existen $K > 0$ y $r = 1 + \varepsilon > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{K}{|Q|} \int_Q w.$$

Entonces, utilizando la desigualdad de Hölder habitual y que la norma de M en L^r está acotada por $c_d r'$, tenemos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q M(w\chi_Q) \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q M(w\chi_Q)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c_d r' \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c_d K^{\frac{1}{r}} r' \frac{1}{|Q|} \int_Q w,$$

con lo que $[w]_{A_\infty} \leq c_d r' K < \infty$.

Proposición 2.16. $[w]_{A_\infty} \leq c_d [w]_{A_p}$, si $w \in A_\infty$ y $p < \infty$.

Demostración. Introduzcamos la constante $[w]'_{A_\infty}$ que puede ser entendida como el límite cuando p tiende a infinito de $[w]_{A_p}$.

$$[w]'_{A_\infty} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \exp \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \log w^{-1} \right),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos con lados paralelos a los ejes. Si utilizamos la desigualdad del Lema 1.16, vemos que

$$[w]'_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$$

para todo $p > 1$. Veamos para concluir esta demostración que $[w]_{A_\infty} \leq c_d [w]'_{A_\infty}$. Sea Q un cubo y $x \in Q$. Se cumple que

$$M(w\chi_Q)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|R|} \int_R w : x \in R, R \text{ cubo t.q. } R \subset Q \right\}.$$

Tenemos, por cómo hemos definido $[w]'_{A_\infty}$, la desigualdad

$$\frac{1}{|R|} \int_R w \leq [w]'_{A_\infty} \exp \left(\frac{1}{|R|} \int_R \log w \right).$$

Ahora tomamos el supremo sobre todos los cubos R contenidos en Q y que contienen a x para obtener

$$M(w\chi_Q)(x) \leq [w]'_{A_\infty} M_0(w\chi_Q)(x),$$

para todo $x \in Q$, donde M_0 es el operador

$$M_0 f(x) = \sup_{E \ni x} \exp \left(\frac{1}{|E|} \int_E \log f \right)$$

definido en la sección 1.2. Ahora tomamos la integral sobre Q y aplicamos el Lema 1.17 en la siguiente cadena de desigualdades para obtener

$$\int_Q M(w\chi_Q) \leq [w]'_{A_\infty} \int_Q M_0(w\chi_Q) \leq [w]'_{A_\infty} c_d \int_Q w = c_d [w]'_{A_\infty} w(Q);$$

lo que prueba que $[w]_{A_\infty} \leq c_d [w]'_{A_\infty}$ tomando ahora el supremos sobre todos los cubos Q . Queda demostrada la proposición. \square

Nota 2.17. La constante que hemos denotado $[w]'_{A_\infty}$ es generalmente más utilizada que la constante denotada por $[w]_{A_\infty}$ para referirse a los pesos de A_∞ . Hemos optado por utilizar esta última constante porque es más pequeña que la otra y permita probar resultados más precisos, aunque sea más difícil tratar con ella.

En la siguiente subsección veremos que en realidad $[w]_{A_\infty} < \infty$ si y solo si $w \in A_\infty$.

2.3.1. Una cuantificación de la desigualdad inversa de Hölder

En esta sección damos un versión cuantificada de la desigualdad inversa de Hölder para pesos en A_∞ , con lo que controlaremos el exponente que aparece y también la constante positiva. Como es habitual, necesitaremos un lema previo.

Lema 2.18. Sea $w \in A_\infty$ y Q un cubo de \mathbb{R}^d . Si $0 < \varepsilon \leq 1/(2^{d+1}[w]_{A_\infty})$, entonces

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q (M_d(\chi_Q w)(x))^{1+\varepsilon} dx \leq 2[w]_{A_\infty} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right)^{1+\varepsilon},$$

donde M_d denota en este lema el operador maximal respectivo al sistema diádico generado por Q .

Demostración. Para $\lambda > 0$, ponemos $\Omega_\lambda = \{x : M_d(\chi_Q w)(x) > \lambda\} \cap Q$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_Q (M_d(\chi_Q w)(x))^{1+\varepsilon} dx &= \int_Q (M_d(\chi_Q w)(x))^\varepsilon M_d(\chi_Q w)(x) dx = \int_0^\infty \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} M_d(\chi_Q w)(\Omega_\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{w_Q} \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} M_d(\chi_Q w)(Q) d\lambda + \int_{w_Q}^\infty \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} M_d(\chi_Q w)(\Omega_\lambda) d\lambda \\ &= w_Q^\varepsilon [w]_{A_\infty} w(Q) + \int_{w_Q}^\infty \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} M_d(\chi_Q w)(\Omega_\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

ya que $\Omega_\lambda = Q$ si $\lambda < w_Q$. Hagamos ahora la descomposición de Calderón-Zygmund respectiva al sistema diádico generado por Q de w a altura λ , para λ fijo. Obtenemos una sucesión de cubos diádicos a Q , $\{Q_j\}$, maximales respecto a la propiedad

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} w > \lambda, \quad (2.8)$$

de manera que el antecesor \tilde{Q}_j de cada cubo Q_j no cumple la desigualdad. Es más, todo cubo que entra en la descomposición tendrá antecesor contenido en Q ya que $\lambda > w_Q$ implica que Q no entra en la descomposición. Además, $\Omega_\lambda = \cup_j Q_j$ y los Q_j son disjuntos dos a dos. En particular, $M_d(\chi_Q w)(\Omega_\lambda) = \sum_j \int_{Q_j} M_d(\chi_Q w)$. Si Q_j entra en la descomposición, podemos calcular el maximal diádico de w localizado en Q_j , es decir,

$$\int_{Q_j} M_d(w\chi_Q) = \int_{Q_j} M_d(w\chi_{Q_j}),$$

utilizando la maximalidad de Q_j . Entonces,

$$\int_{Q_j} M_d(\chi_Q w) \leq \int_{Q_j} M(\chi_{Q_j} w) \leq [w]_{A_\infty} w(Q_j) \leq [w]_{A_\infty} w(\tilde{Q}_j) \leq [w]_{A_\infty} \lambda |\tilde{Q}_j| \leq [w]_{A_\infty} \lambda 2^d |Q_j|,$$

ya que \tilde{Q}_j es el antecesor de Q_j en el sistema diádico de Q y por tanto no cumple la condición (2.8). Sumando sobre todos los cubos $\{Q_j\}$, obtenemos

$$M_d(\chi_Q w)(\Omega_\lambda) \leq \lambda 2^d [w]_{A_\infty} |\Omega_\lambda|.$$

Volviendo a a ecuación de antes,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{w_Q}^\infty \lambda^{\varepsilon-1} M_d(\chi_Q w)(\Omega_\lambda) d\lambda &\leq \varepsilon 2^d [w]_{A_\infty} \int_{w_Q}^\infty \lambda^\varepsilon |\Omega_\lambda| d\lambda \leq \varepsilon 2^d [w]_{A_\infty} \int_0^\infty (1+\varepsilon) \lambda^\varepsilon |\Omega_\lambda| d\lambda \\ &\leq \varepsilon 2^d [w]_{A_\infty} \int_Q (M_d(\chi_Q w))^{1+\varepsilon} dx \leq \frac{1}{2} \int_Q (M_d w)^{1+\varepsilon} dx, \end{aligned}$$

usando la hipótesis sobre ε . Así,

$$\int_Q (M_d(\chi_Q w)(x))^{1+\varepsilon} dx \leq w_Q^\varepsilon [w]_{A_\infty} w(Q) + \frac{1}{2} \int_Q (M_d(\chi_Q w)(x))^{1+\varepsilon} dx.$$

Pasando el segundo sumando al primer término y dividiendo por $|Q|$, obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{1}{|Q|} \int_Q (M_d(\chi_Q w)(x))^{1+\varepsilon} dx \leq w_Q^{1+\varepsilon} [w]_{A_\infty},$$

que es precisamente el resultado deseado. \square

Teorema 2.19. Sean $w \in A_\infty$ y $0 < \varepsilon < 1/(2^d[w]_\infty)$. Para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$ se cumple

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} \leq 2 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{1+\varepsilon}. \quad (2.9)$$

Demostración. Utilizaremos una estrategia similar a la del lema. Sea $\Omega_\lambda = \{x : M_d(\chi_Q w)(x) > \lambda\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_Q w^{1+\varepsilon} dx &\leq \int_Q (M_d(\chi_Q w))^\varepsilon w dx = \int_0^\infty \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} w(\Omega_\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{w_Q} \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} w(\Omega_\lambda) d\lambda + \int_{w_Q}^\infty \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} w(\Omega_\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Como en el lema, si $\lambda < w_Q$, entonces $\Omega_\lambda = Q$. Por tanto, el primer sumando resulta ser

$$\int_0^{w_Q} \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} w(\Omega_\lambda) d\lambda = w(Q) \int_0^{w_Q} \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} d\lambda = w(Q) (w_Q)^\varepsilon = \frac{w(Q)^{1+\varepsilon}}{|Q|^\varepsilon}.$$

Para el segundo sumando, hacemos la descomposición de Calderón-Zygmundo de w a altura λ en el sistema diádico generado por Q . Si $\lambda > w_Q$, entonces Q no entra en la descomposición por lo que todo cubo de la descomposición tiene predecesor. Obtenemos una sucesión de cubos disjuntos $\{Q_j\}$ tales que

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} w > \lambda,$$

de manera que el antecesor $2Q_j$ de cada cubo Q_j no cumple la desigualdad y $\Omega_\lambda = \cup_j Q_j$. Entonces,

$$w(Q_j) \leq w(\tilde{Q}_j) \leq \lambda |\tilde{Q}_j| = \lambda 2^d |Q_j|.$$

Por tanto, $w(\Omega_\lambda) \leq \lambda 2^d |\Omega_\lambda|$. Así, acotamos el segundo sumando por

$$\int_{w_Q}^\infty \varepsilon \lambda^{\varepsilon-1} w(\Omega_\lambda) d\lambda \leq 2^d \int_{w_Q}^\infty \varepsilon \lambda^\varepsilon |\Omega_\lambda| d\lambda \leq \varepsilon 2^d \int_0^\infty (1+\varepsilon) \lambda^\varepsilon |\Omega_\lambda| d\lambda = \varepsilon 2^d \int_Q (M_d(\chi_Q w))^{1+\varepsilon}.$$

Recopilando todo y dividiendo por $|Q|$ para hacer el promedio obtenemos, utilizando el Lema 2.18,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} &\leq \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{1+\varepsilon} + \varepsilon 2^d \frac{1}{|Q|} \int_Q (M_d(\chi_Q w))^{1+\varepsilon} \\ &\leq \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{1+\varepsilon} + \varepsilon 2^{d+1} [w]_{A_\infty} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{1+\varepsilon} \leq 2 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{1+\varepsilon}. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 2.20. $w \in A_\infty$ si y sólo si $[w]_{A_\infty} < \infty$.

Demostración. Sea $w \in A_\infty$. Como consecuencia del Teorema 2.15, $w \in A_p$ para algún p finito. Entonces w satisface una desigualdad inversa de Hölder y, por el comentario hecho después de la demostración del Teorema 2.15, $[w]_{A_\infty} < \infty$.

Sea ahora w un peso tal que $[w]_{A_\infty} < \infty$. Entonces w satisface una desigualdad de Hölder inversa por el Teorema 2.19 y por el Lema 2.14, vemos que $w \in A_\infty$. \square

2.3.2. Otras constantes para pesos en A_p

Definición 2.21. Sea $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$. Definimos

$$(w)_{A_p} = \max\{[w]_{A_\infty}, [w^{1-p'}]_{A_\infty}\}, \quad (2.10)$$

$$\{w\}_{A_p} = [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \max\{[w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}}, [w^{1-p'}]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}}\}. \quad (2.11)$$

Como sabemos $[w]_{A_p}^{1/p} = [w^{1-p'}]_{A_{p'}}^{1/p'}$ y, por la Proposición 2.16, $[w]_{A_\infty} \leq c_d[w]_{A_p}$, tenemos que

$$(w)_{A_p} \leq c_d\{w\}_{A_p} \leq c'_d[w]_{A_p}^{\max\{1, \frac{1}{p-1}\}}. \quad (2.12)$$

Utilizando el Teorema 2.19 y las constantes aquí definidas, podemos obtener ciertas desigualdades de tipo Hölder inverso para estas constantes que luego emplearemos para obtener desigualdades con peso para integrales singulares. Este trabajo se hace con el fin de obtener cierto control en la dependencia en los pesos que aparecen en dichas desigualdades. Si no estuviéramos interesados en mejorar esta dependencia, el trabajo sería bastante más sencillo.

Corolario 2.22. *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Para $0 < \delta < 2^{-d}/(w)_{A_p}$, se tiene que $w^{1+\delta} \in A_p$ y*

$$[w^{1+\delta}]_{A_p} \leq 4[w]_{A_p}^{1+\delta}.$$

Demostración. Primero, nos fijamos en que $(1-p)(1-p') = 1$. Entonces $(w)_{A_p} = (w^{1-p'})_{A_{p'}}$. También tenemos

$$\frac{1}{(w)_{A_p}} = \frac{1}{(w^{1-p'})_{A_{p'}}} = \min \left\{ \frac{1}{[w]_{A_\infty}}, \frac{1}{[w^{1-p'}]_{A_\infty}} \right\}.$$

Estamos en posición de aplicar el Teorema 2.19 con exponente $1 + \delta$ tanto a w como a $w^{1-p'}$. Para todo cubo Q ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta} &\leq 2 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{1+\delta}, \\ \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{(1-p')(1+\delta)} \right)^{1-p} &\leq \left(2 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{1+\delta} \right)^{1-p}, \end{aligned}$$

donde hemos elevado la segunda desigualdad a la potencia $1-p$. Si multiplicamos ambas desigualdades, obtenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{(1-p')(1+\delta)} \right)^{1-p} \leq 2^{2-p} \left(\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{1-p} \right)^{1+\delta}.$$

Tomando el supremo sobre todos los cubos, obtenemos precisamente

$$[w^{1+\delta}]_{A_p} \leq 2^{2-p}[w]_{A_p}^{1+\delta} \leq 4[w]_{A_p}^{1+\delta}. \quad \square$$

Corolario 2.23. *Sea $w \in A_\infty$ y $0 < \delta \leq 2^{-d}/[w]_{A_\infty}$. Entonces $w^{1+\frac{\delta}{2}} \in A_\infty$ y*

$$[w^{1+\frac{\delta}{2}}]_{A_\infty} \leq c_d[w]_{A_\infty}^{1+\frac{\delta}{2}}.$$

Demostración. Ponemos $\delta_0 = 2^{-d}/[w]_{A_\infty}$. Utilizamos la desigualdad de Hölder inversa del Teorema 2.19 con exponente $1 + \delta_0$. Sea $\delta \leq \delta_0$. Para todo cubo Q ,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q (w^{1+\frac{\delta}{2}})^{\frac{1+\delta_0}{1+\delta/2}} \leq 2 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\frac{\delta}{2}} \right)^{\frac{1+\delta_0}{1+\delta/2}}.$$

Es decir, $w^{1+\frac{\delta}{2}}$ satisface una desigualdad inversa de Hölder con exponente

$$r = \frac{1 + \delta_0}{1 + \frac{\delta}{2}}.$$

Por tanto $w^{1+\frac{\delta}{2}} \in A_\infty$ con

$$[w^{1+\frac{\delta}{2}}]_{A_\infty} \leq 2C_d \frac{r}{r-1} = c_d \frac{1 + \delta_0}{\delta_0 - \frac{\delta}{2}} \leq c_d \frac{1}{\delta_0} \leq c_d[w]_{A_\infty} \leq c_d[w]_{A_\infty}^{1+\frac{\delta}{2}}. \quad \square$$

Corolario 2.24. Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Para $0 < \delta \leq 2^{-d}/(w)_{A_p}$, $w^{1+\frac{1}{\delta}} \in A_p$ y

$$(w^{1+\frac{1}{\delta}})_{A_p} \leq c_d(w)_{A_p}^{1+\frac{1}{\delta}}; \quad \{w^{1+\frac{1}{\delta}}\}_{A_p} \leq c_d\{w\}_{A_p}^{1+\frac{1}{\delta}}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de los dos corolarios anteriores y de (2.11) y (2.10). \square

Capítulo 3

Integrales singulares

Un operador integral singular es un operador T que admite una representación del tipo

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y)dy,$$

donde la función K tiene cierta singularidad en la diagonal $\{(x, y) : x = y\}$. En este capítulo estudiaremos dos tipos clásicos de integrales singulares: integrales singulares *rough* y operadores de Calderon-Zygmund.

Las integrales singulares *rough* son operadores de convolución. Tienen un núcleo homogéneo de grado $-d$ que no tiene, en principio, ninguna regularidad. Por ello es más difícil trabajar con ellas. Los operadores de Calderón-Zygmund pueden ser de tipo convolución o no, pero el núcleo sí que tiene cierta regularidad. En concreto, los considerados en este documento tienen núcleo con regularidad de tipo Dini.

3.1. La transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert es el operador de tipo integral singular más sencillo que no sea trivial. En esta sección entenderemos bien qué propiedades tiene este operador para emplear más adelante técnicas parecidas a operadores en dimensión mayor.

Como en este documento estamos interesados en integrales singulares, estudiaremos este operador exclusivamente desde ese punto de vista. Pero sería injusto no mencionar que este operador está íntimamente relacionado con el análisis complejo: también se conoce como el operador función conjugada porque transforma una función real en \mathbb{R} en el valor en la frontera de la función armónica conjugada de su extensión armónica al plano superior.

Definición 3.1. La transformada de Hilbert es el operador H , definido por el momento para funciones de \mathcal{S} mediante

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy. \quad (3.1)$$

El factor de $1/\pi$ aparece para que sea una isometría en L^2 , como veremos más adelante.

La transformada de Hilbert está bien definida para funciones de \mathcal{S} por la expresión

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y| < 1} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{|y| > 1} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

En efecto, utilizamos que la función $1/y$ es impar para escribir

$$\begin{aligned} Hf(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |y| < 1} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{|y| > 1} \frac{f(x-y)}{y} dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| < 1} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} \chi_{|y| > \varepsilon}(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_{|y| > 1} \frac{f(x-y)}{y} dy \end{aligned}$$

Ahora, podemos utilizar el teorema de la convergencia dominada ya que, por el teorema del valor medio,

$$\frac{|f(x-y) - f(x)|}{|y|} \chi_{|y|>\varepsilon}(y) \leq \|f'\|_\infty,$$

lo que es integrable en $[-1, 1]$ al ser $f \in \mathcal{S}$. Así, obtenemos la expresión

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y|<1} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{|y|>1} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

La transformada de Hilbert se puede definir con la misma definición para toda función Lipschitz que decaiga suficientemente rápido, y la misma fórmula que hemos obtenido ahora servirá si $\|f'\|_\infty < \infty$.

La transformada de Hilbert coincide en \mathcal{S} con la convolución con la distribución temperada $W_p = \frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x}$. Calculemos la transformada de Fourier de esta distribución. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} \hat{W}_0(\varphi) &= W_0(\hat{\varphi}) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} e^{-2\pi i x \xi} \frac{d\xi}{\xi} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) (-i) \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} \sin(2\pi x \xi) \frac{d\xi}{\xi} dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) dx, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $|\int_a^b \sin(x) \frac{dx}{x}|$ está uniformemente acotado para cualesquiera valores de a y b para utilizar el teorema de Fubini y el de la convergencia dominada de Lebesgue. En particular, vemos que \hat{W}_0 es una función acotada de módulo 1 en casi todo punto:

$$\hat{W}_0(\xi) = -i \text{sign } \xi.$$

Este cálculo nos permite definir la transformada de Hilbert para toda función de $L^2(\mathbb{R})$ mediante el multiplicador de Fourier $m(\xi) = -i \text{sign } \xi$ de la siguiente manera. Para $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$Hf(x) = (-i \text{sign}(\cdot) \hat{f}(\cdot))^\sim(x).$$

Como el multiplicador tiene módulo constante 1, utilizando el teorema de Plancherel para la transformada de Fourier se tiene la siguiente

Proposición 3.2. *La transformada de Hilbert en L^2 tiene las siguientes propiedades.*

- (i) $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$,
- (ii) $HHf = -f$,
- (iii) $\int gHf = -\int fHg$, si f, g son reales.

Además, se puede probar que si $b \in L^2$ tiene soporte compacto, entonces

$$Hb(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{b(x-y)}{y} dy, \quad \text{c.t. } x \notin \text{sop}(b). \quad (3.2)$$

El principal resultado de esta sección, es el siguiente teorema debido a Kolmogorov.

Teorema 3.3. *El operador H se puede extender a L^1 y se tiene para toda $f \in nL^1(\mathbb{R})$ la desigualdad*

$$|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1,$$

para todo $\lambda > 0$, con C independiente de f . Es decir, H es de tipo débil (1,1).

Demostración. Primero demostramos la desigualdad débil para $f \in \mathcal{S}$ con $f \geq 0$. Sea $\lambda > 0$. Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de \mathbb{R} a altura λ . Obtenemos una sucesión de intervalos $\{I_j\}$ que cumplen

(i) $f(x) \leq \lambda$ para casi todo $x \notin \Omega = \cup_j I_j$,

(ii) $|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$.

(iii) $\lambda < f_{I_j} \leq 2\lambda$, donde $f_E = \frac{1}{|E|} \int_E f$.

Como comentamos en el Capítulo 1, dividimos f en dos, $f = g + b$, con $b(x) = \sum_j b_j(x)$,

$$b_j(x) = (f(x) - f_{I_j})\chi_{I_j}(x).$$

Por las propiedades de los intervalos obtenidos en la descomposición, es claro que $g \leq 2\lambda$ en casi todo punto, y que cada b_j está soportada en I_j con media nula. Además, $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Separamos el conjunto que queremos acotar en dos:

$$\{x : |Hf(x)| > \lambda\} \leq |\{x : |Hg(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x : |Hb(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|. \quad (3.3)$$

Para acotar el primer sumando, usamos que H es una isometría en L^2 . Se tiene

$$\begin{aligned} |\{x : |Hg(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| &= \int_{\{x : |Hg(x)| > \frac{\lambda}{2}\}} dx \leq \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} |Hg(x)|^2 dx = \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} g(x)^2 dx \\ &\leq \frac{8}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \frac{8}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{8}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Sólo falta acotar el segundo sumando de (3.3). Para simplificar la notación, llamaremos $2I_j$ al intervalo con mismo centro que I_j pero con doble lado, y $\Omega^* = \cup_j 2I_j$. Claramente, $|\Omega^*| \leq 2|\Omega|$, y la igualdad no tiene por qué cumplirse al no ser $2I_j$ disjuntos en general. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} |\{x : |Hb(x)| > \lambda/2\}| &\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \int_{\Omega^{*c}} |Hb(x)| dx. \end{aligned}$$

Queremos ver que $|Hb(x)| \leq \sum |Hb_j(x)|$. Si la suma fuera finita, es evidentemente cierto. Si la suma es infinita, también es cierto pero el argumento es más complejo. Como b está soportada en Ω y $|b(x)| \leq 2\|f\|_{\infty}$, se deduce que $b \in L^2(\mathbb{R})$. Ahora, $b = \sum_j b_j$ en $L^2(\mathbb{R})$ ya que

$$\int_{\Omega} \left| \sum_{j=0}^{j_0} b_j(x) - b(x) \right|^2 = \int_{\cup_{j_0}^{\infty} I_j} |b(x)|^2,$$

que tiende a cero si j_0 tiende a infinito. Así, $Hb = \sum_j Hb_j$ en L^2 , luego existe una sucesión $\{j_k\}$ tal que

$$Hb(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{j_k} Hb_j(x)$$

en casi todo punto. De aquí, se deduce que $|Hb(x)| \leq \sum |Hb_j(x)|$ en casi todo punto. Utilizando esto y el hecho de que, como $2I_j \subset \Omega^*$, $\Omega^{*c} \subset 2I_j^c$, tenemos

$$\int_{\Omega^{*c}} |Hb(x)| \leq \sum_j \int_{2I_j^c} |Hb_j|.$$

Utilizando la representación de Hb_j , y que b_j tiene media nula en I_j , vemos que

$$\begin{aligned} \int_{2I_j^c} |Hb_j(x)| dx &= \int_{2I_j^c} \left| \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y} dy \right| dx = \int_{2I_j^c} \left| \int_{I_j} b_j(y) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j} \right) dy \right| dx \\ &\leq \int_{I_j} |b_j(y)| \int_{2I_j^c} \frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|} dx dy \leq \int_{I_j} |b_j(y)| \int_{2I_j^c} \frac{|I_j|/2}{|x-c_j|^2/2} = 2 \int_{I_j} |b_j(u)| dy, \end{aligned}$$

donde c_j indica el punto medio del intervalo I_j . Así, tenemos

$$\sum_j \int_{2I_j^c} |Hb_j(x)| dx \leq 2 \sum_j \int_{I_j} |b_j(y)| dy \leq 4 \|f\|_1,$$

ya que $\|b\|_1 = \sum_j \int_{I_j} |b_j| \leq 2 \|f\|_1$.

Ahora, si $f \in \mathcal{S}$ no es necesariamente positiva, tomamos su parte imaginaria y real, y sus respectivas partes positivas y negativas y les aplicamos el mismo procedimiento para obtener la desigualdad débil (aunque no sean funciones de Schwartz, son de Lipschitz y funciona el mismo argumento). Ya tenemos la desigualdad para funciones de la clase de Schwartz.

Para una $f \in L^1(\mathbb{R})$ general, definimos Hf tomando $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de Schwartz que tiendan a f en norma de L^1 y definimos $Hf = \lim_n Hf_n$. Esto en realidad converge en medida y no depende de la sucesión f_n elegida. En efecto, Hf_n es de Cauchy en medida. al ser

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} |\{x : |(Hf_n - Hf_m)(x)| > \varepsilon\}| = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$ al ser $\{f_n\}$ de Cauchy en L^1 y utilizando la desigualdad débil para funciones de Schwartz. Así, Hf_n converge en medida a cierta función medible Hf . Sea $\{g_n\}$ otra sucesión de funciones de \mathcal{S} que converge a f en la norma L^1 . Entonces

$$|\{x : |Hf_n(x) - Hg_n(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f_n - g_n\|_1,$$

lo que tiende a cero si n tiende a infinito. Esto muestra que H está bien definida en L^1 y que además cumple la desigualdad de tipo débil. \square

Teorema 3.4. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $f \in L^p(\mathbb{R})$. Hf está bien definida y*

$$\|Hf\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Demostración. Como H es acotada en L^2 y es de tipo débil (1,1), por el Teorema 1.7 de interpolación de Marcinkiewicz, será acotada en L^p para $1 < p \leq 2$. Para ver el caso $p > 2$ utilizamos el argumento de dualidad junto con la Proposición 3.2. Si $p > 2$, $p' < 2$. Sea $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ con $\|g\|_{p'} = 1$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) Hf(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) Hg(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |Hg(x)| dx \leq \|f\|_p \|Hg\|_{p'} \leq C \|g\|_{p'} \|f\|_p = C \|f\|_p,$$

lo que prueba, tomando el supremo sobre todas las funciones g descritas, que $\|Hf\|_p \leq C \|f\|_p$. \square

3.2. Integrales Singulares de tipo rough

En esta sección presentamos unos operadores integrales singulares que en cierta manera generalizan la transformada de Hilbert vista en la sección anterior a dimensiones mayores. Concretamente, estudiamos operadores de la forma

$$T_{\Omega} f(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} f(x-y) dy, \quad (3.4)$$

donde $y' = y/|y|$ y Ω es una función definida en la esfera unidad \mathbb{S}^{n-1} , integrable en la esfera y de media nula. Si no hay confusión posible acerca de cuál es el núcleo Ω , omitiremos el subíndice, denotando por T el operador. El valor principal de (3.4) ha de interpretarse como

$$T_{\Omega}f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} f(x-y) dy.$$

Antes de nada, tenemos que justificar que estos operadores están bien definidos. En un primer lugar, se definen para funciones de la clase de Schwartz \mathcal{S} . Si $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \varphi(x-y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < 1} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \varphi(x-y) dy + \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \varphi(x-y) dy.$$

El segundo sumando del segundo término está bien definido porque φ decae suficientemente rápido al ser una función de Schwartz. Para el primer sumando, utilizamos que Ω tiene media nula para escribir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < 1} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \varphi(x-y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < 1} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} (\varphi(x-y) - \varphi(x)) dy.$$

Queremos utilizar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Para ello, utilizando que φ satisface una condición de Lipschitz, dominamos los integrandos por

$$\frac{|\Omega(y')|}{|y|^d} |\varphi(x-y) - \varphi(x)| \chi_{\varepsilon < |y| < 1}(y) \leq C \frac{|\Omega(y')|}{|y|^d} ||y| = C \frac{|\Omega(y')|}{|y|^{d-1}}.$$

Esta función es integrable en la bola unidad:

$$\int_{|y|<1} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^{d-1}} dy = \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\Omega(\omega)| d\omega dr = \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Estos cálculos justifican la expresión de T para $\phi \in \mathcal{S}$ como

$$T\varphi(x) = \int_{|y|<1} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} (\varphi(x-y) - \varphi(x)) dy + \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \varphi(x-y) dy. \quad (3.5)$$

La expresión (3.5) es válida también para funciones uniformemente Lipschitz que decaigan suficientemente rápido en el infinito. Para definir T sobre funciones de los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$ necesitaremos demostrar unos resultados sobre la acotación en la norma de esos espacios para funciones de la clase \mathcal{S} y luego utilizaremos un argumento de densidad, tal y como hicimos para la transformada de Hilbert.

Realmente es necesario que Ω tenga media nula en la esfera; si no fuera así, el operador no estaría definido para funciones de \mathcal{S} . Para ver esto, sea $f \in \mathcal{S}$ con $f(x) = 1$ para todo $|x| < 2$. Entonces, el primer sumando del segundo término de (3.5) es

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{\Omega(\omega)}{r} d\omega dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon}) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(\omega) d\omega,$$

que sólo está acotado (y de hecho vale cero) cuando Ω tiene media nula.

Por esta razón, en \mathbb{R} sólo hay esencialmente un operador de este tipo, ya que \mathbb{S}^0 tiene sólo dos puntos, 1 y -1. Si Ω ha de tener media nula, debe ser par, así que será un múltiplo de $\Omega(\pm 1) = \pm 1$. Este operador es la transformada de Hilbert que hemos estudiado en la sección anterior.

3.2.1. Transformada de Fourier de una distribución *rough*

Para $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$, tenemos la distribución temperada

$$\mathcal{T}_{\Omega}(\psi) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Omega(x')}{|x|^d} \psi(x) dx, \quad \psi \in \mathcal{S}.$$

Si no hay duda de cuál es la función Ω , omitiremos el subíndice y escribiremos simplemente \mathcal{T} , en vez de \mathcal{T}_Ω . Entonces la integral singular *rough* asociada a Ω es $T_\Omega f = \mathcal{T}_\Omega * f$, para $f \in \mathcal{S}$. Como estamos haciendo análisis de Fourier, nos interesa calcular la transformada de Fourier de la distribución temperada \mathcal{T}_Ω .

Definición 3.5. Diremos que una distribución T es homogénea de grado a si para toda función test φ se tiene $T(\varphi_\lambda) = \lambda^a T\varphi$, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aquí, $\varphi_\lambda(x) = \lambda^{-d}\varphi(\lambda x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

Si la distribución coincide con una función, entonces el concepto de ser distribución homogénea es el mismo que el de ser función homogénea. La distribución \mathcal{T}_Ω asociada a una integral singular *rough* es homogénea de grado $-d$.

Proposición 3.6. Sea T una distribución temperada homogénea de grado a . Entonces su transformada de Fourier, \hat{T} , es una distribución temperada homogénea de grado $-d - a$.

Demostración. Sean $\psi \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\hat{T}(\psi_\lambda) = T((\psi_\lambda)^\wedge) = T(\psi(\lambda^{-1}\cdot)) = \lambda^{-d}T((\hat{\psi})_{\lambda^{-1}}) = \lambda^{-d-a}T(\hat{\psi}) = \lambda^{-d-a}\hat{T}(\psi). \quad \square$$

Teorema 3.7. Sea $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ de media nula. La transformada de Fourier de la distribución \mathcal{T}_Ω es la función homogénea de grado cero dada por

$$m(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left[\log \frac{1}{|u \cdot \xi'|} - i \frac{\pi}{2} \text{sign}(u \cdot \xi') \right] d\sigma(u).$$

Demostración. Como \mathcal{T} es homogénea de grado d , por la Proposición 3.6, sabemos que m será homogénea de grado 0. Por tanto, para calcular $m(\xi)$, podemos suponer que $|\xi| = 1$, tomando $\xi/|\xi|$ en vez de ξ .

$$\begin{aligned} m(\xi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < y < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-2\pi r u \cdot \xi} \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left(\int_{\varepsilon}^1 (e^{-2\pi r u \cdot \xi} - 1) \frac{dr}{r} + \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-2\pi r u \cdot \xi} \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u) = I_1 + iI_2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que Ω tiene media nula, e I_1, I_2 denotan la parte real e imaginaria de la expresión, es decir,

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left(\int_{\varepsilon}^1 (\cos(2\pi r u \cdot \xi) - 1) \frac{dr}{r} + \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \cos(2\pi r u \cdot \xi) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u),$$

$$I_2 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r u \cdot \xi) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u).$$

Procedemos primero con I_2 . Para $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ fijo, hacemos el cambio de variable $s = 2\pi r |u \cdot \xi|$ para obtener

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r u \cdot \xi) \frac{dr}{r} = \int_{2\pi\varepsilon|u \cdot \xi|}^{\frac{2\pi}{\varepsilon}|u \cdot \xi|} \sin(s) \text{sign}(u \cdot \xi) \frac{ds}{s} = \text{sign}(u \cdot \xi) \int_{2\pi\varepsilon|u \cdot \xi|}^{\frac{2\pi}{\varepsilon}|u \cdot \xi|} \frac{\sin(s)}{s} ds,$$

lo que tiende a $\text{sign}(u \cdot \xi) \int_0^\infty \sin s/s = \frac{\pi}{2} \text{sign}(u \cdot \xi)$, cuando ε tiende a cero. Por otro lado, para I_1 obtenemos tras hacer el mismo cambio de variable,

$$\begin{aligned} \int_{2\pi|u \cdot \xi|\varepsilon}^{2\pi|u \cdot \xi|} (\cos s - 1) \frac{ds}{s} + \int_{2\pi|u \cdot \xi|}^{2\pi|u \cdot \xi|\frac{1}{\varepsilon}} \cos s \frac{ds}{s} &= \int_{2\pi|u \cdot \xi|\varepsilon}^{2\pi|u \cdot \xi|\frac{1}{\varepsilon}} \cos s \frac{ds}{s} - \int_{2\pi|u \cdot \xi|\varepsilon}^{2\pi|u \cdot \xi|} \frac{ds}{s} \\ &= \int_{2\pi|u \cdot \xi|\varepsilon}^1 (\cos s - 1) \frac{ds}{s} + \int_1^{2\pi|u \cdot \xi|\frac{1}{\varepsilon}} \cos s \frac{ds}{s} - \int_1^{2\pi|u \cdot \xi|} \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Si ahora tomamos el límite cuando ε tiende a cero, la expresión de arriba tiende a

$$\int_0^1 (\cos s - 1) \frac{ds}{s} + \int_1^\infty \cos s \frac{ds}{s} - \log 2\pi - \log |u \cdot \xi|.$$

El único sumando de esta última expresión que depende de u es el último, luego el resto no sobreviven cuando los integramos contra Ω en \mathbb{S}^{d-1} , por la media nula de Ω .

Podemos intercambiar el límite con la integral en las expresiones de I_1 e I_2 por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Entonces,

$$m(\xi) = I_1 - iI_2 = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left(-\log |u \cdot \xi| - i\frac{\pi}{2} \text{sign}(u \cdot \xi) \right) d\sigma(u). \quad \square$$

Observación 3.8. La transformada de Fourier de \mathcal{T}_Ω viene dada por dos sumandos. El primer sumando viene multiplicado por un factor par, por lo que no aportará nada si Ω es impar. El segundo viene multiplicado por un factor impar, por lo que se anulará si Ω es par.

Dada una función Ω en \mathbb{S}^{d-1} general, podemos definir sus partes par e impar,

$$\Omega_p(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) + \Omega(-u)), \quad \Omega_i(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) - \Omega(-u)),$$

respectivamente. Entonces $\Omega = \Omega_p + \Omega_i$. Finalmente,

$$m(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega_p(u) \log \frac{1}{|u \cdot \xi'|} d\sigma(u) - i\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega_i(u) \text{sign}(u \cdot \xi') d\sigma(u).$$

Hecha esta observación, y teniendo en cuenta que $\log |u \cdot \xi'| \in L^p(\mathbb{S}^{d-1})$ para $p > 1$, es claro el siguiente

Corolario 3.9. Sea Ω una función en \mathbb{S}^{d-1} con media nula. Si $\Omega_p \in L^q(\mathbb{S}^{d-1})$ para cierto $q > 1$ y $\Omega_i \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$, entonces m es una función acotada.

3.2.2. Método de rotaciones

El último corolario de la sección anterior nos sugiere que las funciones impares en la esfera y con media nula necesitan menos condiciones de integrabilidad para definir integrales singulares *rough* con mejores propiedades de integrabilidad o acotación. En esta sección, demostraremos que si el núcleo es una función impar en $L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ con media nula, la integral singular *rough* (3.4) está acotada en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p < \infty$.

La idea del método de rotaciones es, partiendo de un operador unidimensional en $L^p(\mathbb{R})$ y una función angular Ω en la esfera \mathbb{S}^{d-1} , definir un operador en $L^p(\mathbb{R}^d)$. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y T un operador $T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ acotado con norma C_p . Si $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ es un vector unitario, definimos el operador direccional T_u de la siguiente manera. Todo $x \in \mathbb{R}^d$ se escribe de manera única como $x = \bar{x} - \lambda u$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \perp u$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, ponemos

$$T_u f(x) := T(f(\bar{x} - \cdot u))(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Con esta definición, T_u es acotado en L^p :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |T_u f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |T(f(\bar{x} - \cdot u))(\lambda)|^p d\lambda d\bar{x} \\ &\leq C_p^p \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(\bar{x} - \cdot u)(\lambda)|^p d\lambda d\bar{x} = C_p^p \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

En particular, T_u tiene norma uniformemente acotada por la norma de T en L^p para todo $u \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Los dos ejemplos más significativos en este contexto de operadores direccionales son el operador de Hardy-Littlewood direccional y la transformada de Hilbert direccional. Como su nombre sugiere,

son los operadores que obtenemos al emplear el procedimiento precedente a los operadores de Hardy-Littlewood y a la transformada de Hilbert en \mathbb{R} respectivamente. Concretamente, para $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, el operador maximal de Hardy-Littlewood direccional (centrado) es

$$M_u f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(x-tu)| dt,$$

y la transformada de Hilbert direccional es

$$H_u f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t|>\varepsilon} f(x-tu) \frac{dt}{t}.$$

La siguiente proposición ilustra el método de rotaciones, que permite pasar de un operador unidimensional a uno en el espacio euclídeo mediante una función definida en la esfera unidad.

Proposición 3.10. *Sea $T : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ acotado con norma C_p , T_u los operadores direccionales y $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$. Entonces el operador*

$$T_\Omega f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) T_u f(x) dx$$

está acotado el $L^p(\mathbb{R}^d)$ con norma acotada por $C_p \|\Omega\|_1$.

Demostración. Por la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |T_\Omega f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) T_u f(x) d\sigma(u) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\Omega(u)|^p |T_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} d\sigma(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\Omega(u)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |T_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} d\sigma(u) \\ &\leq C_p \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\Omega(u)| \|f\|_p d\sigma(u) = C_p \|\Omega\|_1 \|f\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

Como hemos comentado, estamos interesados en aplicar este método a las integrales singulares *rough*. Para ello utilizaremos la transformada de Hilbert direccional. Este es un truco que sólo funciona si la función Ω , además de tener media nula en la esfera, es impar. Bajo estas hipótesis,

$$\begin{aligned} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} f(x-y) dy &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \int_\varepsilon^\infty f(x-ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{\Omega(u) - \Omega(-u)}{2} \int_\varepsilon^\infty f(x-ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \int_\varepsilon^\infty f(x-ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(-u) \int_\varepsilon^\infty f(x-ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \int_\varepsilon^\infty f(x-ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \int_\varepsilon^\infty f(x+ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left(\int_\varepsilon^\infty f(x-ru) \frac{dr}{r} + \int_\varepsilon^\infty f(x+ru) \frac{dr}{r} \right) d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \int_{|t|>\varepsilon} f(x-tu) \frac{dt}{t} d\sigma(u). \end{aligned}$$

Si tomamos el límite, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} f(x-y) dy &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} f(x-tu) \frac{dt}{t} \right) d\sigma(u) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega(u) H_u f(x) d\sigma(u). \end{aligned}$$

Como la transformada de Hilbert está acotada en $L^p(\mathbb{R})$, si $1 < p < \infty$, concluimos que las integrales singulares *rough* con núcleo impar (además de integrable y con media nula) también están acotadas en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con norma acotada por $\|H\|_p \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}$.

Corolario 3.11. *Sea $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ una función impar y con media nula. Entonces el operador T_Ω definido por (3.4) es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p < \infty$.*

Ejemplo 3.12. *Las transformadas de Riesz. Estos operadores son la generalización más directa de la transformada de Hilbert a \mathbb{R}^d . En dimensión d hay precisamente d operadores conocidos como transformadas de Riesz. Si $j = 1, \dots, d$, la j -ésima transformada de Riesz es el operador R_j definido por*

$$R_j f(x) = \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \pi^{-\frac{d+1}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{d+1}} f(x-y) dy. \quad (3.6)$$

La constante está elegida de tal manera que las transformadas de Riesz vienen dadas por multiplicadores de Fourier:

$$(R_j(f))^\wedge(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi),$$

Esto muestra que

$$\sum_{j=1}^d R_j^2 = -I \quad (3.7)$$

y que las transformadas de Riesz conmutan con traslaciones.

Observación 3.13. Las transformadas de Riesz R_j , $j = 1, \dots, d$ están acotadas en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p < \infty$, al tener núcleo impar acotado en \mathbb{S}^{d-1} .

3.2.3. Cuando el método de rotaciones falla

Cuando la función Ω es par, no sirve el truco de representar el operador T_Ω mediante rotaciones de transformadas de Hilbert. El truco consiste ahora en emplear las transformadas de Riesz y la identidad (3.7) para escribir

$$T_\Omega = - \sum_{j=1}^d R_j^2 T_\Omega = - \sum_{j=1}^d R_j (R_j T_\Omega).$$

Como T_Ω tiene núcleo par y R_j impar, es esperable que la composición tenga núcleo impar en cierto modo. El objetivo de esta sección es formalizar esta idea intuitiva.

Sea $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{d-1})$, con $q > 1$, par y de media nula. Definimos, para $\varepsilon > 0$, el núcleo truncado

$$K_\varepsilon(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^d} \chi_{|x| > \varepsilon}.$$

Si f es una función indefinidamente derivable de soporte compacto, veamos que $R_j(K_\varepsilon * f) = (R_j K_\varepsilon) * f$. Primero vemos que $K_\varepsilon \in L^r(\mathbb{R}^d)$ si $1 \leq r \leq q$. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(x)|^r dx = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\Omega(u)|^r \int_\varepsilon^\infty \frac{t^{d-1}}{t^{dr}} dt d\sigma(u) = \|\Omega\|_{L^r(\mathbb{S}^{d-1})}^r \int_\varepsilon^\infty t^{d(1-r)-1} dt < \infty.$$

Por tanto, podemos tomar la transformada de Fourier de K_ε . Así,

$$(R_j(K_\varepsilon * f))^\wedge(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{K}_\varepsilon(\xi) \hat{f}(\xi),$$

lo que coincide con

$$((R_j K_\varepsilon) * f)^\wedge(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{K}_\varepsilon(\xi) \hat{f}(\xi),$$

por lo que debe ser $R_j(K_\varepsilon * f) = (R_j K_\varepsilon) * f$.

Veamos ahora que existe una función \tilde{K}_j impar y homogénea de grado $-d$ tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_j K_\varepsilon = \tilde{K}_j$ uniformemente sobre todo compacto que no contenga al origen.

Primero veremos que $R_j K_\varepsilon(x)$ es de Cauchy uniformemente en $\{|x| > a\}$ para todo $a > 0$. Sean $x \neq 0$ y $0 < \varepsilon < \eta < \frac{|x|}{2}$.

$$\begin{aligned} R_j K_\varepsilon(x) - R_j K_\eta(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} c_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{d+1}} \chi_{|x-y|>\delta} (K_\varepsilon(y) - K_\eta(y)) dy \\ &= c_d \int_{\varepsilon < |y| < \eta} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{d+1}} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} dy = c_d \int_{\varepsilon < |y| < \eta} \left(\frac{x_j - y_j}{|x - y|^{d+1}} - \frac{x_j}{|x|^{d+1}} \right) \frac{\Omega(y')}{|y|^d} dy, \end{aligned}$$

donde hemos usado que Ω tiene media nula. Tomando el valor absoluto y utilizando el teorema del valor medio, podemos obtener la desigualdad

$$|R_j K_\varepsilon(x) - R_j K_\eta(x)| \leq \frac{C}{|x|^{d+1}} \int_{\varepsilon < |y| < \eta} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^d} dy \leq C \frac{\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}}{|x|^{d+1}} \eta.$$

Claramente, esto muestra que $\{R_j K_\varepsilon(x)\}$ es una sucesión de Cauchy uniformemente sobre $\{|x| > a\}$ para todo $a > 0$ en casi todo punto. Escribimos

$$K_j^*(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_j K_\varepsilon(x),$$

que está definido en casi todo punto. Además, como K_ε es par, $R_j K_\varepsilon$ es impar, luego K_j^* será impar en casi todo punto, es decir, $K_j^*(-x) = -K_j^*(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Veamos que es homogénea. Sea $\lambda > 0$. Para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} (R_j K_\varepsilon)(\lambda x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} c_d \int_{|\lambda x - y| > \delta} \frac{\lambda x_j - y_j}{|\lambda x - y|^{d+1}} K_\varepsilon(y) dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} c_d \int_{|x - y| > \delta/\lambda} \lambda^{-d} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{d+1}} K_{\varepsilon/\lambda}(y) dy = \lambda^{-d} R_j K_{\varepsilon/\lambda}(x). \end{aligned}$$

Tomando el límite, observamos entonces que $K_j^*(\lambda x) = \lambda^{-d} K_j^*(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. El problema es que el conjunto de medida nula en que no hay igualdad depende de λ . Aun así, utilizando el teorema de Fubini, observamos que

$$|\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty) : K_j^*(\lambda x) \neq \lambda^{-d} K_j^*(x)\}| = \int_0^\infty |\{x \in \mathbb{R}^d : K_j^*(\lambda x) \neq \lambda^{-d} K_j^*(x)\}| d\lambda = 0,$$

ya que la medida de los conjuntos que aparece dentro de la segunda integral es nula para todo $\lambda > 0$. Por tanto, el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^d : |\{\lambda \in (0, \infty) : K_j^*(\lambda x) \neq \lambda^{-d} K_j^*(x)\}| > 0\}$ es un conjunto de medida nula. Entonces existirá una esfera S_ρ centrada en el origen y de radio ρ tal que $m_{d-1}(S_\rho \cap D) = 0$ (aquí m_{d-1} denota la medida de Lebesgue $d-1$ dimensional). De hecho, casi todas las esferas centradas en el origen cumplen esa condición al ser

$$0 = m_d(D) = \int_0^\infty m_{d-1}(S_R \cap D) dR.$$

Finalmente, definimos \tilde{K}_j mediante la expresión

$$\tilde{K}_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^d K_j^*\left(\rho\frac{x}{|x|}\right), & \text{si } x \neq 0 \text{ y } \rho\frac{x}{|x|} \notin S_\rho \cap D \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, \tilde{K}_j es homogénea de grado $-d$, impar y se cumple $\tilde{K}_j(x) = K_j^*(x)$ en casi todo punto.

Lema 3.14. \tilde{K}_j verifica las siguientes estimaciones.

- (i) $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\tilde{K}_j(x')| d\sigma(x') \leq C_q \|\Omega\|_q.$
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^d} |R_j K_\varepsilon(x) - \tilde{K}_j(x) \chi_{|x|>\varepsilon}| \leq C_q \|\Omega\|_q.$

Demostración. Empecemos por la primera estimación. Como \tilde{K}_j es homogéneo de grado $-d$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\tilde{K}_j(x')| d\sigma(x') &= \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\tilde{K}_j(rx')| d\sigma(x') r^{d-1} dr = \frac{1}{\log 2} \int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{\log 2} \int_{1<|x|<2} (|\tilde{K}_j(x) - R_j K_{1/2}(x)| + |R_j K_{1/2}(x)|) dx. \end{aligned}$$

Acotamos el primer sumando de dentro de la integral por $C\|\Omega\|_1|x|^{-d-1}$. Esto es así porque teníamos la estimación

$$|R_j K_\varepsilon(x) - R_j K_\eta(x)| \leq C \frac{\|\Omega\|_1}{|x|^{d+1}} \eta$$

y tomamos $\eta = 1/2$, y hacemos tender ε a cero. Al integrar, acotamos todo por $C\|\Omega\|_1 \leq C\|\Omega\|_q$ (esta última desigualdad es la desigualdad de Hölder).

Para acotar el segundo sumando, utilizamos que R_j es acotado en L^q

$$\int_{1<|x|<2} |R_j K_{1/2}(x)| dx \leq C \|R_j K_{1/2}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|K_{1/2}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\Omega\|_{L^q(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Para hacer la segunda estimación, haremos el caso $\varepsilon = 1$, ya que

$$R_j K_\varepsilon(x) - \tilde{K}_j(x) \chi_{|x|>\varepsilon} = \varepsilon^{-d} (R_j K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \tilde{K}_j(x) \chi_{|x/\varepsilon|>1}),$$

lo que conserva la norma en L^1 .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |R_j K_1(x) - \tilde{K}_j(x) \chi_{|x|>1}| dx &= \int_{|x|\leq 2} |R_j K_1(x) - \tilde{K}_j(x) \chi_{|x|>1}| dx + \int_{|x|\geq 2} |R_j K_1(x) - \tilde{K}_j(x)| dx \\ &\leq \int_{|x|\leq 2} |R_j K_1(x)| dx + \int_{1\leq|x|\leq 2} |\tilde{K}_j(x)| dx + \int_{|x|\geq 2} |R_j K_1(x) - \tilde{K}_j(x)| dx. \end{aligned}$$

El segundo sumando lo hemos acotado en la primera estimación. El primero se acota por $\|R_j K_1\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$ y se sigue igual que en la primera estimación. En el tercer sumando, acotamos el integrando por $C\|\Omega\|_1|x|^{-d-1}$ al igual que hicimos para la primera estimación y el resultado sigue. \square

Teorema 3.15. Sea $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{d-1})$ de media nula y par, con $q > 0$. Entonces la integral singular rough definida por (3.4) es acotada en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p < \infty$.

Demostración. Con la notación introducida a lo largo de esta sección,

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon * f(x).$$

Si escribimos $\tilde{K}_{j,\varepsilon} = \tilde{K}_j \chi_{|x|>\varepsilon}$, y $\Delta_\varepsilon(x) = R_j K_\varepsilon(x) - \tilde{K}_{j,\varepsilon}$, se tiene

$$K_\varepsilon * f = - \sum_{j=1}^d R_j (R_j K_\varepsilon) * f = - \sum_{j=1}^d R_j (\tilde{K}_{j,\varepsilon} * f + \Delta_\varepsilon * f).$$

Utilizando la desigualdad de Minkowski, el Lema 3.14 y la Observación 3.13, es inmediato que podemos acotar

$$\|\tilde{K}_{j,\varepsilon} * f\|_p \leq C \|\Omega\|_q \|f\|_p, \quad \|\Delta_\varepsilon * f\|_p \leq C \|\Omega\|_q \|f\|_p,$$

siendo las constantes C independientes de ε . Así, $\|K_\varepsilon * f\|_p \leq C \|\Omega\|_q \|f\|_p$ con constante C independiente de ε . Como $K_\varepsilon * f$ está definido para $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, definimos $Tf = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon * f$ que sabemos que converge y se mantiene la desigualdad

$$\|Tf\|_p \leq C \|\Omega\|_{L^q(\mathbb{S}^{d-1})} \|f\|_p. \quad \square$$

Como consecuencia de esta sección y de la anterior, enunciamos el siguiente

Corolario 3.16. *Sea $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ de media nula con $\Omega_p \in L^q(\mathbb{S}^{d-1})$ para algún $q > 1$. Entonces la integral singular rough T_Ω está acotada en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p < \infty$,*

$$\|T_\Omega f\|_p \leq C \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})} \|f\|_p.$$

3.3. Operadores de Calderón-Zygmund

Los operadores de Calderón-Zygmund vienen representados por núcleos que tienen cierta regularidad. Empezamos esta sección con el conocido como Teorema de Calderón-Zygmund. Apareció en [2], y aquí presentamos una versión un poco más general que aparece en [5].

Teorema 3.17. *Sea K una distribución temperada en \mathbb{R}^d que coincide con una función localmente integrable en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y que cumpla las condiciones*

$$|\hat{K}(\xi)| \leq A, \quad (3.8)$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d. \quad (3.9)$$

Entonces el operador de convolución con K , $T(f) = K * f$, cumple las desigualdades

$$\|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

$$|\{x : Tf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1,$$

para $f \in \mathcal{S}$. Como consecuencia, T se extiende a un operador acotado en L^p , $1 < p < \infty$ y de tipo débil (1,1).

Cuando decimos que el núcleo K es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ nos referimos, como es habitual, a que es integrable en cualquier compacto que no contenga al origen. La condición (3.9) se conoce como condición de Hörmander. En la práctica, para demostrar la condición de Hörmander se suele probar una más fuerte.

Lema 3.18. *Sea $K \in C^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ tal que*

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{d+1}},$$

para cierta $C > 0$ independiente de x . Entonces K satisface la condición de Hörmander (3.9).

Observación 3.19. Las transformadas de Riesz R_1, \dots, R_d cumplen las hipótesis del Teorema 3.17, por lo que son acotadas en L^p para $1 < p < \infty$ y de tipo débil (1,1). El método de rotaciones nos daba la acotación en L^p para $1 < p < \infty$, pero no la desigualdad débil (1,1).

Demostración del Teorema 3.17. Primero demostraremos la acotación en L^2 y la desigualdad débil (1,1), para luego argumentar mediante dualidad e interpolación.

El caso $p = 2$ es sencillo al tener la condición (3.8):

$$\|Tf\|_2 = \|\hat{K} \cdot \hat{f}\|_2 \leq A\|\hat{f}\|_2 = A\|f\|_2.$$

Para demostrar la desigualdad débil (1,1), utilizaremos la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 1.19) y el hecho de que es acotado en L^2 . Sea f no negativa. Si no fuera así, tomamos las partes real e imaginaria y sus partes positiva y negativa y les aplicamos la argumentación que sigue. Estas funciones no serán de la clase de Schwartz porque se pierde regularidad, pero sí que decaen en el infinito tan rápido como las funciones de Schwartz y son funciones de Lipschitz, lo que es suficiente para justificar los cálculos que haremos a continuación.

Sea $\lambda > 0$. Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund a altura $A^{-1}\lambda$ de la función f . Obtenemos una familia numerable de cubos disjuntos $\{Q_j\}$ tales que

- (i) $\Omega = \cup_j Q_j$, $|\Omega| \leq A\|f\|_1/\lambda$,
- (ii) $f(x) \leq \frac{\lambda}{A}$, c.t. $x \notin \Omega$,
- (iii) $\lambda < Af_{Q_j} \leq 2^d \lambda$, $\forall j$.

Como en la sección 3.1, escribimos $f = g + b$, con g la parte *buena* y b la parte *mala*. Es decir,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin \Omega \\ f_{Q_j}, & x \in Q_j, \end{cases}$$

y $b = f - g = \sum_j b_j$, con $b_j(x) = (f(x) - f_{Q_j})\chi_{Q_j}(x)$.

Separamos el conjunto que queremos acotar:

$$\{x : Tf(x) > \lambda\} \subset \{x : Tg(x) > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{x : Tb(x) > \frac{\lambda}{2}\}.$$

La parte que va con g es relativamente sencilla de tratar, por eso se le denomina la parte *buena*. En efecto

$$\begin{aligned} |\{x : Tg(x) > \frac{\lambda}{2}\}| &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} |Tg(x)|^2 dx \leq A \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 2^{2d} \frac{\lambda}{A} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \leq c_d \frac{A}{\lambda} \|g\|_1 \leq c_d A \frac{1}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

La parte *mala* de la función es algo más complicada de acotar, por eso se le pone ese nombre.

Denotaremos por γQ_j el cubo con mismo centro que Q_j pero con lado $\gamma = 2\sqrt{n}$ veces mayor que el lado de Q . Notar que $2Q_j$ no es diádico respecto de Q_j , al tener el mismo centro y no un mismo vértice. Asimismo, denotaremos por $\Omega^* = \cup_j \gamma Q_j$. Al ser los cubos disjuntos, $|\Omega^*| \leq \gamma^d |\Omega|$.

$$|\{x : Tb(x) > \frac{\lambda}{2}\}| \leq |\Omega^*| + \frac{2}{\lambda} \int_{(\Omega^*)^c} |Tb(x)| dx.$$

El primer sumando del segundo término de la desigualdad precedente se acota directamente por $A\|f\|_1/\lambda$. Para acotar el segundo término, argumentamos como sigue. Demostramos en la sección

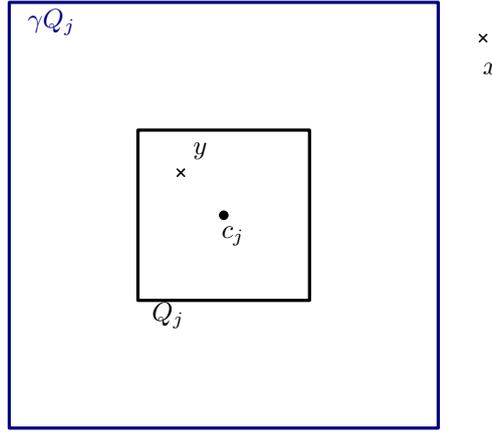


Figura 3.1: Esquema de la situación.

anterior que $b = \sum b_j$ en L^2 . Como T es continuo en L^2 , tendremos que $Tb = \sum Tb_j$ también en L^2 y por tanto en casi todo punto. Tenemos pues la desigualdad en casi todo punto

$$\left| \sum_j Tb_j(x) \right| \leq \sum_j |Tb_j(x)|. \quad (3.10)$$

Por otro lado, probemos

$$\int_{(\Omega^*)^c} |Tb_j(x)| dx \leq C \int_{Q_j} |b_j(x)| dx. \quad (3.11)$$

En efecto, como b_j está soportada en Q_j y tiene media nula,

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x-y)b_j(y)dy = \int_{Q_j} (K(x-y) - K(x-c_j))b_j(y)dy,$$

donde c_j denota el centro del cubo Q_j . Así, utilizando (3.9) en la última desigualdad,

$$\begin{aligned} \int_{(\gamma Q_j)^c} |Tb_j(x)| dx &= \int_{(\gamma Q_j)^c} \left| \int_{Q_j} (K(x-y) - K(x-c_j))b_j(y)dy \right| dx \\ &\leq \int_{(\gamma Q_j)^c} \int_{Q_j} |(K(x-y) - K(x-c_j))b_j(y)| dy dx \\ &\leq \int_{Q_j} |b_j(x)| \int_{(\gamma Q_j)^c} |(K(x-y) - K(x-c_j))| dy dx \\ &\leq B \int_{Q_j} |b_j(x)| dx, \end{aligned}$$

ya que al ser $x \in (\gamma Q_j)^c$, tenemos $|x - c_j| > 2|y - c_j|$, como se puede ver esquemáticamente en la Figura 3.1. Entonces,

$$\int_{(\Omega^*)^c} |Tb(x)| dx \leq B \sum_j \int_{Q_j} |b_j(x)| dx \leq B \|f\|_1.$$

Recopilando todo, comprobamos

$$|\{x : Tf(x) > \lambda\}| \leq c_d \frac{A+B}{\lambda} \|f\|_1.$$

Así, podemos definir T para toda función en L^1 tal y como hicimos con la transformada de Hilbert.

Teniendo la desigualdad débil, podemos utilizar el teorema de interpolación de Marcinkiewicz para concluir que T es acotado en L^p para $1 < p < 2$ con norma

$$\|T\|_{p \rightarrow p} \leq c_{d,p}(A + B).$$

Para $p > 2$ utilizamos un argumento de dualidad. Primero calculamos el operador adjunto de T , \tilde{T} (no le llamamos T^* porque así denotaremos a otro operador más adelante). Es precisamente el operador que viene dado mediante convolución con la distribución temperada $\tilde{K}(x) = \overline{K(-x)}$. Como \tilde{K} satisface todas las hipótesis del teorema, \tilde{T} es acotado en $L^{p'}$, $1 < p < 2$. Si $p > 2$, $1 < p' < 2$ y sea g una función con $\|g\|_{p'} = 1$. Entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} gTf \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f\tilde{T}g \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f|\tilde{T}g| \leq \|f\|_p \|\tilde{T}g\|_{p'} \leq c_{d,p'}(A + B)\|f\|_p.$$

Tomando el supremo sobre todas las funciones g que satisfacen $\|g\|_{p'} = 1$, vemos que

$$\|Tf\|_p \leq c_{d,p}(A + B)\|f\|_p.$$

Así, podemos definir T para funciones en L^p para $1 \leq p < \infty$ de manera que es acotado para $1 < p < \infty$ y de tipo débil para $p = 1$. \square

La hipótesis sobre la acotación de la transformada de Fourier sólo se usa para probar la acotación del operador en L^2 . Normalmente, probar que la transformada de Fourier es una función acotada es difícil y por ello hay teoremas que dan condiciones suficientes para que eso pase. Para no desviarnos demasiado del tema principal de este documento no mencionaremos ninguno de estos teoremas y tomaremos como hipótesis la acotación en L^2 .

Nos interesan los operadores que no son de tipo convolución. Una generalización directa del Teorema 3.17 es viene dada en el siguiente. Denotaremos por $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ a la diagonal del espacio euclídeo \mathbb{R}^{2d} .

Teorema 3.20. *Sea T un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ para el que existe una función compleja definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta$ tal que si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,*

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y)dy, \quad x \notin \text{sopf}.$$

Si además el núcleo K satisface las condiciones

$$\int_{|x-y|>2|y-y'|} |K(x, y) - K(x, y')|dx \leq C \tag{3.12}$$

$$\int_{|x-y|>2|x-x'|} |K(x, y) - K(x', y)|dy \leq C \tag{3.13}$$

entonces T es acotado en L^p si $1 < p < \infty$ y de tipo débil si $p = 1$.

Demostración. Seguiremos la misma estrategia que en la demostración del Teorema 3.17. Se demuestra la desigualdad débil para $p = 1$ para T , y utilizando interpolación, sigue la acotación para $1 < p \leq 2$. Para $p > 2$, utilizamos un argumento de dualidad, calculando previamente el adjunto de T .

La desigualdad débil para T cuando $p = 1$ se demuestra de manera análoga a la demostración del Teorema 3.17, así que no repetiremos el argumento. La única diferencia es que aquí aparecerá $K(x, y)$ donde ahí aparecía $K(x - y)$. Se utiliza, en la acotación de la parte mala del conjunto de nivel la condición (3.12).

La diferencia ahora está en el operador adjunto. Este operador vendrá representado, para funciones con soporte compacto, con el núcleo $K'(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Claramente está acotado en L^2 (pues es el adjunto de un operador acotado en L^2) y se demuestra la desigualdad débil para $p = 1$ utilizando la condición (3.13). Entonces es válido el argumento de dualidad que hicimos en la demostración del Teorema 3.17. \square

En la práctica, muchas veces los núcleos satisfacen condiciones más fuertes que (3.12) y (3.13). La clase de operadores que definimos a continuación engloba a muchos de los operadores integrales habituales.

Definición 3.21. Sea ω una función creciente con $\omega(0) = 0$, que satisface la condición de Dini

$$\|\omega\|_{\text{Dini}} = \int_0^1 \omega(t) \frac{dt}{t} < \infty. \quad (3.14)$$

Se dice que un operador T es de ω -Calderón-Zygmund si es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y tiene un núcleo K tal que para f de L^2 y de soporte compacto,

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dx, \quad x \notin \text{supp } f,$$

y que además satisface la condición de tamaño

$$|K(x, y)| \leq \frac{C_K}{|x - y|^d}, \quad x \neq y, \quad (3.15)$$

para alguna $C_K > 0$, y las condiciones de regularidad

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq \omega\left(\frac{|x - x'|}{|x - y|}\right) \frac{1}{|x - y|^d}, \quad |x - y| > 2|x - x'|, \quad (3.16)$$

$$|K(x, y) - K(x, y')| \leq \omega\left(\frac{|y - y'|}{|x - y|}\right) \frac{1}{|x - y|^d}, \quad |x - y| > 2|y - y'|. \quad (3.17)$$

La función ω recibe el nombre de módulo de continuidad.

A veces se dice que un operador es de Calderón-Zygmund, sin especificar quién es ω , pero entenderemos que cumple las condiciones (3.16) y (3.17) para alguna función ω que satisface la condición de Dini (3.14).

Observación 3.22. Como los operadores de ω -Calderón-Zygmund satisfacen las hipótesis del Teorema 3.20, serán acotados en L^p si $1 < p < \infty$ y de tipo débil para $p = 1$. La constante obtenida para la desigualdad de tipo débil si $p = 1$ es precisamente

$$\|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1, \infty}} \leq c_d (\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} + C_k + \|\omega\|_{\text{Dini}}).$$

A continuación damos unos ejemplos de operadores de ω -Calderón-Zygmund

Ejemplo 3.23. Si $\omega(t) = t^\delta$ para algún $\delta > 0$, entonces tenemos lo que se conoce como operador de Calderón-Zygmund estándar. Claramente, ω satisface la condición de Dini.

Ejemplo 3.24. El operador de Ahlfors-Beurling B definido para funciones de $L^2(\mathbb{C})$ por

$$Bf(z) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta)^2} dA(\zeta)$$

puede ser entendido como operador de ω -Calderón-Zygmund para $\omega(t) = \mu t^2$. En efecto, es fácil comprobar que si $K(z, \zeta) = 1/(z - \zeta)^2$, entonces

$$|K(z_1, \zeta) - K(z_2, \zeta)| \leq 4 \left(\frac{|z_2 - z_1|}{|z_1 - \zeta|} \right)^2 \frac{1}{|z_1 - \zeta|^2}.$$

Este operador viene del análisis complejo y está relacionado con las derivadas de Wirtinger.

Ejemplo 3.25. Sea Ω una función en la esfera \mathbb{S}^{d-1} con media nula que satisface la condición de Dini

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

donde $\omega(t) = \sup\{|\Omega(u_1) - \Omega(u_2)| : |u_1 - u_2| \leq t\}$. Entonces el operador integral singular rough

$$T_\Omega f(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} f(x-y) dy$$

como en el apartado anterior es un operador de ω -Calderón-Zygmund. Nótese que en la sección anterior no pedíamos ninguna condición de regularidad a la función Ω , sólo le requeríamos cierta integrabilidad. La condición de Dini implica que $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$, así que por la sección anterior ya conocíamos la acotación de T_Ω en L^p cuando $1 < p < \infty$, pero no conseguimos nada sobre la desigualdad débil para $p = 1$ utilizando el método de las rotaciones.

Cuando se trabaja con la norma de Dini, el siguiente pequeño resultado puede ser útil.

Lema 3.26. La cantidad $\|\omega\|_{Dini}$ es comparable a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{-j}).$$

Demostración. Como ω es continuo, es legítimo evaluarlo puntualmente. Es más, $\omega(t_1) \leq \omega(t_2)$ siempre que $t_1 \leq t_2$. Entonces se tiene

$$\|\omega\|_{Dini} = \int_0^1 \omega(t) \frac{dt}{t} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-j-1}} \omega(t) \frac{dt}{t} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-j-1}} \omega(2^{-j}) \frac{dt}{2^{-j}} = \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{-j}).$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{Dini} &= \int_0^1 \omega(t) \frac{dt}{t} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-j-1}} \omega(t) \frac{dt}{t} \\ &\geq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-j-1}} \omega(2^{-j-1}) \frac{dt}{2^{-j-1}} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{-j-1}) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \omega(2^{-j}). \quad \square \end{aligned}$$

3.3.1. El operador maximal truncado

Vista la representación mediante el núcleo de los operadores de Calderón-Zygmund, podríamos pensar que

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y) f(y) dy, \tag{3.18}$$

para un operador de Calderón-Zygmund T . Esto es, en general, categóricamente falso. De hecho, no tiene ni por qué existir el límite; y en caso de que exista el límite no tiene por qué ser igual a $Tf(x)$. Para ver un ejemplo de lo segundo, basta observar que el operador identidad es un operador de Calderón-Zygmund con núcleo cero. En efecto, si $x \notin \text{sop}(f)$, entonces $Tf(x) = f(x) = 0$. Pero si fuera cierto (3.18), entonces $Tf(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^d$, lo que no es verdad si f no es idénticamente nula.

Hecha esta pequeña observación, también nos damos cuenta de que puede haber dos operadores de Calderón-Zygmund distintos con el mismo núcleo. Por ejemplo, el operador identidad y el operador cero tienen núcleo nulo. La siguiente proposición caracteriza los operadores de Calderón-Zygmund asociados a un mismo núcleo.

Proposición 3.27. Sean T_1 y T_2 dos operadores de Calderón-Zygmund. T_1 y T_2 tienen el mismo núcleo si y sólo si se diferencian en un operador de multiplicación puntual, es decir,

$$T_1 f(x) - T_2 f(x) = m(x)f(x) \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}^d,$$

para cierta función $m \in L^\infty$.

Dado un operador de Calderón-Zygmund T , construimos el operador maximal truncado T^* asociado a T de la siguiente manera. Si escribimos

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)dy,$$

el operador T^* viene dado por

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)|. \quad (3.19)$$

Si este operador fuera acotado en L^p , según el teorema 1.4, para determinar la existencia del límite en (3.18) será suficiente demostrar la existencia de tal límite para las funciones de la clase de Schwartz o C_c^∞ para tener demostrada la existencia del límite para todas las funciones L^p .

Teorema 3.28. Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $0 < \eta \leq 1$, se tiene

$$T^* f(x) \leq C(\eta)[(M(Tf)^\eta(x))^{1/\eta} + Mf(x)].$$

Demostración. Supongamos, haciendo una traslación, que $x = 0$. Como el razonamiento que sigue a continuación es invariante por traslación, esto no supone pérdida de generalidad. Probaremos que existe $C > 0$ tal que, independientemente de ε ,

$$T_\varepsilon f(0) \leq C[(M(Tf)^\eta(0))^{1/\eta} + Mf(0)].$$

Sean $Q = B(0, \frac{\varepsilon}{2})$ y $\bar{Q} = B(0, \varepsilon)$. Llamamos $f_1 = f\chi_{\bar{Q}}$ y ponemos $f = f_1 + f_2$. Con esta elección hecha,

$$Tf_2(0) = \int_{|y|>\varepsilon} K(0,y)f_2(y)dy = \int_{|y|>\varepsilon} K(0,y)f(y)dy = T_\varepsilon f(0).$$

Demostremos ahora que si $z \in Q$, $|Tf_2(z) - Tf_2(0)| \leq c_d \|\omega\|_{\text{Dini}} Mf(0)$. En efecto,

$$\begin{aligned} |Tf_2(z) - Tf_2(0)| &= \left| \int_{|y|>\varepsilon} [K(z,y) - K(0,y)]f_2(y)dy \right| \\ &\leq C \int_{|y|>\varepsilon} |f_2(y)|\omega\left(\frac{|z|}{|y|}\right) \frac{1}{|y|^d} dy \leq C \int_{|y|>\varepsilon} |f_2(y)|\omega\left(\frac{\varepsilon}{|y|}\right) \frac{1}{|y|^d} dy \\ &= C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\varepsilon 2^j < |y| < \varepsilon 2^{j+1}} |f_2(y)|\omega\left(\frac{\varepsilon}{|y|}\right) \frac{1}{|y|^d} dy \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{-j})(\varepsilon 2^j)^{-1} \int_{\varepsilon 2^j < |y| < \varepsilon 2^{j+1}} |f_2(y)| dy \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{-j}) \frac{c_d}{\varepsilon 2^j} \int_{|y| < \varepsilon 2^{j+1}} |f_2(y)| dy \leq C_d \|\omega\|_{\text{Dini}} Mf(0). \end{aligned}$$

Como consecuencia de esto,

$$|T_\varepsilon f(0)| \leq CMf(0) + |Tf_2(z)| \leq CMf(0) + |Tf(z)| + |Tf_1(z)|, \quad (3.20)$$

para $z \in Q$. Si resultase que $|T_\varepsilon f(0)| = 0$, no habría nada que probar; si no fuese así, sea $0 < \lambda < |T_\varepsilon f(0)|$. Definimos

$$Q_1 = \{z \in Q : |Tf(z)| > \frac{\lambda}{3}\};$$

$$Q_2 = \{z \in Q : |Tf_1(z)| > \frac{\lambda}{3}\};$$

$$Q_3 = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } CMf(0) \leq \frac{\lambda}{3}, \\ Q, & \text{si } CMf(0) > \frac{\lambda}{3}. \end{cases}$$

Por la desigualdad en (3.20), es claro que $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, por lo que $|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| + |Q_3|$. Ahora,

$$\|Q_1\| \leq \frac{3}{\lambda} \int_Q |Tf(z)| dz \leq \frac{3|Q|}{\lambda} M(Tf)(0).$$

Utilizando la desigualdad débil de T ,

$$|Q_2| = |\{z \in Q : |Tf_1(z)| > \frac{\lambda}{3}\}| \leq C \frac{3}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f_1| = \leq C \frac{3}{\lambda} \int_Q |f| \leq \frac{3}{\lambda} CMf(0).$$

Si $Q_3 = \emptyset$, entonces

$$|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| \leq \frac{1}{\lambda} C(M(Tf)(0) + Mf(0))|Q|.$$

En cambio, si $Q = Q_3$, se tiene $\lambda \leq CMf(0)$. En cualquiera de los dos casos se deduce

$$\lambda \leq C(M(Tf)(0) + Mf(0)),$$

para todo $\lambda < |T_\varepsilon f(0)|$, con lo que

$$|T_\varepsilon f(0)| \leq C(M(Tf)(0) + Mf(0)),$$

donde C es independiente de ε . Así queda probado el caso con $\eta = 1$. Para el caso $\eta < 1$, volvemos a (3.20). Obtenemos,

$$|T_\varepsilon f(0)|^\eta \leq [CMf(0)]^\eta + |Tf(z)|^\eta + |Tf_1(z)|^\eta.$$

Integramos en Q y dividimos por $|Q|$ para obtener

$$|T_\varepsilon f(0)|^\eta \leq [CMf(0)]^\eta + M[(Tf)^\eta](0) + \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(z)|^\eta dz \right).$$

Elevamos todo a $1/\eta$ y obtenemos

$$|T_\varepsilon f(0)| \leq C \left(Mf(0) + M(Tf)^\eta(0)^{1/\eta} + \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(z)|^\eta dz \right)^{1/\eta} \right),$$

y utilizando el Lema de Kolmogorov 1.6, tenemos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(z)|^\eta dz \leq C \frac{1}{|Q|^\eta} \|f_1\|_1^\eta \leq CMf(0)^\eta.$$

Así, queda demostrado el teorema. □

Corolario 3.29. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Entonces el operador maximal truncado T^* es acotado en L^p si $1 < p < \infty$ y de tipo débil para $p = 1$ con*

$$\|T^*\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \leq c_d (\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} + C_K + \|\omega\|_{Dini}).$$

Demostración. La acotación cuando $1 < p < \infty$ es inmediata de la desigualdad del teorema anterior con $\eta = 1$, al ser acotados en L^p los operadores T y M . Esta observación no vale para $p = 1$ porque la composición de dos operadores débiles no es en general débil. Por ello hemos necesitado la desigualdad con $\eta < 1$:

$$|\{x : T^*f(x) > \lambda\}| \leq |\{x : Mf(x) > \frac{\lambda}{2C}\}| + |\{x : (M(Tf)^\eta(x))^{1/\eta} > \frac{\lambda}{2C}\}|.$$

El primer sumando satisface la desigualdad que nos interesa al ser M de tipo débil-(1,1). Para el segundo sumando, utilizamos el operador maximal diádico, que satisface la desigualdad débil. Entonces

$$|\{x : (M(Tf)^\eta(x))^{1/\eta} > \lambda\}| \leq c_d |\{x : M_d(Tf)^\eta(x) > 4^{-d}\lambda^\eta\}|.$$

Llamemos E al conjunto que aparece en el segundo término de la desigualdad de arriba. E es de medida finita si, por ejemplo, $f \in C_c^\infty$. Utilizando posteriormente un argumento de densidad lo extenderemos a toda $f \in L^1$. Entonces,

$$|E| \leq \frac{1}{\lambda^\eta} \int_E |(Tf)^\eta(y)| dy$$

y por el Lema de Kolmogorov 1.6 concluimos que

$$|E| \leq \|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \lambda^{-\eta} |E|^{1-\eta} \|f\|_1^\eta,$$

de donde deducimos el teorema. □

Capítulo 4

Desigualdades con peso para integrales singulares

Después de dedicar un capítulo a las clases A_p de pesos y otro a las integrales singulares, lo siguiente es evidentemente dedicar uno a la combinación natural de ambos: las desigualdades con peso para integrales singulares. Este es un tema típico en Análisis Armónico y aparece en muchos de los libros de Análisis de Fourier, por ejemplo en [5], [10] y [12].

En la primera sección exponemos las desigualdades con peso estándares para operadores de Calderón-Zygmund, tal y como se pueden encontrar en la literatura clásica. Pese a que lo denotamos como teoría clásica, en realidad no es tan antigua, pues la mayoría de los resultados fueron demostrados a partir de los años 70.

En las secciones siguientes damos unas mejoras que se han conseguido recientemente en las dichas desigualdades, tanto para operadores de Calderón-Zygmund y para integrales singulares *rough*. Para ello empleamos un resultado de dominación por operadores *sparse*, una técnica que es joven aún y está en desarrollo.

4.1. Teoría clásica

En esta sección demostramos desigualdades con peso para operadores de Calderón-Zygmund. En particular, demostramos que los operadores de ω -Calderón-Zygmund son acotados en $L^p(w)$ para todo $w \in A_p$ siempre que $1 < p < \infty$, y también que son de tipo débil (1,1) para $w \in A_1$. La prueba que damos de estas desigualdades produce una mala dependencia de la norma del operador en la constante A_p del peso. Por ello, no tendremos cuidado a la hora de hacer las acotaciones y las constantes que aparecerán dependerán de los pesos, núcleos y demás variables esenciales. En las siguientes secciones sí que tendremos ese cuidado e indicaremos con precisión la dependencia de las constantes en las variables esenciales.

Lema 4.1. *Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $s > 1$, se tiene en casi todo punto*

$$M^\# T f(x) \leq C(M f^s(x))^{1/s},$$

donde M denota el operador maximal de Hardy-Littlewood y $M^\#$ denota el operador maximal agudo definido en el primer capítulo.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y Q un cubo que contiene a x . Tenemos que acotar

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T f(y) - \alpha| dy$$

para algún $\alpha \in \mathbb{C}$. Escribimos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f \chi_{2Q}$, donde $2Q$ denota el cubo con el mismo centro y doble radio que Q , con lo que $f_2 = f \chi_{(2Q)^c}$. Ponemos $\alpha = T f_2(x)$. Así,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T f(y) - \alpha| dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |T f_1(y)| dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |T f_2(y) - T f_2(x)| dy.$$

Como $s > 1$, sabemos que T es acotado en $L^s(\mathbb{R}^d)$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(y)| dy &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_{2Q} |f_1(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C \left(\frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \leq C(Mf^s(x))^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Así, queda acotado el primer sumando. Para el segundo sumando argumentamos como sigue.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_2(y) - Tf_2(x)| dy &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_{(2Q)^c} (K(y, z) - K(x, z)) f(z) dz \right| dy \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{(2Q)^c} \omega \left(\frac{|y-x|}{|z-x|} \right) \frac{1}{|z-x|^d} |f(z)| dz dy \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \int_{(2Q)^c} \omega \left(\frac{l(Q)}{|z-x|} \right) \frac{1}{|z-x|^d} |f(z)| dz dy \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \sum_{k=-1}^{\infty} \int_{2^k l(Q) < |x-z| < 2^{k+1} l(Q)} \omega \left(\frac{l(Q)}{|z-x|} \right) \frac{1}{|z-x|^d} |f(z)| dz dy \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \sum_{k=-1}^{\infty} \int_{2^k l(Q) < |x-z| < 2^{k+1} l(Q)} \omega \left(\frac{l(Q)}{2^k l(Q)} \right) \frac{|f(z)|}{(2^k l(Q))^d} dz dy \\ &\leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \omega(2^{-k}) \right) \frac{1}{(2^k l(Q))^d} \int_{|x-z| < 2^{k+1} l(Q)} |f(z)| dz \\ &\leq CMf(x) \leq C(Mf^s(x))^{\frac{1}{s}}, \end{aligned}$$

siendo esta última desigualdad consecuencia de la desigualdad de Hölder en cada cubo. \square

Teorema 4.2. *Sea $w \in A_p$. Se tiene*

$$\int |M_d f(x)|^p w(x) dx \leq C \int |M^\# f(x)|^p w(x) dx,$$

donde M_d denota el operador maximal diádico estándar, siempre que el término de la izquierda sea finito.

Demostración. Utilizaremos una técnica conocida como la desigualdad de los buenos lambdas (*good-lambda inequality* en inglés). En concreto, la desigualdad

$$w(\{x : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}) \leq C\gamma w(\{x : M_d f(x) > \lambda\}). \quad (4.1)$$

Para demostrar la desigualdad (4.1), notamos que el conjunto $\{x : M_d f(x) > \lambda\}$ es unión de cubos diádicos disjuntos, $\{Q_j\}_j$, que son maximales respecto de la propiedad $f_{Q_j} > \lambda$, que son precisamente los cubos que nos da la descomposición de Calderón-Zygmund para f a altura λ . Basta probar que para cada cubo Q_j se cumple

$$w(\{x \in Q_j : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}) \leq C\gamma w(Q_j). \quad (4.2)$$

Probamos primero la siguiente versión de (4.2) para la medida de Lebesgue, precisamente,

$$|\{x \in Q_j : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq C\gamma |Q_j|.$$

Si $2Q_j$ es el cubo con lado doble de Q_j , se tiene por la maximalidad de la descomposición $f_{2Q_j} \geq \lambda$. Por otro lado, si $x \in Q_j$ y $M_d f(x) > 2\lambda$, se tiene $M_d(f\chi_{Q_j})(x) > 2\lambda$ y, por tanto, también $M_d((f - f_{2Q_j})\chi_{Q_j})(x) > \lambda$. Esto implica que

$$\{x \in Q_j : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\} \subset \{x \in Q_j : M_d((f - f_{2Q_j})\chi_{Q_j})(x) > \lambda\}.$$

Utilizamos la desigualdad débil para M_d y obtenemos

$$\begin{aligned} |\{x \in Q_j : M_d((f - f_{2Q_j})\chi_{Q_j})(x) > \lambda\}| &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{Q_j} |f(x) - f_{2Q_j}| dx \\ &\leq C \frac{2^d |Q_j|}{\lambda} |2Q_j| \int_{2Q_j} |f(x) - f_{2Q_j}| dx \leq C \frac{|Q_j|}{\lambda} \inf_{x \in Q_j} M^\# f(x). \end{aligned}$$

Si el conjunto $\{x \in Q_j : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}$ es vacío, no tenemos que probar nada; y si no es vacío, existe algún $x \in Q_j$ con $M^\# f(x) \leq \gamma\lambda$, con lo que tendremos

$$|\{x \in Q_j : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq C\gamma|Q_j|.$$

Para terminar de probar (4.1), utilizamos el Corolario 2.10 (iii) y obtenemos directamente la desigualdad (4.1).

Escribimos

$$\int |M_d f(x)|^p w(x) dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} w(\{x : M_d f(x) > \lambda\}) d\lambda.$$

Tomamos la integral truncada

$$I_N = p \int_0^N \lambda^{p-1} w(\{x : M_d f(x) > \lambda\}) d\lambda.$$

Haciendo un cambio de variable, y utilizando (4.1),

$$\begin{aligned} I_N &= 2^p p \int_0^{N/2} \lambda^{p-1} w(\{x : M_d f(x) > 2\lambda\}) d\lambda \\ &\leq 2^p p \int_0^{N/2} \lambda^{p-1} (w(\{x : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}) + w(\{x : M^\# f(x) < \gamma\lambda\})) d\lambda \\ &\leq C 2^p p \gamma I_N + 2^p p \int_0^{N/2} \lambda^{p-1} w(\{x : M^\# f(x) < \gamma\lambda\}) d\lambda \\ &\leq C 2^p p \gamma I_N + \frac{2^p}{\gamma^p} \int_0^{\gamma N/2} p \eta^{p-1} w(\{x : M^\# f(x) < \eta\}) d\eta. \end{aligned}$$

Ahora, si elegimos γ suficientemente pequeño para que $2^p \gamma C < 1/2$, podemos incorporar el segundo sumando al lado izquierdo para obtener

$$I_N \leq c_p \int_0^{\gamma N/2} p \eta^{p-1} w(\{x : M^\# f(x) > \eta\}) d\eta,$$

y tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado deseado. Hemos tomado la hipótesis de finitud para poder pasar I_N al lado izquierdo. \square

Teorema 4.3. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo peso $w \in A_p$ si $1 < p < \infty$.*

Demostración. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto. Probaremos el teorema para estas funciones que forman un subespacio denso en $L^p(w)$, con lo que quedará probado para todo el espacio. Por el Lemas 4.1 y el Teorema 4.2, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |M_d T f(x)|^p w(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^\# T f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M f^s(x)|^{\frac{p}{s}} w(x) dx, \end{aligned}$$

siempre que el segundo término sea finito, cosa que probaremos a continuación. Para finalizar, elegimos $s > 1$ tal que $w \in A_{p/s}$, que es posible por el Corolario 2.10. Así, el operador maximal M es acotado en $L^{\frac{p}{s}}(w)$, por lo que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mf^s(x)|^{\frac{p}{s}} w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f^s(x)|^{\frac{p}{s}} w(x) dx,$$

lo que termina la prueba de que T es acotado en $L^p(w)$, excepto por el detalle comentado antes. Probemos $M_d T f \in L^p(w)$, para lo que es suficiente probar $T f \in L^p(w)$ al ser M_d acotado en $L^p(w)$ al estar puntualmente acotado por M y ser $w \in A_p$.

Supongamos que $\text{sop}(f) \subset B(0, R)$ (recordamos que hemos supuesto antes que f tenía soporte compacto.) Tomando el ϵ de la desigualdad de Hölder inversa para w , tenemos por la desigualdad de Hölder

$$\int_{|x| < 2R} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq \left(\int_{|x| < 2R} w^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left(\int_{|x| < 2R} |Tf(x)|^{\frac{p(1+\epsilon)}{\epsilon}} dx \right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}},$$

lo que es finito: el primer factor es finito por la desigualdad inversa de Hölder, y el segundo porque $Tf \in L^q(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < q < \infty$ al ser f acotada y con soporte compacto.

Por otro lado, si $|x| > 2R$, tenemos $x \notin \text{sop}(f)$, con lo que tenemos la representación

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy.$$

Por tanto,

$$\int_{|x| > 2R} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{|x| > 2R} \int_{|y| < R} \frac{|f(y)|^p}{|y|^{dp}} w(x) dy dx \leq C \int_{|x| > 2R} \frac{w(x)}{|x|^{dp}} dx,$$

donde hemos tenido en cuenta que f es acotada. Así,

$$\int_{|x| > 2R} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k R < |x| < 2^{k+1} R} \frac{w(x)}{|x|^{dp}} dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} (2^k R)^{-np} w(B(0, 2^{k+1})).$$

Ahora, como $w \in A_p$, existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\epsilon}$, con lo que

$$w(B(0, 2^{k+1} R)) \leq C_{d,R} 2^{kd(p-\epsilon)},$$

y volviendo a la desigualdad anterior,

$$\int_{|x| > 2R} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(d(p-\epsilon)-dp)} < \infty,$$

porque el exponente es negativo. Finalmente, queda probado

$$\int_{\mathbb{R}^d} |M_d T f(x)|^p w(x) dx < \infty,$$

lo cual finaliza la prueba del teorema. □

Teorema 4.4. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund y $w \in A_1$. Entonces*

$$w(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int |f(x)| w(x) dx.$$

Demostración. Comenzamos, como estamos acostumbrados, haciendo la descomposición de Calderón-Zygmund para f a altura λ , obteniendo cubos $\{Q_j\}$; y escribimos $f = g + b$ para las partes buena y mala respectivamente. al lío. Tenemos que acotar $w(\{x : |Tg(x)| > \lambda\})$ y $w(\{x : |Tb(x)| > \lambda\})$. Comenzamos acotando la parte buena. Utilizamos que, por el Teorema 4.3 T es acotado en $L^2(w)$ y que $g < \lambda$ en casi todo punto para obtener

$$\begin{aligned} w(\{x : |Tg(x)| > \lambda\}) &\leq \frac{1}{\lambda^2} \int |Tg(x)|^2 w(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda^2} \int |g(x)|^2 w(x) dx \leq \frac{C}{\lambda} \int |g(x)| w(x) dx \leq . \end{aligned}$$

Para $x \notin \Omega = \cup_j Q_j$, se tiene $f(x) = g(x)$, con lo que no tenemos que hacer nada. Para $x \in Q_j$, en cambio, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} |g(x)| w(x) dx &= \int_{Q_j} \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y) dy w(x) dx \\ &= \int_{Q_j} \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} dy \leq C \int_{Q_j} f(y) w(y) dy, \end{aligned}$$

al ser $w \in A_1$. Entonces

$$w(\{x : |Tg(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\Omega^c} + \sum_j \int_{Q_j} \right) |f(x)| w(x) dx = \frac{C}{\lambda} \int |f(x)| w(x) dx.$$

Ya tenemos acotada la parte buena. Para acotar la parte mala argumentamos como sigue. Se tiene

$$\{x : |Tb(x)| > \lambda\} \subset \Omega^* \cup \{x \notin \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\},$$

donde como es habitual, $\Omega^* = \cup_j 2Q_j$. Como $w \in A_1$, w es una medida duplicadora, así que

$$\begin{aligned} w(\Omega^*) &\leq \sum_j w(2Q_j) \leq C \sum_j w(Q_j) = C \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} |Q_j| \leq C \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |f(y)| w(y) dy \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| w(y) dy, \end{aligned}$$

utilizando que $w \in A_1$. Para acotar la parte que nos queda, utilizamos que $b = \sum_j b_j$ estando b_j soportada en Q_j y con media nula. Así, denotando por c_j el centro del cubo Q_j ,

$$\begin{aligned} w(\{x \notin \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\}) &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{(2Q_j)^c} |Tb_j(x)| w(x) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{(2Q_j)^c} \left| \int_{Q_j} (K(x, y) - K(x, c_j)) b_j(y) dy \right| w(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{(2Q_j)^c} \int_{Q_j} |K(x, y) - K(x, c_j)| |b_j(y)| dy w(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \left(\int_{(2Q_j)^c} \omega \left(\frac{|y - c_j|}{|x - c_j|} \right) \frac{w(x)}{|x - c_j|^d} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Si repetimos el cálculo de la segunda parte de la demostración del Lema 4.1, vemos que

$$\int_{(2Q_j)^c} \omega \left(\frac{|y - c_j|}{|x - c_j|} \right) \frac{w(x)}{|x - c_j|^d} dx \leq CM w(y) \leq C w(y),$$

siendo la segunda desigualdad por ser $w \in A_1$. Finalizamos por fin la demostración al ser

$$\begin{aligned} w(\{x \notin \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda\}) &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)|w(y)dy = \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |b(y)|w(y)dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|w(y)dy + \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|w(y)dy, \end{aligned}$$

pero ya hemos acotado el segundo sumando. Con esto, terminamos de acotar todas las partes que teníamos que acotar y, como consecuencia,

$$w(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int |f(x)|w(x)dx. \quad \square$$

4.2. Operadores *sparse*

Una manera de demostrar desigualdades en norma con peso para los operadores de Calderón-Zygmund es mediante la dominación del operador por otro más manejable. En este caso dominaremos puntualmente operadores de Calderón-Zygmund por un tipo de operadores denominados *sparse*, y demostraremos resultados de acotación para este último tipo de operadores que implicarán los resultados deseados para los operadores de Calderón-Zygmund.

Definición 4.5. Sea $0 < \eta < 1$. Una familia numerable de cubos \mathcal{S} se dice η -*sparse* si cada cubo $Q \in \mathcal{S}$ tiene un subconjunto medible $E_Q \subset Q$ tal que $|E| \geq \eta|Q|$ y $E_Q \cap E_{Q'}$ son disjuntos para cada par de cubos distintos $Q, Q' \in \mathcal{S}$.

El parámetro η no juega un papel importante, por lo que a veces diremos que una familia es *sparse* sin especificar el coeficiente η . La idea tras la definición de estas familias es que aunque no estén formadas por cubos disjuntos, sí que son esencialmente disjuntos. No es necesario que los cubos pertenezcan a un sistema diádico fijado.

Ejemplo 4.6. (i) Una familia formada por cubos disjuntos siempre es *sparse*, como se puede ver tomando $E_Q = Q$.

(ii) En \mathbb{R} , sean los intervalos $I_j = [0, 2^j)$, para $j = 0, 1, 2, \dots$. Si ponemos $E_{I_j} = [2^{j-1}, 2^j)$, si $j > 0$, $E_{I_0} = I_0$, tenemos que la familia $\{I_j, j \geq 0\}$ es *sparse* con $\eta = 1/2$.

Nota 4.7. Los conjuntos E_Q no tienen por qué ser cubos más pequeños, pueden ser conjuntos medibles sin más propiedades a priori.

Nota 4.8. Pese a que la idea intuitiva es que los cubos son esencialmente disjuntos, el ejemplo anterior muestra que un cubo puede estar contenido en el resto de cubos de la familia. Por esta razón no hay que dejarse llevar demasiado por la idea de que los cubos son disjuntos.

Definición 4.9. Sea \mathcal{S} una familia *sparse*. El operador *sparse* asociado a \mathcal{S} es el operador $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ definido por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} |f|_Q \chi_Q(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \right) \chi_Q(x).$$

Observación 4.10. El operador así definido es sublineal. Podríamos haberlo definido sin poner el valor absoluto, pero entonces habría que tener cuidado al tomar la suma, ya que los cubos que participan no tienen por qué ser disjuntos. Al tomar el operador positivo no tenemos que preocuparnos en darle sentido a la suma, y permitimos que tome el valor infinito. Si, por ejemplo, hay un solapamiento infinito de cubos: en el caso de la familia del Ejemplo 4.6 (ii), si cogemos $f \equiv 1$, $x \geq 0$, se tiene que $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}f(x) = \infty$.

La idea detrás de los operadores *sparse* es que es relativamente sencillo trabajar con ellos. Tienen propiedades de acotación que se demuestran con facilidad, como veremos en la sección siguiente. Estos operadores se utilizan en diversos ámbitos del análisis matemático para acotar diversos operadores. En este documento los utilizaremos para dominar operadores de Calderón-Zygmund.

4.2.1. Acotación de los operadores *sparse*

Damos unas desigualdades en norma para los operadores *sparse*. Primero demostramos la acotación en L^2 con un argumento que es bastante ilustrativo respecto a la manera habitual de trabajar con estos operadores. Finalmente, damos una desigualdad con peso para los pesos en A_p , $1 < p$.

Lema 4.11. *Sea \mathcal{S} una familia η -sparse. El operador $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$, y la norma sólo depende de η y d , no de \mathcal{S} .*

Demostración. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Veamos que $|\langle \mathcal{A}_{\mathcal{S}}f, g \rangle_{L^2}| \leq c\|f\|_2\|g\|_2$.

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}_{\mathcal{S}}f, g \rangle_{L^2}| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q \in \mathcal{S}} |f|_Q \chi_Q(x) \overline{g(x)} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q \in \mathcal{S}} |f|_Q \chi_Q(x) |g(x)| dx \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{S}} |f|_Q \int_Q |g(x)| dx = \sum_{Q \in \mathcal{S}} |f|_Q |g|_Q |Q| \\ &\leq \frac{1}{\eta} \sum_{Q \in \mathcal{S}} |f|_Q |g|_Q |E_Q| = \frac{1}{\eta} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \int_{E_Q} |f|_Q |g|_Q dx \\ &\leq \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^d} Mf(x) Mg(x) dx \leq \frac{1}{\eta} \|Mf\|_2 \|Mg\|_2 \leq \frac{c_d^2}{\eta} \|f\|_2 \|g\|_2. \end{aligned}$$

Hecho este cálculo y tomando el supremo sobre todas las funciones $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con norma 1, obtenemos el resultado deseado. \square

A continuación damos la desigualdad con peso que resultará clave en la siguiente sección.

Proposición 4.12. *Sean $1 < p < \infty$ y $0 < \eta < 1$. Existe una constante $c_{d,p,\eta} > 0$ tal que para toda familia \mathcal{S} η -sparse y para todo peso $w \in A_p$ se tiene*

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq c_{d,p,\eta} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})}.$$

Demostración. Sea \mathcal{S} una familia η -sparse, y denotamos por E_Q el conjunto que aparece en la definición para $Q \in \mathcal{S}$. Para $w \in A_p$ denotamos por $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$ su peso dual. Para calcular la norma del operador $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ utilizaremos un argumento de dualidad. Por tanto, necesitamos dos funciones, f y g , que concretaremos más adelante a qué espacios tienen que pertenecer. Probemos las estimaciones

$$\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{w(3Q)} \int_Q g \right)^{p'} w(E_Q) \leq c_{d,p} \|g\|_{L^{p'}(\sigma)}^{p'}, \quad (4.3)$$

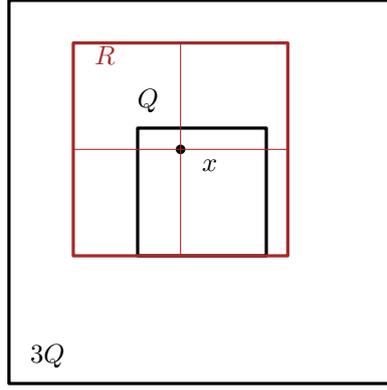
$$\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{\sigma(3Q)} \int_Q f \right)^p \sigma(E_Q) \leq c_{d,p} \|f\|_{L^p(w)}^p. \quad (4.4)$$

Primero de todo, probemos

$$\frac{1}{w(3Q)} \int_Q g(y) dy \leq \inf_{x \in Q} M_w^c(gw^{-1})(x), \quad (4.5)$$

donde M_w^c denota el operador maximal con peso w centrado

$$M_w^c(h)(x) = \sup_R \frac{1}{w(R)} \int_R h(y) w(y) dy,$$

Figura 4.1: Relación entre R , Q , y x .

donde el supremo se toma sobre todos los cubos R centrados en x . Para $x \in Q$, sea R el cubo con centro en x más pequeño que contenga a Q , como se muestra en la Figura 4.1. Entonces, $l(Q) \leq l(R) \leq 2l(Q)$ y $R \subset 3Q$. Así,

$$\frac{1}{w(3Q)} \int_Q g(y) dy \leq \frac{1}{w(R)} \int_R g(y) w^{-1}(y) w(y) dy \leq M_x^c(gw^{-1})(x),$$

lo que prueba (4.5). Probemos ahora (4.3).

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{w(3Q)} \int_Q g \right)^{p'} w(E_Q) &\leq \sum_{Q \in \mathcal{S}} \int_{E_Q} M_w^c(gw^{-1})^{p'} w \leq \|M_w^c(gw^{-1})\|_{L^{p'}(w)}^{p'} \\ &\leq c_{d,p} \|gw^{-1}\|_{L^{p'}(w)}^{p'} = c_{d,p} \|g\|_{L^{p'}(\sigma)}^{p'}, \end{aligned}$$

siendo la última desigualdad cierta porque $1 - p' = \frac{-1}{p-1}$. Probemos ahora (4.4). Notamos que la obtención de (4.5) ha sido independiente del peso w , por lo que seguirá siendo cierta para σ . Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{\sigma(3Q)} \int_Q f \right)^p \sigma(E_Q) &\leq \sum_{Q \in \mathcal{S}} \int_{E_Q} (M_\sigma^c(fw^{-1}))^p \sigma \\ &\leq \|M_\sigma^c(fw^{-1})\|_{L^p(\sigma)}^p \leq c_{d,p} \|fw^{-1}\|_{L^p(\sigma)}^p = c_{d,p} \|f\|_{L^p(w)}^p. \end{aligned}$$

Ponemos un nombre a la siguiente cantidad:

$$T_p(w, Q) = \frac{w(3Q)}{w(E_Q)^{1/p'}} \frac{\sigma(3Q)}{\sigma(E_Q)^{1/p}} \frac{1}{|Q|}.$$

Esta cantidad nos dará la dependencia que queremos en el peso,

$$\sup_{Q \in \mathcal{S}} T_p(w, Q) \leq c_{d,p,\eta} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})}, \quad (4.6)$$

siendo $c_{d,p,\eta}$ independiente de \mathcal{S} y de w . Para probar (4.6), probamos primero la desigualdad

$$|E_Q| \leq w(E_Q)^{\frac{1}{p}} \sigma(E_Q)^{1-\frac{1}{p}}.$$

En efecto, utilizando la desigualdad de Hölder,

$$|E_Q| = \int_{E_Q} w^{\frac{1}{p}} w^{-\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{E_Q} (w^{\frac{1}{p}})^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E_Q} (w^{-\frac{1}{p}})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} = w(E_Q)^{\frac{1}{p}} \sigma(E_Q)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Esto implica directamente que para $Q \in \mathcal{S}$, $|Q|^p \leq \eta^{-p} w(E_Q) \sigma(E_Q)^{p-1}$. Así obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{w(3Q)}{w(E_Q)} \left(\frac{\sigma(3Q)}{\sigma(E_Q)} \right)^{p-1} &\leq \eta^{-p} \frac{w(3Q)}{|Q|} \left(\frac{\sigma(3Q)}{|Q|} \right)^{p-1} \leq \left(\frac{3^d}{\eta} \right)^p \frac{w(3Q)}{|3Q|} \left(\frac{\sigma(3Q)}{|3Q|} \right)^{p-1} \\ &= c_{d,\eta,p} \left(\frac{1}{|3Q|} \int_{3Q} w \right) \left(\frac{1}{|3Q|} \int_{3Q} w^{1-p'} \right)^{p-1} \leq c_{d,p,\eta} [w]_{A_p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $Q \in \mathcal{S}$, tendremos

$$\begin{aligned} T_p(w, Q) &= \left[\frac{w(3Q)}{|Q|} \left(\frac{\sigma(3Q)}{|Q|} \right)^{p-1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{w(3Q)}{w(E_Q)} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{\sigma(3Q)}{|3Q|} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_{d,\eta,p} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \left(\frac{w(3Q)}{w(E_Q)} \right)^{\frac{1}{p'}} \left[\left(\frac{\sigma(3Q)}{|3Q|} \right)^{p-1} \right]^{\frac{1}{p} \frac{1}{p-1}} \\ &\leq c_{d,\eta,p} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} [w]_{A_p}^{\max(\frac{1}{p'}, \frac{1}{(p-1)p})} = c_{d,\eta,p} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})}. \end{aligned}$$

Estamos ya preparados para terminar la demostración. Para calcular $\|\mathcal{A}_S f\|_{L^p(w)}$, utilizamos que, por el teorema de Hahn-Banach y la dualidad entre L^p y $L^{p'}$, existe $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, con norma 1, tal que

$$\|\mathcal{A}_S f\|_{L^p(w)} = \|\mathcal{A}_S f w^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{A}_S f w^{\frac{1}{p}} h.$$

Así, llamando $g = h w^{\frac{1}{p}}$, se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_S f\|_{L^p(w)} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \chi_Q g \leq \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \left(\int_Q g \right) \\ &\leq \sup_{Q \in \mathcal{S}} T_p(w, Q) \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{T_p(w, Q)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \left(\int_Q g \right) \\ &\leq c_{d,p,\eta} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{\sigma(3Q)} \int_Q f \right) \sigma(E_Q)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{w(3Q)} \int_Q g \right) w(E_Q)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c_{d,p,\eta} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})} \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{\sigma(3Q)} \int_Q f \right)^p \sigma(E_Q) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{w(3Q)} \int_Q g \right)^{p'} w(E_Q) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c_{d,p,\eta} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})} \|f\|_{L^p(w)} \|h w^{\frac{1}{p}}\|_{L^{p'}(w)} \leq c_{d,p,\eta} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})} \|f\|_{L^p(w)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado las desigualdades (4.3) y (4.4), así como la desigualdad de Hölder para la medida de contar. \square

Observación 4.13. Hemos probado que para un valor de η fijo, toda operador η -sparse es acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_p$ con norma independiente de w y de la familia *sparse*. Esta uniformidad es importante porque necesitaremos acotar distintos operadores *sparse* que tengan el mismo coeficiente η en la siguiente sección.

4.3. Dominación de Calderón-Zygmund por operadores *sparse*

Como ya hemos comentado en la sección anterior, nuestro objetivo es utilizar los operadores *sparse* para obtener desigualdades con peso para operadores de Calderón-Zygmund.

En esta sección demostramos un teorema de dominación puntual de los operadores de Calderón-Zygmund por operadores *sparse*. Este teorema, demostrado por M.T. Lacey en [17], fue mejorado por T. Hytönen, L. Roncal y O. Tapiola en [16] para tener un mejor control sobre las constantes que aparecen. Presentamos aquí la prueba algo simplificada que da A.K. Lerner en [19].

Teorema 4.14 (Lacey-Hytonen-Roncal-Tapiola). *Sea T un operador de ω -Calderón-Zygmund tal que ω satisface la condición de Dini. Para cada función con soporte compacto $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, existe una familia *sparse* \mathcal{S} tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|Tf(x)| \leq c_d(\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} + C_K + \|\omega\|_{Dini})\mathcal{A}_{\mathcal{S}}|f|(x), \quad (4.7)$$

donde c_d denota una constante dimensional que no depende en T, f ni \mathcal{S} .

Con este teorema de dominación puntual es fácil demostrar el conocido como Teorema A_2 . Fue conjeturado en los años 80 (aparece mencionado en el artículo de Duoandikoetxea-Rubio de Francia [8]) y no fue probado hasta 2012 por Hytonen en [13]. La prueba de Hytonen no utiliza los operadores *sparse*, sino otra estrategia un poco más complicada basada en “dyadic shifts”. Fue Lacey quien dio la prueba con operadores *sparse* en 2015 en su artículo [17]. Antes de que Lacey diera su prueba en 2015, ya habían aparecido otros resultados de dominación para operadores de Calderón-Zygmund que implican el teorema A_2 : Lerner dio en 2012 [18] una dominación en norma; Lerner-Nazarov [20] y Conde-Rey [4] dieron en 2014 simultánea e independientemente una dominación puntual.

Teorema 4.15 (Teorema A_2). *Sea T un operador de ω -Calderón-Zygmund y $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$. Entonces*

$$\|T\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq c_d(\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} + C_K + \|\omega\|_{Dini})[w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})}.$$

Demostración del Teorema 4.15. Sabemos por el Teorema 4.3 que T es acotado en $L^p(w)$. Sea $f \in L^p(w)$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables con soporte compacto que converjan a f en la norma de $L^p(w)$. Para cada n , existe una familia *sparse* \mathcal{S}_n tal que

$$\|Tf_n\|_{L^p(w)} \leq c_d C_T \|\mathcal{A}_{\mathcal{S}_n} f_n\|_{L^p(w)} \leq c_d C_T \|f_n\|_{L^p(w)} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})}.$$

Tomando el límite, obtenemos

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c_d C_T [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})} \|f\|_{L^p(w)},$$

lo que finaliza la prueba. \square

Este teorema se conoce como Teorema A_2 , por un lado, porque en el caso en el que $p = 2$ se consigue dependencia lineal en la constante $[w]_{A_2}$; y, por otro lado, porque el probarlo para el caso $p = 2$ lo implicaría para el resto de valores de p , $1 < p < \infty$.

En la demostración del Teorema 4.14 entran en juego varios operadores que se definen a partir del operador T . \mathcal{M}_T denota el gran operador maximal truncado, definido por

$$\mathcal{M}_T f(x) = \sup_{Q \ni x} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in Q} |T(f\chi_{(3Q)^c})(\xi)|,$$

donde hemos tomado el supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x . Fijado un cubo Q_0 , la versión local del gran operador maximal truncado es

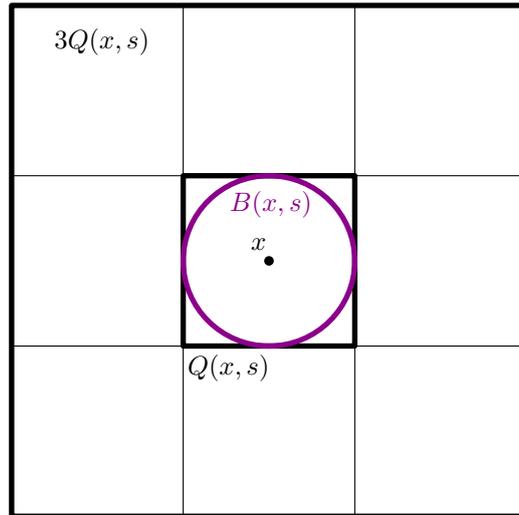
$$\mathcal{M}_{T, Q_0} f(x) = \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in Q} |T(f\chi_{(3Q)^c})(\xi)|.$$

Como en el capítulo anterior, aquí T^* denota el operador maximal truncado (estándar), definido por

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{|y-x|>0} K(x, y) f(y) dy \right|.$$

Como siempre, denotaremos por M el operador maximal de Hardy-Littlewood con respecto a los cubos con lados paralelos a los ejes.

Como es habitual, antes de la demostración del Teorema 4.14 demostraremos dos estimaciones puntuales para operadores de ω -Calderón-Zygmund.


 Figura 4.2: Esquema de $B(x, s)$ y $Q(x, s)$.

Lema 4.16. Para todo cubo Q_0 y para casi todo $x \in Q_0$, se tiene

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_d \|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} |f(x)| + \mathcal{M}_{T,Q_0} f(x).$$

Demostración. Sea x un punto interior de Q_0 que además sea de 'approximate continuity' de $T(f\chi_{3Q_0})$, como en [9]. Como esta es una función medible, casi todo punto de Q_0 es de 'approximate continuity'. Esto significa que para todo $\epsilon > 0$, el conjunto

$$E_s(x) = \{y \in B(x, s) : |T(f\chi_{3Q_0})(x) - T(f\chi_{3Q_0})(y)| < \epsilon\},$$

donde $B(x, s)$ denota la bola euclídea abierta de centro x y radio s , satisface

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|E_s(x)|}{|B(x, s)|} = 1.$$

Sea ahora $Q(x, s)$ el cubo centrado en x más pequeño que contenga a $B(x, s)$, como se ilustra en la Figura 4.2. Tomamos s suficientemente pequeño para que $Q(x, s) \subset Q_0$. Esto no supone pérdida de generalidad porque tomaremos el límite cuando s tiende a cero. Sea $\epsilon > 0$. Para casi todo $y \in E_s(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} |T(f\chi_{3Q_0})(x)| &\leq |T(f\chi_{3Q_0})(y)| + \epsilon \\ &\leq |T(f\chi_{3Q(x,s)})(y)| + |T(f\chi_{3Q_0 \setminus 3Q(x,s)})(y)| + \epsilon \\ &\leq |T(f\chi_{3Q(x,s)})(y)| + \mathcal{M}_{T,Q_0} f(x) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para casi todo $y \in E_s(x)$, tenemos

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq \text{ess inf}_{y \in E_s(x)} |T(f\chi_{3Q(x,s)})(y)| + \mathcal{M}_{T,Q_0} f(x) + \epsilon.$$

Llamamos $\lambda = \text{ess inf}_{y \in E_s(x)} |T(f\chi_{3Q(x,s)})(y)|$. Utilizando la desigualdad débil que satisface T ,

$$|E_s(x)| \leq |\{y \in E_s : |T(f\chi_{3Q(x,s)})(y)| > \lambda\}| \leq \frac{\|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f\chi_{3Q(x,s)}|,$$

lo que junto con la desigualdad anterior da

$$\begin{aligned} |T(f\chi_{3Q_0})(x)| &\leq \|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \frac{1}{|E_s(x)|} \int_{3Q(x,s)} |f| + \mathcal{M}_{T,Q_0} f(x) + \epsilon \\ &= \|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \frac{|B(x, s)| |3Q(x, s)|}{|E_s(x)| |B(x, s)|} \frac{1}{|3Q(x, s)|} \int_{3Q(x,s)} |f| + \mathcal{M}_{T,Q_0} f(x) + \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora, tomando el límite cuando s tiende a cero, por el teorema de diferenciación de Lebesgue y el hecho de que $|3Q(x, s)|/|B(x, s)|$ es constante, obtenemos

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_d \|T\|_{L^1 \rightarrow L^1, \infty} |f(x)| + \mathcal{M}_{T, Q_0} f(x) + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$. Esto termina la prueba del lema. \square

Lema 4.17. Para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{M}_T f(x) \leq c_d (\|\omega\|_{Dini} + C_K) Mf(x) + T^* f(x).$$

Demostración. Sean Q un cubo que contiene a x . Queremos ver que para casi todo $\xi \in Q$,

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus 3Q})(\xi)| \leq c_d (\|\omega\|_{Dini} + C_K) Mf(x) + T^* f(x).$$

Sea $B_x = \overline{B(x, 2diam(Q))}$. Así, $3Q \subset B_x$, ya que si $y \in 3Q$, $|x - y| \leq 2diam(Q)$. Tenemos

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus 3Q})(\xi)| \leq |T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_x})(\xi) - T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_x})(x)| + |T(f\chi_{B_x \setminus 3Q})(\xi)| + |T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_x})(x)|.$$

Para acotar el primer sumando utilizamos la condición de suavidad.

$$\begin{aligned} |T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_x})(\xi) - T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_x})(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_x} (K(\xi, y) - K(x, y)) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{|y-x| > 2diam(Q)} |K(\xi, y) - K(x, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \int_{|y-x| > 2diam(Q)} |f(y)| \omega \left(\frac{|\xi - x|}{|x - y|} \right) \frac{1}{|x - y|^d} dy \\ &\leq \int_{|y-x| > 2diam(Q)} |f(y)| \omega \left(\frac{diam(Q)}{|x - y|} \right) \frac{1}{|x - y|^d} dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}diam(Q) > |y-x| > 2^k diam(Q)} |f(y)| \omega \left(\frac{diam(Q)}{|x - y|} \right) \frac{1}{|x - y|^d} dy \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega(2^{-k}) \frac{1}{(2^k diam(Q))^d} \int_{2^{k+1}diam(Q) > |y-x|} |f(y)| dy \\ &\leq c_d Mf(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega(2^{-k}) \leq c_d \|\omega\|_{Dini} Mf(x), \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que la versión con cubos del operador maximal de Hardy-Littlewood es equivalente a su versión con bolas y el Lema 3.26. Acotamos a continuación el segundo sumando. Si $y \in B_x \setminus 3Q$, entonces $|y - \xi| \geq diam(Q)$ para todo $\xi \in Q$. Entonces

$$\begin{aligned} |T(f\chi_{B_x \setminus 3Q})(\xi)| &= \left| \int_{B_x \setminus 3Q} K(\xi, y) f(y) dy \right| \leq \int_{B_x \setminus 3Q} |K(\xi, y)| |f(y)| dy \\ &\leq C_K \int_{B_x \setminus 3Q} \frac{|f(y)|}{|y - \xi|^d} dy \leq \frac{C_K}{(diam(Q))^d} \int_{B_x} |f(y)| dy \\ &\leq c_d C_K \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| dy \leq c_d C_K Mf(x). \end{aligned}$$

El tercer sumando está claramente acotado por $T^* f(x)$, con lo que concluimos

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus 3Q})(\xi)| \leq c_d (\|\omega\|_{Dini} + C_K) Mf(x) + T^* f(x). \quad \square$$

4.3.1. Demostración del Teorema 4.14

Proposición 4.18. *Sea $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$ un cubo. Existe una familia \mathcal{F} $\frac{1}{2}$ -sparse de cubos diádicos a Q_0 tal que para casi todo $x \in Q_0$,*

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_d C_T \sum_{Q \in \mathcal{F}} |f|_{3Q} \chi_Q(x).$$

Demostración. Sean P_j cubos disjuntos pertenecientes al retículo diádico generado por Q_0 y contenidos en Q_0 . Se tiene, puntualmente en casi todo punto,

$$\begin{aligned} |T(f\chi_{3Q_0})|_{\chi_{Q_0}} &\leq |T(f\chi_{3Q_0})|_{\chi_{Q_0 \setminus \cup_j P_j}} + \sum_j |T(f\chi_{3Q_0})|_{\chi_{P_j}} \\ &\leq |T(f\chi_{3Q_0})|_{\chi_{Q_0 \setminus \cup_j P_j}} + \sum_j \left(|T(f\chi_{3Q_0 \setminus \cup_j 3P_j})| + |T(f\chi_{3P_j})| \right) \chi_{P_j}. \end{aligned}$$

Queremos hacer una selección de los cubos P_j para tener la desigualdad

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)|_{\chi_{Q_0}}(x) \leq c_d C_T |f|_{3Q_0} + \sum_j |T(f\chi_{3P_j})(x)|_{\chi_{P_j}}(x), \quad \text{c.t.a. } x \in Q_0.$$

Para ello, hemos de acotar

$$|T(f\chi_{3Q_0})|_{\chi_{Q_0 \setminus \cup_j P_j}} + \sum_j |T(f\chi_{3Q_0 \setminus \cup_j 3P_j})|_{\chi_{P_j}} \leq c_d C_T |f|_{3Q_0}.$$

Para ello, elegimos $\gamma_d > 0$ suficientemente pequeña para que el conjunto

$$E = \{x \in Q_0 : |f(x)| > \gamma_d |f|_{3Q_0}\} \cup \{x \in Q_0 : \mathcal{M}_{T, Q_0} f(x) > \gamma_d C_T |f|_{3Q_0}\}$$

satisfaga $|E| \leq \frac{1}{2^{d+2}} |Q_0|$. Esto lo podemos hacer ya que si llamamos $E = A \cup B$, de la manera evidente, entonces

$$|A| \leq \int_{Q_0} \frac{|f(x)|}{\gamma_d |f|_{3Q_0}} dx \leq \frac{|3Q_0|}{\gamma_d} \frac{\int_{Q_0} |f(x)| dx}{\int_{3Q_0} |f(y)| dy} \leq \frac{|Q_0|}{3^d \gamma_d},$$

y podemos hacer el conjunto A tan pequeño como queramos. Para acotar el conjunto B utilizamos el Lema 4.17 para concluir

$$\|\mathcal{M}_{T, Q_0}\|_{L^1 \rightarrow L^{1, \infty}} \leq \alpha_d C_T,$$

para cierta constante dimensional α_d . Así,

$$|B| \leq \frac{\alpha_d C_T}{\gamma_d C_T |f|_{3Q_0}} \int_{Q_0} |f| \leq 3^d \frac{\alpha_d}{\gamma_d} |Q_0|,$$

con lo que podemos hacer el conjunto B tan pequeño como queramos. En particular, decidimos $|E| \leq |A| + |B| \leq \frac{1}{2^{d+2}} |Q_0|$. Ahora hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund en el retículo diádico de Q_0 respecto de la función χ_E a altura $\lambda = \frac{1}{2^{d+1}}$. Obtenemos una familia de cubos disjuntos $\{R_j\}$ tales que

- (i) $\frac{1}{2^{d+1}} |P_j| \leq \|\chi_E\|_{L^1(P_j)} = |E \cap P_j| \leq \frac{1}{2} |P_j|$;
- (ii) para casi todo $x \in Q_0 \setminus \cup_j P_j$, se tiene $\chi_E(x) \leq \frac{1}{2^{d+1}} < 1$, luego $\chi_E(x) = 0$;
- (iii) $|\cup_j P_j| \leq 2^{d+1} |E| \leq \frac{1}{2} |Q_0|$.

Como consecuencia de (ii) vemos que $|E \setminus \cup_j P_j| = 0$. Por (i), en cambio, vemos que $|E^c \cap P_j| \neq \emptyset$. Luego, existe $x \in P_j$ tal que $\mathcal{M}_{T, Q_0} f(x) \leq \gamma_d C_T |f|_{3Q_0}$. En particular,

$$\text{ess sup}_{\xi \in P_j} |T(f\chi_{3Q_0 \setminus 3P_j})(\xi)| \leq \gamma_d C_T |f|_{3Q_0}.$$

Entonces, como los P_j son disjuntos dos a dos, obtenemos que para casi todo $x \in Q_0$,

$$\sum_j |T(f\chi_{3Q_0 \setminus 3P_j})(x)| \chi_{P_j}(x) \leq \gamma_d C_T |f|_{3Q_0}.$$

Por otro lado, utilizamos el Lema 4.16 para obtener la desigualdad en casi todo punto $x \in Q_0$

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_d C_T |f|_{3Q_0},$$

lo que termina de probar

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \chi_{Q_0}(x) \leq c_d C_T |f|_{3Q_0} + \sum_j |T(f\chi_{3P_j})(x)| \chi_{P_j}(x), \quad \text{c.t. } x \in Q_0.$$

Finalizamos la demostración repitiendo este proceso de manera iterativa. Esto es posible porque los cubos obtenidos forman una parte grande de Q , concretamente, $|Q| \leq 2|\cup_j P_j|$. Ponemos, para el primer cubo, $E_Q = Q \setminus \cup_j P_j$. Para cada P_j , podemos repetir el argumento que hemos hecho para Q , y obtendríamos una colección contable de cubos R_k^j , disjuntos dos a dos, que cumplen $|P_j| \leq 2|\cup_k R_k^j|$ y también

$$|T(f\chi_{3P_j})(x)| \chi_{Q_0}(x) \leq c_d C_T |f|_{3P_j} + \sum_k |T(f\chi_{3R_k^j})(x)| \chi_{R_k^j}(x), \quad \text{c.t. } x \in R_j.$$

Entonces, ponemos $E_{P_j} = P_j \setminus \cup_k R_k^j$. Renombrando los cubos, ponemos $\mathcal{S}_1 = \{Q_0\} \cup \{P_j\}_j$ y $\mathcal{R}_1 = \{R_k^j\}_{j,k}$, obtenemos

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \chi_{Q_0}(x) \leq c_d C_T \sum_{P \in \mathcal{S}_1} |f|_{3P} + \sum_{R \in \mathcal{R}_1} |T(f\chi_{3R})(x)| \chi_R(x), \quad \text{c.t. } x \in Q_0.$$

Podemos repetir el argumento de manera iterativa. Esto es así porque el término de resto tiende a cero en casi todo punto, al ser el término de resto en la t -ésima iteración $|\cup_{R \in \mathcal{R}_t} R| \leq 2^{-t}|Q|$, lo que tiende a cero cuando t tiende a infinito. Poniendo $\mathcal{F} = \cup_{t \geq 1} \mathcal{S}_t$, obtenemos la familia del enunciado. \square

Finalmente estamos preparados para probar el Teorema 4.14. Tomemos una partición de \mathbb{R}^d formada por cubos R_j tal que $\text{sop}(f) \subset 3R_j$ para todo j . Podemos hacer esto, por ejemplo, de la siguiente manera, ilustrada en la Figura 4.3. Sea Q_0 un cubo que contenga al soporte de f (recordemos que f tiene soporte compacto.) El cubo $3Q_0$ se divide en 3^d cubos disjuntos $R_0 = Q_0, R_1, \dots, R_{3^d-1}$, tales que $\text{sop}(f) \subset Q_0 \subset 3R_j$ para todo $j = 0, \dots, 3^d - 1$.

Numerándolos, obtenemos una familia $\{R_j\}_{j=1}^\infty$ de cubos disjuntos tales que $\text{sop}(f) \subset 3R_j$ para todo $j \geq 1$. Aplicamos la Proposición 4.18 al cubo R_j para cada $j \geq 1$ y obtenemos una sucesión de familias $\frac{1}{2}$ -sparse \mathcal{F}_j tales que

$$|Tf(x)| \leq c_d C_T \sum_{Q \in \mathcal{F}_j} |f|_{3Q} \chi_Q(x), \quad \text{c.t. } x \in R_j$$

para cada $j \geq 1$. Esto es porque $\text{sop}(f) \subset 3R_j$, con lo que $f\chi_{3R_j} = f$. Es más, si $j_1 \neq j_2$ y $Q_1 \in \mathcal{F}_{j_1}$, $Q_2 \in \mathcal{F}_{j_2}$, entonces Q_1 y Q_2 son cubos disjuntos, ya que lo eran R_{j_1} y R_{j_2} . Por tanto, si cogemos la familia $\mathcal{F} = \cup_{j \geq 1} \mathcal{F}_j$ será una familia $\frac{1}{2}$ -sparse y se cumplirá

$$|Tf(x)| \leq c_d C_T \sum_{Q \in \mathcal{F}} |f|_{3Q} \chi_Q(x), \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Ahora, cogiendo la familia $\mathcal{S} = \{3Q : Q \in \mathcal{F}\}$, que es trivialmente $\frac{1}{3^{d/2}}$ -sparse, obtenemos

$$|Tf(x)| \leq c_d C_T \sum_{Q \in \mathcal{S}} |f|_{Q} \chi_{\frac{1}{3}Q}(x) \leq c_d C_T \mathcal{A}_{\mathcal{S}} f(x), \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Con este cálculo queda finalmente demostrado el Teorema 4.14.

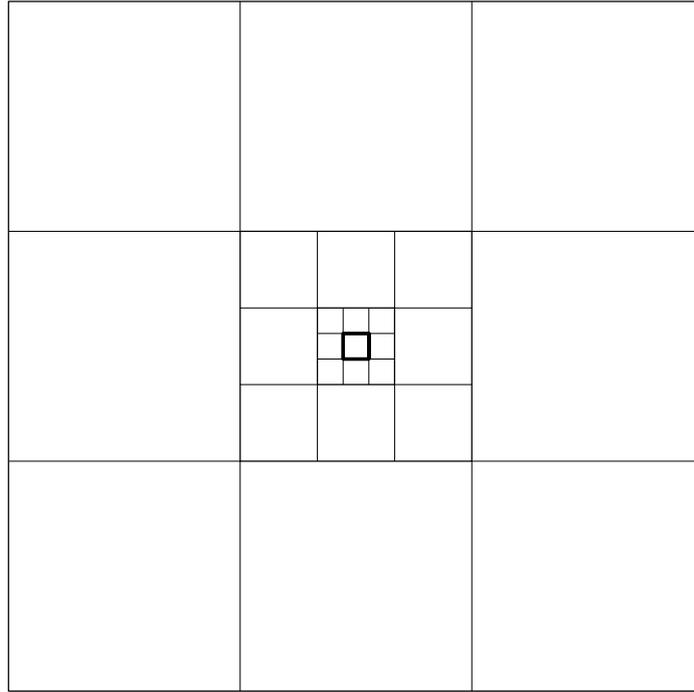


Figura 4.3: Construcción de la partición de \mathbb{R}^d por cubos.

4.4. Cuantificación para las integrales singulares *rough*

En el teorema de dominación por operadores *sparse* para operadores de Calderón-Zygmund hemos utilizado la suavidad de tipo Dini del núcleo del operador para encontrar la familia *sparse* que nos da la dominación. Cuando trabajamos con integrales singulares *rough* no tenemos esa suavidad, por lo que no podemos argumentar de la misma manera.

Recordemos cómo se definen las integrales *rough*. Sea $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{d-1})$ de media nula. El operador integral singular *rough* asociado a Ω es el operador

$$T_\Omega f(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} f(x-y) dy,$$

donde $y' = \frac{y}{|y|}$. Demostramos en el capítulo anterior que si $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{d-1})$ para algún $q > 1$ entonces T_Ω es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < p < \infty$. El resultado de esta sección es recogido en el siguiente

Teorema 4.19. *Sea $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ con media nula. Entonces, si $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$, se tiene la desigualdad*

$$\|T_\Omega\|_{L^p(w)} \leq c_d \|\Omega\|_\infty (w)_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})}.$$

Nótese que pedimos $\Omega \in L^\infty$. La demostración que damos de este resultado es bastante larga, de manera que la haremos a lo largo de esta sección. Combinando este Teorema con la ecuación (2.12) obtenemos el siguiente

Corolario 4.20. *Sea $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ con media nula. Entonces, si $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$, se tiene la desigualdad*

$$\|T_\Omega\|_{L^p(w)} \leq c_d \|\Omega\|_\infty [w]_{A_p}^{\max(2, \frac{2}{p-1})}.$$

En particular, para $p = 2$ se tiene

$$\|T_\Omega\|_{L^2(w)} \leq c_d \|\Omega\|_\infty [w]_{A_2}^2.$$

Esto contrasta con el Teorema A_2 , 4.15, en el que conseguíamos una dependencia lineal en la constante $[w]_{A_2}$: aquí obtenemos una dependencia cuadrática, que es peor (recordemos que $[w]_{A_p} \geq 1$ siempre).

El argumento que utilizaremos se basa en expresar T_Ω como suma de una serie de operadores de Calderón-Zygmund de manera que podamos acotar cada sumando utilizando el resultado de la sección anterior y, al tomar el límite, tendremos acotado T_Ω .

Como T_Ω se expresa mediante un valor principal, podemos escribir

$$T_\Omega f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_k * f, \quad (4.8)$$

siendo

$$K_k(y) = \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \chi_{2^k < |y| < 2^{k+1}}(y).$$

Para el núcleo truncado de esta manera, tenemos las siguientes cotas que se obtienen de manera sencilla, como está en el artículo [8]. El lema se sigue cumpliendo bajo unas condiciones de integrabilidad más débiles, pero necesitaremos que Ω esté acotada para obtener más tarde las desigualdades con peso que deseamos.

Lema 4.21. *Existe una constante α independiente de Ω y k tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$|\hat{K}_k(\xi)| \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \min(|2^k \xi|^\alpha, |2^k \xi|^{-\alpha}).$$

Sea ahora $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una función con soporte en $\{x : |x| < \frac{1}{100}\}$, con $\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 0$. Entonces $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ y definimos $\psi \in \mathcal{S}$ mediante

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi) - \hat{\phi}(2\xi).$$

De esta manera, $\int \psi = \hat{\psi}(0) = 0$. Para $j \in \mathbb{Z}$, escribimos

$$\phi_j(x) = \frac{1}{2^{jd}} \phi\left(\frac{x}{2^j}\right), \quad \psi_j(x) = \frac{1}{2^{jd}} \psi\left(\frac{x}{2^j}\right).$$

Definimos asimismo los operadores suma parcial

$$S_j f = f * \phi_j,$$

con lo que, tomando la transformada de Fourier,

$$S_j f - S_{j+1} f = f * \psi_j.$$

Claramente, se tiene $S_j f \rightarrow f$ cuando $j \rightarrow -\infty$, con lo que vemos

$$T_k = T_k S_k + \sum_{j=1}^{\infty} T_k (S_{k-j} - S_{k-(j-1)}).$$

Asimismo, si $(N(j))_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente de enteros tal que $N(0) = 0$, se tiene

$$T_k = T_k S_k + \sum_{j=1}^{\infty} T_k (S_{k-N(j)} - S_{k-N(j-1)}).$$

Definimos ahora los siguientes operadores, que son los que nos permitirán aproximar T_Ω .

$$\tilde{T}_0 = \tilde{T}_0^N = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k S_k;$$

$$\tilde{T}_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k (S_{k-j} - S_{k-(j-1)}), \quad j \geq 1;$$

$$\tilde{T}_j^N = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k(S_{k-N(j)} - S_{k-N(j-1)}), \quad j \geq 1.$$

De esta manera, tenemos

$$T_\Omega = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_j^N,$$

donde se puede hacer el cambio de orden de sumación porque, como demostraremos más adelante, todas las series convergen absolutamente.

Lema 4.22 (Estimaciones sin peso para \tilde{T}_j y \tilde{T}_j^N en L^2).

$$\|\tilde{T}_j f\|_{L^2} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-j\alpha} \|f\|_{L^2}, \quad (4.9)$$

$$\|\tilde{T}_j^N f\|_{L^2} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-\alpha N(j-1)} \|f\|_{L^2}, \quad (4.10)$$

donde α es la constante del Lema 4.21, independiente de T_Ω y de la función f , donde $N(-1) = 0$.

Demostración. Tráramos primero el caso $j \geq 1$ y para \tilde{T}_j . Por el teorema de Plancherel, podemos tomar la transformada de Fourier para hacer el cálculo:

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_j f)^\wedge(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (T_k(S_{k-j} - S_{k-(j-1)}))^\wedge(\xi) \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{K}_k(\xi) \hat{\psi}(2^{k-j}\xi) \right) \hat{f}(\xi) = m_j(\xi) \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Ahora, como $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\hat{\psi}(0) = 0$, por el teorema del valor medio existe una constante $C > 0$ (que depende de ψ únicamente) tal que $|\hat{\psi}(\xi)| \leq C \min(|\xi|, 1)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, con lo que

$$|\hat{\psi}(2^{k-j}\xi)| \leq C \min(|2^{k-j}\xi|, 1).$$

Utilizando el Lema 4.21 vemos

$$|\hat{K}_k(\xi)| |\hat{\psi}(2^{k-j}\xi)| \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} |2^k \xi|^{-\alpha} \min(|2^{k-j}\xi|, 1).$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} |m_j(\xi)| &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2^k \xi|^{-\alpha} \min(|2^{k-j}\xi|, 1) \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \left(\sum_{2^k |\xi| \leq 2^j} |2^k \xi|^{-\alpha} |2^{k-j}\xi| + \sum_{2^k |\xi| \geq 2^j} |2^k \xi|^{-\alpha} \right) \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \left(2^{-j} \sum_{2^k |\xi| \leq 2^j} |2^k \xi|^{1-\alpha} + \sum_{2^k |\xi| \geq 2^j} |2^k \xi|^{-\alpha} \right) \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} (2^{-j} (2^j)^{1-\alpha} + (2^j)^{-\alpha}) = c_d \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-j\alpha}. \end{aligned}$$

Entonces $\|m_j\|_{L^\infty} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-j\alpha}$, y por el teorema de Plancherel,

$$\|\tilde{T}_j f\|_{L^2} = \|(\tilde{T}_j f)^\wedge\|_{L^2} = \|m_j(\xi) \hat{f}\|_{L^2} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-j\alpha} \|f\|_{L^2}.$$

El caso para \tilde{T}_j^N es sencillo teniendo en cuenta que $\tilde{T}_j^N = \sum_{l=N(j-1)+1}^{N(j)} \tilde{T}_l$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_j^N\|_{L^2} &\leq \sum_{l=N(j-1)+1}^{N(j)} \|\tilde{T}_l\|_{L^2} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \sum_{l=N(j-1)+1}^{N(j)} 2^{-l\alpha} \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-\alpha(N(j-1)+1)} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-\alpha N(j-1)}. \end{aligned}$$

Falta el caso para $j = 0$. En este caso tenemos $\tilde{T}_0 = \tilde{T}_0^N$. Se tiene

$$(\tilde{T}_0 f)^\wedge = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{K}_k \hat{\phi}_k \hat{f},$$

por lo que es suficiente con estimar $|\hat{K}_k(\xi)| |\hat{\phi}_k(\xi)|$. Como $\hat{\phi}$ es acotado (pues $\phi \in \mathcal{S}$, tenemos

$$|\hat{K}_k(\xi)| |\hat{\phi}_k(\xi)| \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \min(|2^k \xi|, |2^k \xi|^{-1})^\alpha.$$

Para acotar la suma, lo hacemos como en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{K}_k(\xi)| |\hat{\phi}_k(\xi)| &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \min(|2^k \xi|, |2^k \xi|^{-1})^\alpha \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \left(\sum_{|2^k \xi| \leq |2^k \xi|^{-1}} |2^k \xi|^\alpha + \sum_{|2^k \xi|^{-1} \leq |2^k \xi|} |2^k \xi|^{-\alpha} \right) \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \left(|\xi|^\alpha \sum_{2^k \leq |\xi|^{-1}} 2^{k\alpha} + |\xi|^{-\alpha} \sum_{2^{-k} \leq |\xi|} 2^{-k\alpha} \right) \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Así, utilizando otra vez el teorema de Plancherel, obtenemos el resultado deseado. \square

Ahora que tenemos las acotaciones en L^2 , vemos que los operadores \tilde{T}_j^N son operadores de Calderón-Zygmund. Esto es lo que nos permitirá utilizar el Teorema A_2 demostrado en la sección anterior.

Lema 4.23. *Los operadores \tilde{T}_j^N son operadores de ω -Calderón-Zygmund con parámetros*

$$C_j^N := C_{\tilde{T}_j^N} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty},$$

$$\omega_j^N(t) = \omega_{\tilde{T}_j^N}(t) \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \min(1, 2^{N(j)} t),$$

que satisface $\|\omega_j^N\|_{Dini} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + N(j))$.

Demostración. La primera condición que tienen que cumplir los operadores de Calderón-Zygmund es ser acotados en L^2 , lo que está probado en el lema anterior. Tenemos que precisar cuál es el núcleo de estos operadores. Primero damos las estimaciones precisas para los núcleos de los operadores $T_k S_{k-N(j)}$, que son $K_k * \phi_k - N(j)$. Teniendo en cuenta que $\text{sop} \phi \subset \{|x| < \frac{1}{100}\}$, y que ϕ es positiva con $\int \phi = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |K_k * \phi_{k-N(j)}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \chi_{2^k < |y| < 2^{k+1}} 2^{-(k-N(j))d} \phi\left(\frac{x-y}{2^{k-N(j)}}\right) dy \right| \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{1}{|x|^d} \chi_{2^{k-1} < |x| < 3 \cdot 2^k} \int_{\mathbb{R}^d} 2^{-(k-N(j))d} \left| \phi\left(\frac{x-y}{2^{k-N(j)}}\right) \right| dy \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{1}{|x|^d} \chi_{2^{k-1} < |x| < 3 \cdot 2^k}. \end{aligned}$$

Así, para el núcleo $\sum_k K_k * \phi_{k-N(j)}$, tendremos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |K_k * \phi_{k-N(j)}(x)| \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|x|^d} \chi_{2^{k-1} < |x| < 3 \cdot 2^k} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{1}{|x|^d},$$

lo que nos da la condición de tamaño que queríamos para el núcleo. Para la condición de regularidad, calculamos el gradiente de los $K_k * \phi_{k-N(j)}$. Ahora, tenemos, de manera similar a la de antes,

$$\begin{aligned} |\nabla K_k * \phi_{k-N(j)}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Omega(y')}{|y|^d} \chi_{2^k < |y| < 2^{k+1}} 2^{-(k-N(j))d} \nabla \phi \left(\frac{x-y}{2^{k-N(j)}} \right) dy \right| \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{1}{|x|^d} \chi_{2^{k-1} < |x| < 3 \cdot 2^k} \int_{\mathbb{R}^d} 2^{-(k-N(j))d} \left| \nabla \phi \left(\frac{x-y}{2^{k-N(j)}} \right) \right| dy \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{1}{|x|^d} \chi_{2^{k-1} < |x| < 3 \cdot 2^k} 2^{-(k-N(j))} \\ &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{1}{|x|^{d+1}} \chi_{2^{k-1} < |x| < 3 \cdot 2^k} 2^{N(j)}, \end{aligned}$$

por lo que tenemos la estimación

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\nabla K_k * \phi_{k-N(j)}(x)| \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{2^{N(j)}}{|x|^{d+1}}.$$

Ahora, el núcleo asociado al operador \tilde{T}_j^N es

$$K_j^N = \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_k * (\phi_{k-N(j)} - \phi_{k-N(j-1)}),$$

para el que, por tanto, tenemos las estimaciones

$$\begin{aligned} |K_j^N(x, y)| &= |K_j^N(x-y)| \leq c_d \frac{\|\Omega\|_{L^\infty}}{|x-y|^d}; \\ |\nabla K_j^N(x-y)| &\leq c_d \frac{\|\Omega\|_{L^\infty}}{|x-y|^{d+1}} 2^{N(j)}, \end{aligned}$$

siendo esta última porque $N(j) > N(j-1)$. La primera de estas estimaciones nos da la condición de tamaño que queríamos; la condición de regularidad de Dini será consecuencia de la segunda. Si $|x-x'| \leq \frac{1}{2}|x-y|$, tenemos por un lado

$$\begin{aligned} |K_j^N(x, y) - K_j^N(x', y)| &= |K_j^N(x-y) - K_j^N(x'-y)| \\ &\leq |x-x'| \sup_{t \in [0,1]} |\nabla K_j^N(tx + (1-t)x' - y)| \\ &\leq |x-x'| \sup_{t \in [0,1]} c_d \frac{\|\Omega\|_{L^\infty}}{|tx + (1-t)x' - y|^{d+1}} 2^{N(j)} \\ &\leq c_d \frac{\|\Omega\|_{L^\infty}}{|x-y|^d} 2^{N(j)} \frac{|x-x'|}{|x-y|}, \end{aligned}$$

ya que para $t \in [0, 1]$ se tiene

$$\frac{1}{2}|x-y| \leq |tx + (1-t)x' - y| \leq \frac{3}{2}|x-y|,$$

lo que se ve sencillamente teniendo en cuenta $|x-x'| \leq \frac{1}{2}|x-y|$. Por otro lado, y utilizando esta última estimación y la condición de tamaño, tenemos

$$|K_j^N(y, x) - K_j^N(y, x')| \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \left(\frac{1}{|x-y|^d} - \frac{1}{|x'-y|^d} \right) \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \frac{1}{|x-y|^d}.$$

Si escribimos $\omega_j^N(t) = c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \min(1, 2^{N(j)}t)$, tenemos claramente

$$|K_j^N(x, y) - K_j^N(x', y)| + |K_j^N(y, x) - K_j^N(y, x')| \leq \omega_j^N \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|} \right) \frac{1}{|x-y|^d},$$

lo que nos da la condición de regularidad de Dini deseada ya que el módulo de continuidad ω_j^N satisface

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_j^N(t) \frac{dt}{t} &= c_d \|\Omega\|_{L^\infty} \left(\int_0^{2^{-N(j)}} 2^N(j) dt + \int_{2^{-N(j)}}^1 \frac{dt}{t} \right) \\ &= c_d \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + \log 2^{N(j)}) \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + N(j)). \end{aligned}$$

Así, queda demostrado $\|\omega_j^N\|_{\text{Dini}} \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + N(j))$. \square

A continuación damos una desigualdad con peso para los operadores \tilde{T}_j^N , que utilizaremos más adelante en la demostración del Teorema 4.19.

Lema 4.24. *Sea $1 < p < \infty$. Para todo $w \in A_p$, se tiene*

$$\|\tilde{T}_j^N f\|_{L^p(w)} \leq c_{d,p} \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + N(j)) \|f\|_{L^p(w)} [w]_{A_p}^{\max(1, p' - 1)}.$$

Demostración. Como prueba el Lema 4.23, los operadores \tilde{T}_j^N son de ω -Calderón-Zygmund y por tanto podemos aplicar el Teorema 4.15 para obtener

$$\|\tilde{T}_j^N\|_{L^2(w) \rightarrow L^2(w)} \leq c_d (\|\tilde{T}_j^N\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} + C_j^N + \|\omega_j^N\|_{\text{Dini}}) [w]_{A_p}^{\max(1, p' - 1)}.$$

Sustituimos las estimaciones de los Lemas 4.22 y 4.23 para obtener

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_j^N\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} &\leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty} (2^{-\alpha N(j-1)} + 1 + (1 + N(j))) [w]_{A_p}^{\max(1, p' - 1)} \\ &\leq c_{d,p} \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + N(j)) \|f\|_{L^p(w)} [w]_{A_p}^{\max(1, p' - 1)}. \end{aligned} \quad \square$$

En el siguiente lema, damos una desigualdad sin peso, la última que necesitaremos par probar el Teorema 4.19.

Lema 4.25. *Si $1 < p < \infty$, se tiene*

$$\|\tilde{T}_j^N f\|_{L^p} \leq c_{d,p} \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-\alpha_p N(j-1)} (1 + N(j)) \|f\|_{L^p},$$

siendo α_p una constante independiente de T_Ω , la función f y la sucesión N .

Demostración. Si en el Lema 4.24 elegimos $w \equiv 1$, se tiene $[1]_{A_q} = 1$ y tenemos la estimación

$$\|\tilde{T}_j^N\|_{L^q \rightarrow L^q} \leq c_{d,q} \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + N(j)).$$

Queremos interpolar entre esta última estimación y la obtenida en (4.10) utilizando la interpolación del Teorema 1.8. Si $2 < p$, elegimos $q = 2p$ de tal manera que $2 < p < q$. Para $\lambda = \frac{p-2}{p-1}$ se tiene

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{2},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_j^N\|_{L^p \rightarrow L^p} &\leq (c_d \|\Omega\|_{L^\infty} (1 + N(j)))^{\frac{p-2}{p-1}} \left(c_{d,q} \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{-\alpha N(j-1)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq c_{d,p} \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{\alpha_p N(j-1)} (1 + N(j)), \end{aligned}$$

donde $\alpha_p = \alpha/(p-1) < \alpha$. Ahora, si $2 < p$, elegimos $q = \frac{2p}{p+1}$, de manera que $1 < q < p < 2$, y podemos volver a utilizar el Teorema 1.8 con $\lambda = 2 - p$ para que una vez más

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{2}.$$

La estimación que obtenemos ahora es

$$\|\tilde{T}_j^N\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq c_{d,p} \|\Omega\|_{L^\infty} 2^{\alpha_p N(j-1)} (1 + N(j)),$$

siendo ahora $\alpha_p = \alpha(p-1) < \alpha$, con lo que queda probado el lema. \square

Finalmente, tenemos todas las herramientas a punto para terminar de demostrar el Teorema 4.19.

Demostración del Teorema 4.19. Sea $\epsilon = 2^{-d-1}/(w)_{A_p}$, de manera que por el Corolario 2.22 tenemos $[w^{1+\epsilon}]_{A_p} \leq 4[w]_{A_p}^{1+\epsilon}$. Aplicamos el Teorema 1.9 a cada uno de los operadores \tilde{T}_j^N con $p_0 = p_1 = 0$, $w_0 = 1$, $w_1 = w^{1+\epsilon}$; de manera que como ha de ser $w = w^{(1+\epsilon)\lambda}$, se tiene $\lambda = 1/(1+\epsilon)$. Así, utilizando las estimaciones de los Lemas 4.24 y 4.25, tendremos

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_j^N\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} &\leq \left(c_{d,p}\|\Omega\|_{L^\infty} 2^{\alpha_p N(j-1)}\right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \left(c_d\|\Omega\|_{L^\infty} (1+N(j))[w^{1+\epsilon}]_{A_p}^{\max(1,p'-1)}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ &\leq c_{d,p}\|\Omega\|_{L^\infty} (1+N(j)) 2^{-\beta_p \frac{N(j)}{(w)_{A_p}}} [w]_{A_p}^{\max(1,p'-1)}, \end{aligned}$$

ya que $\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \geq c/(w)_{A_p}$ y hemos renombrado las constantes. Así, se tiene

$$\|T_\Omega\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{T}_j^N\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq c_{d,p}\|\Omega\|_{L^\infty} [w]_{A_p}^{\max(1,p'-1)} \sum_{j=0}^{\infty} (1+N(j)) 2^{-\beta_p \frac{N(j)}{(w)_{A_p}}},$$

y la prueba estará finalizada cuando probemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1+N(j)) 2^{-\beta_p \frac{N(j)}{(w)_{A_p}}} \leq C(w)_{A_p}.$$

Para probar esta última igualdad, precisamos por fin la sucesión N . Elegimos $N(j) = 2^j$ si $j \geq 1$ y $N(0) = N(-1) = 0$, para que las fórmulas tengan sentido. Así,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1+N(j)) 2^{-\beta_p \frac{N(j)}{(w)_{A_p}}} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^j 2^{-\beta_p \frac{2^j}{(w)_{A_p}}} = C \sum_{2^j \leq (w)_{A_p}} 2^j + C \sum_{2^j \geq (w)_{A_p}} 2^{j+1} 2^{-\beta_p \frac{2^j}{(w)_{A_p}}}.$$

El primer sumando es claramente menor que $(w)_{A_p}$. Para el segundo utilizamos la desigualdad $2^{-x} \leq cx^{-2}$ si $x \geq 0$ con lo que

$$\sum_{2^j \geq (w)_{A_p}} 2^{j+1} 2^{-\beta_p \frac{2^j}{(w)_{A_p}}} \leq c \sum_{2^j \geq (w)_{A_p}} 2^{j+1} \left(\beta_p \frac{2^j}{(w)_{A_p}}\right)^{-2} = c(w)_{A_p}^2 \sum_{2^j \geq (w)_{A_p}} 2^{-j} \leq c(w)_{A_p}.$$

Con esto queda probado el teorema, y justificado el cambio de sumación que comentamos justo antes del enunciado del Lema 4.22. \square

Observación 4.26. Hemos obtenido el resultado deseado escogiendo de manera adecuada la sucesión $N(j)$, pero no podríamos haber obtenido un resultado mejor al estar el término principal $N(j)$ en los sumandos de la serie. Así, cuando $N(j)$ esté cerca de $(w)_{A_p}$ aparecerá como sumando y no podremos hacer nada para conseguir una cota más pequeña, al menos utilizando este método.

Recientemente, se han obtenido resultados de dominación de integrales singulares *rough* por una generalización de los operadores *sparse*. Jose M. Conde-Alonso, Amalia Culiuc, Francesco Di Plinio y Yumeng Ou consiguen en [3] una dominación de las integrales singulares *rough* utilizando *positive sparse form*. Estas formas *sparse* positivas son una versión dual de los operadores *sparse* que hemos estudiado en este documento. En ese artículo consiguen, para $\|\Omega\|_{L^\infty} \leq 1$, la acotación

$$\|T_\Omega\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq C_p [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1} \max(p,2)},$$

para $w \in [w]_{A_p}$, donde la constante C_p depende sólo de p y de la dimensión, y T_Ω es el operador integral singular *rough* asociado al núcleo Ω . En el mismo artículo también obtienen, para $\Omega \in L^{q,1} \log L(\mathbb{S}^d)$, con $1 < q < \infty$ y $\|\Omega\|_{L^{q,1} \log L(\mathbb{S}^d)} \leq 1$ la desigualdad

$$\|T_\Omega\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq C_p [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-q'})}.$$

Pese a que esto supone una mejora respecto de la dependencia en $[w]_{A_p}$ que hemos presentado en este documento, todavía no se sabe si se cumple la conjetura A_2 para las integrales singulares *rough*.

Bibliografía

- [1] R.R. Coifman, C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Mathematica* **51** (1974), 241-250.
- [2] A.P. Calderón, A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), 85-139.
- [3] J.M. Conde-Alonso, A. Culiuc, F. Di Plinio, Y. Ou, A sparse domination principle for rough singular integrals, preprint arXiv:1612.09201v2.
- [4] J.M. Conde-Alonso, G. Rey, A pointwise estimate for positive dyadic shifts and some applications, Preprint 2014 arXiv:1409.4351
- [5] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1991.
- [6] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley, 1995.
- [7] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Math. Soc, 2001.
- [8] J. Duoandikoetxea, J.L. Rubio de Francia, Maximal and singular integral operators via Fourier transform, *Invent. math.* **84**, 541-561 (1986).
- [9] L.C. Evans, R.F. Gariepy; *Measure Theory and fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. *CRC Press, Boca Raton, FL*, 1992.
- [10] J. García-Cuerva, J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Mathematics Studies, 1985.
- [11] M. Guzmán, *Real variable methods in Fourier analysis*, North-Holland Pub. Co., 1981.
- [12] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Prentice Hall, 2003.
- [13] T. Hytönen, The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators, *Ann. of Math.* (2) **175** (2012), no. 3, 1473-1506.
- [14] T. Hytönen, C. Pérez, Sharp weighted bounds involving A_∞ , *Anal. PDE* **6** (2013), 777-818.
- [15] T. Hytönen, C. Pérez, E. Rela, Sharp reverse Hölder property for A_∞ weights on spaces of homogeneous type, *J. Funct. Anal.* **263** (2012), 3883-3899.
- [16] T. Hytönen; L. Roncal; O. Tapiola. Quantitative weighted estimates for rough homogeneous singular integrals, *Israel Journal of Mathematics*, March 2017, **128**, Issue 1, 133-164.
- [17] M. Lacey; An elementary proof of the A_2 conjecture. Preprint, 2015 arXiv:1501.05818
- [18] A.K. Lerner, A simple proof of the A_2 conjecture, *Int Math Res Notices* 2013 (**14**), 3159-3170.
- [19] A. K. Lerner, On pointwise estimates involving sparse operators, *New York J. Math.* **22** (2016), 341-349. MR 3484688

-
- [20] A.K. Lerner, F. Nazarov, Intuitive dyadic calculus: the basics, preprint 2015 arXiv:1508.05639
 - [21] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207-226.
 - [22] B. Muckenhoupt, The equivalence of two conditions for weight functions, *Studia Mathematica* **49** (1974), 101-106.
 - [23] S. Petermichl, The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical A_p characteristic, *Amer. J. Math.*, **129** no. 5, 2007, 1355-1375.
 - [24] S. Petermichl, The sharp weighted bound for the Riesz transforms, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**, no. 4, 2008, 1237-1249.
 - [25] S. Petermichl, A. Volberg, Hetaing of the Ahlfors-Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular. *Duke Math. J.*, **112** no. 2, 281-305, 2002.
 - [26] M.A. Pinsky, Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, Brooks/Cole series in advanced mathematics, 2002.
 - [27] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1971.
 - [28] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.
 - [29] E.M. Stein, G. Weiss, Interpolation of operators with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958), 159-172.