

Introducción a la teoría de rough paths y su aplicación a ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de tipo Burgers

Pablo Linares Ballesteros

Máster en Matemáticas y Aplicaciones



MÁSTERES
DE LA UAM
2017 - 2018

Facultad de Ciencias

Introducción a la teoría de rough paths y su aplicación a ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de tipo Burgers

Pablo Linares Ballesteros

Director: Carlos Escudero Liébana

Tutor: Daniel Faraco Hurtado

Lugar: Facultad de Ciencias - UAM

Departamento: Matemáticas

Convocatoria: Septiembre 2018



FACULTAD DE
CIENCIAS

Resumen

Los efectos aleatorios de sistemas físicos se traducen matemáticamente como señales extremadamente irregulares, para las cuales no existe una teoría clásica de integración y ecuaciones diferenciales. La teoría de rough paths propone una solución a estas cuestiones a través de un marco algebraico suficientemente rico como para tratar con las dificultades planteadas.

El presente trabajo es una introducción a la teoría de rough paths fundamentalmente basada en la teoría de Terry Lyons, que definiendo integrales iteradas para funciones irregulares aporta una teoría de existencia y unicidad para ecuaciones de control forzadas por dichas funciones (Teorema Universal del Límite). Estas ideas se aplican a problemas estocásticos; analizaremos también la posibilidad de tratar procesos gaussianos como rough paths proporcionando una teoría de soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas trayectoria a trayectoria.

Recogemos además una aplicación de la teoría de rough paths a ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de tipo Burgers, basada en los trabajos de Martin Hairer, que anticipa la Teoría de Estructuras de Regularidad.

Abstract

Random effects in physical systems are mathematically translated as extremely irregular signals, for which there is no classical theory of integration and differential equations. The theory of rough paths proposes a solution to these questions through an algebraic framework rich enough to deal with the difficulties posed.

The present work is an introduction to rough path theory based on Terry Lyons' works, where, by defining iterated integrals for irregular functions, he builds a theory of existence and uniqueness for control equations driven by irregular signals (Universal Limit Theorem). These ideas are applied to stochastic problems. We will analyze how to treat Gaussian processes as rough paths providing a pathwise theory of solutions to stochastic differential equations.

We also collect an application of rough path theory to Burgers-type stochastic partial differential equations, based on the works by Martin Hairer, that anticipates the Theory of Regularity Structures.

Índice general

1. Introducción	1
2. Rough paths	5
2.1. Regularidad en p -variación	5
2.2. Álgebras tensoriales y firmas	7
2.3. Funcionales multiplicativos	10
2.4. Rough paths: definición, propiedades y espacios	16
2.4.1. Rough paths geométricos	18
2.5. Rough paths como trayectorias en grupos de Lie	19
2.6. Regularidad Hölder	23
3. Integración de rough paths	25
3.1. Casi rough paths	25
3.2. Integración de 1-formas	30
3.2.1. Funciones Lipschitz	30
3.2.2. Definición de integral	33
3.3. Rough paths controlados	39
3.3.1. Integración de rough paths controlados	41
4. El Teorema Universal del Límite	43
4.1. Definición de solución	43
4.2. El Teorema Universal del Límite	44
4.3. Procedimiento para resolver una ecuación diferencial rugosa	53

5. Rough paths gaussianos	55
5.1. Criterio de Kolmogorov para rough paths	55
5.2. Área de Lévy	59
5.3. Rough paths gaussianos	61
5.3.1. Movimiento browniano fraccionario	65
5.4. Teoremas de Wong-Zakai	67
6. EDPEs de tipo Burgers a través de rough paths	69
6.1. Proceso de Wiener cilíndrico y ruido blanco espacio-temporal	69
6.2. Construcción del rough path asociado a la ecuación	71
6.3. Existencia y unicidad de soluciones	73
6.4. Hacia las estructuras de regularidad	78

Capítulo 1

Introducción

Las señales irregulares aparecen como reflejo de perturbaciones aleatorias en sistemas físicos. El ejemplo más claro lo representan las trayectorias muestrales del movimiento browniano, que tienen regularidad α -Hölder con $\alpha < 1/2$; en particular, estas trayectorias son, con probabilidad 1, continuas y no-diferenciables en todo punto. Es por ello que una teoría de integración y ecuaciones diferenciales en las que estas señales actúan como *ruido conductor* se hace realmente necesaria.

Sin embargo, no podemos esperar que esta teoría aparezca como una extensión *natural* de las ideas clásicas.

Tomemos por ejemplo una de las llamadas *ecuaciones diferenciales de control*, esto es, problemas de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} dY_t &= f(Y_t)dX_t \\ Y_0 &= y_0 \end{cases}, \quad (1.1)$$

donde X es una trayectoria en un cierto espacio de Banach (típicamente \mathbb{R}^d). Si X es de variación acotada y f es Lipschitz, la teoría clásica nos dice que existe una única solución de (1.1). De hecho, si llamamos I_f a la aplicación que envía el par (X, y_0) en Y , tenemos que I_f es continua entre espacios de funciones de variación acotada.

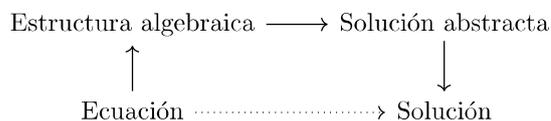
Pero, ¿qué sucede si X resulta ser menos regular? En tal caso, podemos llegar a situaciones en las que la aplicación I_f deja de ser continua. Esencialmente, podríamos decir que nos *falta información* sobre el problema; en concreto, para poder aplicar un método iterativo en

la construcción de una solución a (1.1), debemos conocer las integrales iteradas de X , algo que, como veremos en el inicio del capítulo 2, no es posible por métodos clásicos.

La teoría de rough paths¹ propone una solución a estos problemas. En los años 90, Terry Lyons, considerado el *padre* de la teoría, describe una estructura algebraica a la que poder *levantar* las trayectorias **junto con sus integrales iteradas**, basándose en los trabajos de Chen de los años 50. La estrategia consistirá en *imponer* el valor de dichas integrales (imposibles de definir en el sentido de Stieltjes o Young, [You36]) y así obtener una estructura suficientemente rígida como para trabajar con los problemas anteriores. En el caso del movimiento browniano, esta imposición es la misma que surge al elegir entre las interpretaciones de Itô y Stratonovich (aunque, como veremos en el capítulo 5, otras integrales brownianas son posibles). A esta construcción algebraica dedicaremos el capítulo 2 del presente trabajo, reproduciendo las técnicas de Lyons.

Una vez establecido el marco algebraico, Lyons aporta una teoría de integración y ecuaciones diferenciales para rough paths, que expondremos en los capítulos 3 y 4. Su técnica fundamental se basa en la extensión de propiedades de funciones de variación acotada a un espacio de rough paths especiales, los **rough paths geométricos**. El resultado clave de toda esta discusión es el **Teorema Universal del Límite**, un teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales controladas por rough paths geométricos.

Todo este procedimiento puede resumirse en el siguiente esquema:



Sin embargo, la imposición de la condición *geométrica* resultará ser demasiado restrictiva en algunos propósitos. Ya en la década de los 2000, Massimiliano Gubinelli, aportando una perspectiva algebraica diferente al problema de la integración de funciones irregulares, definirá los llamados **rough paths controlados**, una suerte de expansiones de Taylor basadas en un rough path fijo que permitirán extender los resultados de integración y ecuaciones diferenciales de Lyons. Los trabajos de Gubinelli en este sentido servirán de inspiración a Martin Hairer para su teoría de **estructuras de regularidad**, la cual le valió la Medalla

¹Ante la falta de traducción estandarizada, tomamos el término en inglés *rough path*, literalmente *camino rugoso*.

Fields en el año 2014. Dedicaremos algo de espacio a la teoría de rough paths controlados en el capítulo 3.

Los capítulos finales del trabajo tendrán un componente más probabilístico. En el capítulo 5 trataremos los rough paths gaussianos, esto es, rough paths asociados a las trayectorias muestrales de los procesos gaussianos. Discutiremos acerca de la posibilidad de asignar a un proceso gaussiano un rough path *canónico*, y a través de los trabajos de Peter Friz y Nicolas Victoir daremos una condición sobre la covarianza del proceso para tal efecto. Esto nos dará una interpretación del *levantamiento* del proceso a un rough path que, en definitiva, aportará una teoría para ecuaciones de control similar a la de las aproximaciones de Wong-Zakai en ecuaciones diferenciales estocásticas.

Por último, veremos cómo la teoría de rough paths puede llegar hasta las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas (EDPEs). Siguiendo los trabajos de Martin Hairer, analizaremos ecuaciones de la forma

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u) + g(u)\partial_x u + \xi,$$

donde ξ es ruido blanco espacio-temporal, con técnicas de los capítulos anteriores. La idea fundamental es expresar soluciones débiles y mild con integrales de rough paths controlados por un rough path asociado a un problema lineal, pero en este caso (y esta es una de las ideas más interesantes) las funciones serán rugosas en *espacio* en lugar de en *tiempo*. Este giro permitirá la aplicación de un teorema de punto fijo para probar existencia y unicidad de soluciones bajo ciertas condiciones de regularidad sobre f y g .

Capítulo 2

Rough paths

En este capítulo definimos el concepto de *rough path* y construimos la estructura algebraica que lo sustenta, basada en álgebras tensoriales de espacios de Banach. Estudiaremos también algunas propiedades de los rough paths, y ahondaremos en el concepto de *rough path geométrico* y su relación con trayectorias evaluadas en grupos de Lie.

Todo este capítulo recoge ideas de la teoría clásica de Lyons, que puede consultarse en [Lyo98],[LQ02] y [LCL07].

2.1. Regularidad en p -variación

Para medir la regularidad de X utilizamos el concepto de p -variación, que podemos entender como generalización de la variación total.

Denotaremos por V a un espacio de Banach con norma $|\cdot|_V$ (cuando no dé lugar a confusión escribiremos simplemente $|\cdot|$). Fijamos un intervalo $[0, T]$. Además, en lo sucesivo, Π denotará particiones del intervalo, es decir, una colección finita de puntos $\{t_l\}_{l=0}^r$ tales que $t_0 < t_1 < \dots < t_r$ y $\cup_{l=0}^{r-1} [t_l, t_{l+1}] = [0, T]$, y definimos

$$|\Pi| := \sup_{l=0, \dots, r-1} |t_{l+1} - t_l|.$$

Definición 2.1. Sean $X \in C([0, T], V)$, $p > 1$. Diremos que X tiene p -variación finita si

$$\|X\|_{p, [0, T]} := \left[\sup_{\Pi \subset [0, T]} \sum_{l=0}^{r-1} |X_{t_{l+1}} - X_{t_l}|^p \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Al conjunto de funciones de p -variación finita lo denotaremos por $\mathcal{V}^p(J, V)$, y en él definimos la norma

$$\|X\|_{\mathcal{V}^p(J, V)} := \|X\|_{p, J} + \sup_{t \in J} |X_t|_V.$$

En 1936, Laurence C. Young [You36] probó la existencia de integrales de la forma

$$\int_0^t Y_u dX_u,$$

donde $X \in \mathcal{V}^p$, $Y \in \mathcal{V}^q$, como extensión de la integral de Riemann-Stieltjes bajo la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Esto permite resolver (1.1) para X de p -variación finita con $p < 2$. Una discusión en torno a estos resultados puede hallarse en [LCL07].

Sin embargo, nuestro objetivo ha de ser aún más ambicioso, pues ya en el comienzo hablábamos del movimiento Browniano como ejemplo de señal irregular que queremos estudiar; sus trayectorias son, casi seguramente, de p -variación finita con $p > 2$ ¹. Y aquí aparecen los problemas.

Ejemplo 2.2. Consideremos la familia de trayectorias $X(n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$X(n)_t = \left(\frac{\cos(2\pi n^2 t)}{n}, \frac{\sin(2\pi n^2 t)}{n} \right).$$

Claramente esta familia converge uniformemente en t a la trayectoria nula $(0, 0)$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n^2 t)}{n} d \left(\frac{\sin(2\pi n^2 t)}{n} \right) &= \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n^2 t)}{n} \frac{2\pi n^2 \cos(2\pi n^2 t)}{n} dt \\ &= 2\pi \int_0^1 \cos^2(2\pi n^2 t) dt \\ &= \pi \int_0^1 (\cos(4\pi n^2 t) + 1) dt \\ &= \pi. \end{aligned}$$

¹Lo habitual es formularlo en términos de regularidad Hölder, diciendo que las trayectorias del Browniano son α -Hölder para todo $\alpha < 1/2$, véase por ejemplo [Eva13]

Por lo tanto, no podemos esperar que las soluciones a las ecuaciones diferenciales de control

$$\begin{pmatrix} dY(n)_t^1 \\ dY(n)_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y(n)^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX(n)_t^1 \\ dX(n)_t^2 \end{pmatrix}$$

converjan a la solución trivial; al menos no en la topología uniforme.

De hecho, para tener la deseada convergencia en una métrica de p -variación, tomar $p \leq 2$ no es suficiente. Dados s, t ,

$$\begin{aligned} |X(n)_t - X(n)_s|^p &= \frac{1}{n^p} ((\cos(2\pi n^2 t) - \cos(2\pi n^2 s))^2 + (\sin(2\pi n^2 t) - \sin(2\pi n^2 s))^2)^{p/2} \\ &= \frac{1}{n^p} (2 - 2\cos(2\pi n^2(t-s)))^{p/2} = \frac{2^p}{n^p} |\sin(\pi n^2(t-s))|^{p/2}; \end{aligned}$$

por consiguiente, si tomamos la partición de $[0, 1]$ dada por $t_l = \frac{l}{2n^2}$,

$$\left(\sum_l |X(n)_{t_{l+1}} - X(n)_{t_l}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{2}{n} \left(\sum_l |\sin(\pi n^2(t_{l+1} - t_l))|^{p/2} \right) = \frac{2}{n} (2n^2)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p \leq 2$, no podemos esperar ningún tipo de convergencia a $(0, 0)$ (de hecho en $p < 2$ la sucesión diverge). En cambio, puede demostrarse que, para $p > 2$, la sucesión $X(n)$ sí converge a $(0, 0)$.

Con esto último, lo que se prueba es que la aplicación que envía X en la integral $\int X \otimes dX$ **no** es continua en la métrica de p -variación para $p > 2$, lo que impide, en última instancia, dar sentido a dicha integral para funciones *irregulares* (al menos como límite); algo que, por otro lado, ya predice en algún sentido Young al establecer la condición $p < 2$ para que dicha integral exista de acuerdo con su definición.

2.2. Álgebras tensoriales y signaturas

Las integrales iteradas de un path conectan directamente con una estructura algebraica dada por los productos tensoriales del espacio imagen. Es por ello que, antes de entrar en materia, conviene hacer una serie de consideraciones en torno a los productos tensoriales de espacios de Banach.

Dado un espacio de Banach $(V, |\cdot|)$, definimos el producto tensorial algebraico $V \otimes_a V$ como el espacio formado por elementos

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i$$

con $\xi_i, \eta_i \in V$, $i = 1, \dots, n$; es decir, el producto tensorial como espacio vectorial. Del mismo modo definimos los productos tensoriales algebraicos iterados

$$V^{\otimes_a k} := \underbrace{V \otimes_a \cdots \otimes_a V}_k.$$

En estos espacios definimos normas tensoriales $|\cdot|_k$, de tal modo que satisfagan la siguiente condición de compatibilidad:

$$|\xi \otimes \eta|_{k+l} \leq |\xi|_k |\eta|_l$$

donde $\xi \in V^{\otimes_a k}$, $\eta \in V^{\otimes_a l}$.

La completión de $(V^{\otimes_a k}, |\cdot|_k)$ es lo que llamamos **espacio producto tensorial**, y lo denotaremos por $V^{\otimes k}$.

Con estas consideraciones, podemos definir el álgebra tensorial truncada, que será de gran importancia en la definición de nuestros rough paths.

Definición 2.3. *El álgebra tensorial truncada de V de orden n es la suma directa*

$$T^{(n)}(V) := \bigoplus_{k=0}^n V^{\otimes k}$$

equipada con la suma (componente a componente), el producto $\xi \otimes \eta = \zeta$ donde

$$\zeta^k = \sum_{j=0}^k \xi^j \otimes \eta^{k-j}, \quad k = 1, \dots, n,$$

y la norma $|\xi| := \sum_{i=0}^n |\xi^i|$.

Observación 2.4. $(T^{(n)}(V), |\cdot|)$ es un álgebra unital, donde la unidad es $e = (1, 0, \dots, 0)$.

Definición 2.5. *El álgebra tensorial de V es la suma directa de todas las álgebras tensoriales truncadas, esto es,*

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^{(n)}(V).$$

El porqué de estas definiciones se explica del siguiente modo. Supongamos que tenemos un path $X : [0, T] \rightarrow V$ de p -variación finita para algún $p < 2$ (para poder tener integrales iteradas definidas en el sentido de Young). Entonces la n -ésima integral iterada de X ,

$$X^n := \int_{t_1 < \dots < t_n \in [0, T]} dX_{t_1} \otimes \dots \otimes dX_{t_n}$$

es un elemento del álgebra tensorial truncada de orden n . Nuestro interés está en trabajar con toda la sucesión de integrales iteradas como un único objeto, lo que da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.6. Sea $X : [0, T] \rightarrow V$ una trayectoria de p -variación finita para algún $p < 2$. La *signatura* de X es el elemento $\mathbf{X} \in T(V)$ definido como

$$\mathbf{X} := (1, X^1, X^2, \dots)$$

donde para cada $n \geq 1$

$$X^n := \int_{t_1 < \dots < t_n \in [0, T]} dX_{t_1} \otimes \dots \otimes dX_{t_n}.$$

En ocasiones la denotaremos por $S(X)$.

Dado que la signatura recoge información sobre la integración de un path, es de esperar que podamos expresar propiedades de las integrales en términos algebraicos sencillos. En concreto, nos interesa estudiar cómo se representa la sencilla relación

$$\int_0^t = \int_0^s + \int_s^t$$

Para ello vamos a estudiar el comportamiento de la concatenación de paths en la estructura tensorial. *Concatenar* dos paths es *pegarlos* de manera continua; más concretamente, dados $X : [0, s] \rightarrow V$, $Y : [s, t] \rightarrow V$,

$$(X * Y)_u := \begin{cases} X_u, & \text{si } u \in [0, s] \\ X_s + Y_u - Y_s, & \text{si } u \in [s, t] \end{cases}$$

Teorema 2.7 (Chen). Si $X : [0, s] \rightarrow V$, $Y : [s, t] \rightarrow V$ son paths con 1-variación finita, entonces

$$S(X * Y) = S(X) \otimes S(Y).$$

Demostración. Llamemos $Z = X * Y$, y fijemos $n \geq 1$. Entonces, aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
Z_{0,t}^n &= \int \cdots \int_{0 < t_1 < \cdots < t_n < t} dZ_{t_1} \otimes \cdots \otimes dZ_{t_n} \\
&= \sum_{k=0}^n \int \cdots \int_{0 < t_1 < \cdots < t_k < s < t_{k+1} < \cdots < t_n < t} dZ_{t_1} \otimes \cdots \otimes dZ_{t_n} \\
&= \sum_{k=0}^n \int \cdots \int_{0 < t_1 < \cdots < t_k < s < t_{k+1} < \cdots < t_n < t} dX_{t_1} \otimes \cdots \otimes dX_{t_k} \otimes dY_{t_{k+1}} \otimes \cdots \otimes dY_{t_n} \\
&= \sum_{k=0}^n \int \cdots \int_{0 < t_1 < \cdots < t_k < s} dX_{t_1} \otimes \cdots \otimes dX_{t_k} \otimes \int \cdots \int_{s < t_{k+1} < \cdots < t_n < t} dY_{t_{k+1}} \otimes \cdots \otimes dY_{t_n} \\
&= \sum_{k=0}^n (X^k \otimes Y^{n-k})_{0,t} = (X \otimes Y)_{0,t}^n.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.8. La aplicación del teorema de Fubini es crucial para obtener una prueba tan limpia, pero no sirve más allá del caso $p = 1$. Sin embargo, con algo más de esfuerzo, el teorema de Chen se extiende para todo $p \in (1, 2)$. Los detalles de la prueba pueden consultarse en [LCL07].

2.3. Funcionales multiplicativos

La estrategia para definir integrales iteradas de paths irregulares (lo que más adelante quedará reducido a un objeto al que llamaremos **rough path**) consiste en imitar el marco algebraico de la sección anterior en el caso $p \geq 2$. Para ello, introducimos el concepto de *funcional multiplicativo*.

Definición 2.9. Sea $n \geq 1$, y denotemos por Δ_T al símplice

$$\Delta_T = \{(s, t) \in [0, T]^2 : s < t\}.$$

Una aplicación continua

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Delta_T &\longrightarrow T^{(n)}(V) \\ (s, t) &\longmapsto \mathbf{X}_{s,t} = (X_{s,t}^0, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n) \end{aligned}$$

es un **funcional multiplicativo** de grado n si $X^0 \equiv 1$ y

$$\mathbf{X}_{s,t} \otimes \mathbf{X}_{t,u} = \mathbf{X}_{s,u} \quad (2.1)$$

para todos $(s, t), (t, u) \in \Delta_T$.

Observación 2.10. En lo sucesivo, y salvo casos de posible confusión, el símplice será denotado simplemente por Δ .

En otras palabras, los funcionales multiplicativos son aquellos sobre los que se impone la condición de concatenación en las integrales, tal y como se expresa en el Teorema 2.7. Es por eso que a (2.1) se le denomina **identidad de Chen**.

Ejemplo 2.11. El ejemplo más claro es el de los paths de p -variación finita con $p \in (1, 2)$. Para ellos, las integrales iteradas están bien definidas en el sentido de Young, y el Teorema 2.7 (junto con la Observación 2.8) nos garantiza que se cumple la identidad de Chen, por lo que

$$X_{s,t}^k := \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < s} dX_{t_1} \otimes \dots \otimes dX_{t_k}$$

define un funcional multiplicativo.

La pregunta que surge ahora de forma natural es qué funcionales multiplicativos pueden extenderse a una signatura completa de manera única; o, en términos de integración, cuántas integrales iteradas son necesarias para preescribir todas las demás. La respuesta depende de la regularidad del funcional.

Para medir dicha regularidad, introducimos la noción de *función de control*, fundamental para la teoría de Lyons.

Definición 2.12. Una función $\omega : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función de control** si es continua, no-negativa y satisface:

$$\omega(s, t) + \omega(t, u) \leq \omega(s, u) \quad (2.2)$$

si $0 \leq s \leq t \leq u \leq T$.

A la propiedad (2.2) la llamaremos *superaditividad*.

Como consecuencia de estas propiedades, tenemos que un control satisface $\omega(t, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Definición 2.13. Diremos que $\mathbf{X} : \Delta \rightarrow T^{(n)}(V)$ tiene *p-variación finita con respecto a una función de control ω* si para todos $i = 1, \dots, n$, $(s, t) \in \Delta$, se cumple la desigualdad

$$|X_{s,t}^i| \leq \omega(s, t)^{\frac{i}{p}}.$$

Con estas herramientas podemos enunciar uno de los resultados principales de este capítulo: el teorema de extensión de funcionales multiplicativos de Lyons (tal y como se enuncia en [LQ02]).

Teorema 2.14. Sea $p \geq 1$, y sea $\mathbf{X} : \Delta \rightarrow T^{(n)}(V)$ un funcional multiplicativo de *p-variación finita con respecto a una función de control ω* .

Si $n \geq [p]$, entonces \mathbf{X} se extiende de manera única a un funcional multiplicativo en $T(V)$ de *p-variación finita*. Más precisamente, para cualquier $m \geq [p] + 1$ existe una única aplicación continua $X^m : \Delta \rightarrow V^{\otimes m}$ tal que

$$\bar{\mathbf{X}} := (1, X^1, \dots, X^{[p]}, \dots, X^m, \dots)$$

es un funcional multiplicativo en $T(V)$ con *variación p-finita*.

Además, si ω es una función de control tal que

$$|X_{s,t}^i| \leq \frac{\omega(s, t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!} \quad (2.3)$$

para todos $i = 1, \dots, [p]$, $(s, t) \in \Delta$, donde β es una constante que satisface

$$\beta \geq p^2 \left(1 + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{2}{r-1} \right)^{\frac{[p]+1}{p}} \right), \quad (2.4)$$

entonces (2.3) se cumple para todo $i > [p]$.

Observación 2.15. Por una mera cuestión de comodidad, e imitando lo realizado en [LCL07], en ocasiones tomaremos la condición (2.3) como definición para la *p-variación controlada* por ω . De este modo diríamos que, si la *p-variación* de \mathbf{X} está controlada por ω , también lo estará la de $\bar{\mathbf{X}}$.

Demostración. La unicidad se sigue fácilmente del siguiente razonamiento. Supongamos que tenemos dos extensiones,

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= (1, X^1, \dots, X^k, X^{k+1}) \\ \tilde{\mathbf{X}} &= (1, X^1, \dots, X^k, \tilde{X}^{k+1}).\end{aligned}$$

Basta con probar que $X^{k+1} = \tilde{X}^{k+1}$. Por la multiplicatividad,

$$\begin{aligned}X_{s,t}^{k+1} - \tilde{X}_{s,t}^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} X_{s,u}^i \otimes X_{u,t}^{k+1-i} - \sum_{i=0}^{k+1} \tilde{X}_{s,u}^i \otimes \tilde{X}_{u,t}^{k+1-i} \\ &= 1 \otimes X_{u,t}^{k+1} + X_{s,u}^{k+1} \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{X}_{u,t}^{k+1} - \tilde{X}_{s,u}^{k+1} \otimes 1 \\ &= X_{s,u}^{k+1} - \tilde{X}_{s,u}^{k+1} + X_{u,t}^{k+1} - \tilde{X}_{u,t}^{k+1},\end{aligned}$$

lo que prueba que $X^{k+1} - \tilde{X}^{k+1} : \Delta \rightarrow V^{\otimes(k+1)}$ es un funcional aditivo y, por consiguiente, $t \mapsto X_{s,t}^{k+1} - \tilde{X}_{s,t}^{k+1}$ es una trayectoria con valores en $V^{\otimes(k+1)}$ y $\frac{k+1}{p}$ -variación finita. Dado que $\frac{k+1}{p} > 1$ tenemos que $X^{k+1} - \tilde{X}^{k+1}$ es constante; por último, la regularidad de ω implica que esa constante es 0.

Para probar la existencia y la desigualdad (2.3), la idea es construir de manera inductiva un funcional multiplicativo con las propiedades deseadas. Supongamos que $\mathbf{X} = (1, X^1, \dots, X^k)$ es un funcional multiplicativo de p -variación finita con $k \geq [p]$. Tomamos el funcional

$$\hat{\mathbf{X}} := (1, X^1, \dots, X^k, 0).$$

Escogemos además una función de control ω que satisfaga 2.3; es claro que siempre podremos hacer esto reescalando una función de control conocida, pues solo necesitamos satisfacer k condiciones.

Para una partición $\Pi = \{t_0, \dots, t_r\}$ del intervalo $[s, t]$, definimos el funcional $\mathbf{X}(\Pi) : \Delta \rightarrow T^{(k+1)}(V)$ como

$$\mathbf{X}(\Pi)_{s,t} := \hat{\mathbf{X}}_{s,t_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{X}}_{t_{r-1},t}.$$

El objetivo es probar que $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \mathbf{X}(\Pi)_{s,t}$ existe y es el funcional multiplicativo que buscamos.

Como \mathbf{X} es un funcional multiplicativo, se tiene que $X(\Pi)^m = X^m$ para todos los $m \leq k$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
X(\Pi)_{s,t}^{k+1} &= \sum_{\substack{i_1+\dots+i_r=k+1 \\ 0 \leq i_1, \dots, i_r \leq k+1}} \hat{X}_{s,t_1}^{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{X}_{t_{r-1},t}^{i_r} \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2=k+1 \\ i_2>0}} \hat{X}_{s,t_1}^{i_1} \otimes \hat{X}_{t_1,t_2}^{i_2} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots \\
&\quad + \sum_{\substack{i_1+\dots+i_r=k+1 \\ i_r>0}} \hat{X}_{s,t_1}^{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{X}_{t_{r-1},t}^{i_r} \\
&= \sum_{i=1}^k X_{s,t_1}^i \otimes X_{t_1,t}^{k+1-i} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + \sum_{i=1}^k X_{s,t_2}^i \otimes X_{t_2,t_3}^{k+1-i} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \\
&\quad + \dots + \sum_{i=1}^k X_{s,t_{r-1}}^i \otimes X_{t_{r-1},t}^{k+1-i} \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r X_{s,t_{l-1}}^i \otimes X_{t_{l-1},t_l}^{k+1-i},
\end{aligned}$$

con todo,

$$\mathbf{X}(\Pi)_{s,t} = \left(1, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^k, \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^r X_{s,t_{l-1}}^i \otimes X_{t_{l-1},t_l}^{k+1-i} \right). \quad (2.5)$$

En la partición Π , tomamos el punto t_j tal que

$$\omega(t_{j-1}, t_{j+1}) \leq \frac{2}{r-1} \omega(s, t)$$

si $r > 2$; en caso de que $r = 2$, tomamos t_1 . Claramente siempre podemos elegir tal punto, dada la superaditividad de la función de control

Eliminamos ese punto de nuestra partición obteniendo una nueva, $\Pi' := \Pi \setminus \{t_j\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\Pi)_{s,t} - \mathbf{X}(\Pi')_{s,t} &= \hat{X}_{s,t_1} \otimes \dots \otimes \hat{X}_{t_{j-2},t_{j-1}} \otimes \left(\hat{X}_{t_{j-1},t_j} \otimes \hat{X}_{t_j,t_{j+1}} - \hat{X}_{t_{j-1},t_{j+1}} \right) \\
&\quad \otimes \hat{X}_{t_{j+1},t_{j+2}} \otimes \dots \otimes \hat{X}_{t_{r-1},t}.
\end{aligned}$$

Por (2.5), tan solo el término $k+1$ es no nulo, y por la multiplicatividad de \mathbf{X} tiene la

siguiente expresión:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}(\Pi)_{s,t} - \mathbf{X}(\Pi')_{s,t})^{k+1} &= \left(\hat{X}_{t_{j-1},t_j} \otimes \hat{X}_{t_j,t_{j+1}} - \hat{X}_{t_{j-1},t_{j+1}} \right)^{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \hat{X}_{t_{j-1},t_j}^i \otimes \hat{X}_{t_j,t_{j+1}}^{k+1-i} = \sum_{i=1}^k X_{t_{j-1},t_j}^i \otimes X_{t_j,t_{j+1}}^{k+1-i}. \end{aligned}$$

Necesitamos ahora hacer uso de la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{p^2} \sum_{i=0}^n \frac{s^{\frac{i}{p}} t^{\frac{n-i}{p}}}{\left(\frac{i}{p}\right)! \left(\frac{n-i}{p}\right)!} \leq \frac{(s+t)^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!} \quad (2.6)$$

para todo $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $s, t \geq 0$. Esta desigualdad es el Lema 3.8 de [LCL07]. Entonces, con esta desigualdad y la superaditividad,

$$\begin{aligned} |(X(\Pi)_{s,t} - X(\Pi')_{s,t})^{k+1}| &\leq \sum_{i=1}^k \left| X_{t_{j-1},t_j}^i \otimes X_{t_j,t_{j+1}}^{k+1-i} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{\omega(t_{j-1},t_j)^{\frac{i}{p}} \omega(t_j,t_{j+1})^{\frac{k+1-i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)! \beta \left(\frac{k+1-i}{p}\right)!} \\ &\leq \frac{p^2}{\beta^2} \frac{(\omega(t_{j-1},t_j) + \omega(t_j,t_{j+1}))^{\frac{k+1}{p}}}{\left(\frac{k+1}{p}\right)!} \\ &\leq \frac{p^2}{\beta} \left(\frac{2}{r-1}\right)^{\frac{k+1}{p}} \frac{\omega(s,t)^{\frac{k+1}{p}}}{\beta \left(\frac{k+1}{p}\right)!}. \end{aligned}$$

Si eliminamos sucesivamente puntos de la partición Π como en el procedimiento explicado hasta quedarnos tan solo con los extremos, obtenemos

$$\begin{aligned} |X(\Pi)_{s,t}^{k+1}| &\leq \frac{p^2}{\beta} \left(1 + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{2}{r-1}\right)^{\frac{k+1}{p}} \right) \frac{\omega(s,t)^{\frac{k+1}{p}}}{\beta \left(\frac{k+1}{p}\right)!} \\ &\leq \frac{p^2}{\beta} \left(1 + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{2}{r-1}\right)^{\frac{|p|+1}{p}} \right) \frac{\omega(s,t)^{\frac{k+1}{p}}}{\beta \left(\frac{k+1}{p}\right)!} \leq \frac{\omega(s,t)^{\frac{k+1}{p}}}{\beta \left(\frac{k+1}{p}\right)!}. \end{aligned}$$

Entonces, al tomar límites cuando $|\Pi| \rightarrow 0$, la desigualdad (2.3) queda demostrada para el nivel $k+1$.

Tan solo resta demostrar la existencia del límite. Para ello, consideramos dos particiones Π_1, Π_2 con $|\Pi_1|, |\Pi_2| < \delta$, y tomamos además la partición $\tilde{\Pi}$ con los puntos de ambas. Entonces por la desigualdad triangular

$$|X(\Pi_1)_{s,t}^{k+1} - X(\Pi_2)_{s,t}^{k+1}| \leq |X(\Pi_1)_{s,t}^{k+1} - X(\tilde{\Pi})_{s,t}^{k+1}| + |X(\tilde{\Pi})_{s,t}^{k+1} - X(\Pi_2)_{s,t}^{k+1}|,$$

y eliminando un punto de $\tilde{\Pi}$ como en el procedimiento iterativo anterior vemos satisfecha una condición de Cauchy que, finalmente, prueba la existencia de $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} X(\Pi)_{s,t}^{k+1}$. \square

Esta extensión resulta ser, además, continua en el siguiente sentido.

Teorema 2.16. *Sean \mathbf{X}, Y funcionales multiplicativos de grado n y p -variación finita, y sea β una constante que cumple (2.4). Si ω es una función de control tal que*

$$\begin{aligned} |X_{s,t}^i|, |Y_{s,t}^i| &\leq \frac{\omega(s,t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!} \\ |X_{s,t}^i - Y_{s,t}^i| &\leq \varepsilon \frac{\omega(s,t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

para todos $i = 1, \dots, [p]$, $(s, t) \in \Delta$ entonces (2.7) se cumple para todo $i > [p]$.

La demostración sigue exactamente las mismas ideas que la del Teorema 2.14.

2.4. Rough paths: definición, propiedades y espacios

El teorema de extensión es fundamental para la teoría porque permite dar, por fin, la definición de rough path.

Definición 2.17. *Un **rough path** de rugosidad p (o simplemente p -rough path) es un funcional multiplicativo de orden $[p]$ con p -variación finita.*

De este modo, un rough path codifica la información estrictamente necesaria para obtener toda la signatura de una trayectoria; dicho de otro modo, un rough path consiste en una trayectoria (función de una variable) y la cantidad justa de integrales iteradas necesarias para prescribir todas las demás.

Ejemplo 2.18. Dada una trayectoria Lipschitz $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, podemos definir un rough path como

$$\mathbf{X}_{s,t} = (1, x_t - x_s).$$

Es trivialmente multiplicativo y cumple la hipótesis de regularidad requerida.

Ejemplo 2.19. Si ahora nuestra función x es de p -variación finita con $2 \leq p < 3$, sabemos, por el Teorema 2.14, que su rough path tendrá un nivel más que el anterior.

Consideremos el caso unidimensional. Para definir el segundo nivel, podemos recurrir a una expresión formal de integración:

$$\int_s^t (x_u - x_s) dx_u = \frac{1}{2} (x_t - x_s)^2.$$

Insistimos en que esa expresión es meramente formal (no es posible definir una integral a través de las sumas de Riemann-Stieltjes).

Entonces un posible rough path es

$$\mathbf{X}_{s,t} = \left(1, x_t - x_s, \frac{1}{2} (x_t - x_s)^2 \right).$$

La hipótesis de regularidad es claramente cierta; veamos que es un funcional multiplicativo. En efecto,

$$\begin{aligned} (X_{s,u} \otimes X_{u,t})^2 &= \frac{1}{2} (x_u - x_s)^2 + (x_u - x_s)(x_t - x_u) + \frac{1}{2} (x_t - x_u)^2 \\ &= \frac{1}{2} x_t^2 + \frac{1}{2} x_s^2 + x_u^2 - x_u x_s + x_t x_u - x_u^2 - x_s x_t + x_s x_u \\ &= \frac{1}{2} x_t^2 + \frac{1}{2} x_s^2 - x_s x_t = \frac{1}{2} (x_t - x_s)^2 = X_{s,t}^2. \end{aligned}$$

Pero podemos definir muchos otros rough paths. De hecho, si tomamos una función $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular (a continuación lo especificaremos), tenemos que

$$\tilde{\mathbf{X}}_{s,t} = \left(1, x_t - x_s, \frac{1}{2} (x_t - x_s)^2 + \psi_t - \psi_s \right) \quad (2.8)$$

vuelve a ser un rough path. Es claramente multiplicativo, y si pedimos que ψ sea de $p/2$ -variación finita, también tendremos la regularidad requerida.

Esta última observación puede llevarse a todos los niveles del álgebra tensorial y a cualquier dimensión. Dado un p -rough path \mathbf{X} y una función $\psi : [0, T] \rightarrow V^{\otimes [p]}$ de $p/[p]$ -variación finita, entonces $\mathbf{X} + (0, \dots, 0, \Delta\psi)$ es un p -rough path, donde $\Delta\psi_{s,t} := \psi_t - \psi_s$.

Dado un espacio de Banach V , su espacio de p -rough paths será denotado por $\Omega_p(V)$. Es importante señalar que **no es un espacio vectorial**; no podemos esperar que la suma de funcionales multiplicativos sea multiplicativa. Sin embargo, podemos dotar de una topología al espacio. Consideramos la métrica d_p dada por

$$d_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \max_{i=1, \dots, [p]} \sup_{\Pi \subset [0, T]} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_i, t_{i+1}}^i - Y_{t_i, t_{i+1}}^i|^{\frac{p}{i}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 2.20. Por el Teorema 2.16 se observa que la extensión de un rough path a un funcional multiplicativo de orden arbitrario es continua con respecto a d_p .

Lo natural, entonces, es trabajar con el espacio métrico $(\Omega_p(V), d_p)$, pero emplear la métrica d_p puede resultar muy complicado. Por ello nos interesa encontrar un criterio de convergencia más manejable.

Definición 2.21. Sean $(\mathbf{X}(n))_{n \leq 0}$, \mathbf{X} elementos de $C_{0,p}([0, T], T^{[p]}(V))$. Diremos que $(\mathbf{X}(n))_{n \leq 0}$ converge en la **topología de p -variación** si existen una función de control ω y una sucesión de números reales $(a_n)_{n \leq 0}$ con $a_n \rightarrow 0$ tales que

$$|X(n)_{s,t}^i|, |X_{s,t}^i| \leq \omega(s, t)^{\frac{i}{p}},$$

$$|X(n)_{s,t}^i - X_{s,t}^i| \leq a_n \omega(s, t)^{\frac{i}{p}}.$$

2.4.1. Rough paths geométricos

El primer objetivo de la teoría de rough paths es dotar a funciones irregulares de reglas de integración. Hasta ahora, nuestra construcción es básicamente algebraica; un rough path es un objeto abstracto que, en sí mismo, no tiene por qué relacionarse con una forma de integración conocida.

Una manera de garantizar esa relación es considerar aquellos rough paths que son límite de signaturas correspondientes a trayectorias con reglas de integración definidas de manera clásica. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.22. Diremos que $\mathbf{X} \in \Omega_p(V)$ es un rough path **geométrico** si existe una sucesión $\mathbf{X}(n)$ de rough paths suaves (de 1-variación finita) tal que

$$d_p(\mathbf{X}(n), \mathbf{X}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Llamaremos $G\Omega_p(V)$ al conjunto de p -rough paths geométricos.

2.5. Rough paths como trayectorias en grupos de Lie

Más allá de su utilidad para crear expansiones de tipo Taylor (que aparecerán en los capítulos sobre integración y ecuaciones diferenciales), las integrales iteradas tienen una interpretación geométrica muy clara. En particular, la segunda integral iterada (el nivel 2 de nuestro rough path) encierra en sí misma un término que se relaciona con el área bajo la curva trazada por la función.

Para esta sección consideraremos solo el caso finito-dimensional, $V = \mathbb{R}^d$. Supongamos que $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una trayectoria suficientemente regular. Entonces la cantidad

$$\int_s^t (x_u^i - x_s^i) dx_u^j - (x_u^j - x_s^j) dx_u^i$$

es el área encerrada entre la cuerda que une x_s con x_t y la curva trazada por el path, proyectado sobre el plano ij (contando multiplicidades). En el lenguaje que hemos establecido, la parte antisimétrica del segundo nivel del rough path recoge las áreas proyectadas sobre todos los planos ($2\text{Anti}(X_{s,t}^2)$).

Por otro lado, la parte simétrica tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \int_s^t (x_u^i - x_s^i) dx_u^j + (x_u^j - x_s^j) dx_u^i &= \int_s^t d(x_u^i x_u^j) - x_s^i (x_t^j - x_s^j) - x_s^j (x_t^i - x_s^i) \\ &= x_t^i x_t^j - x_s^i x_s^j - x_s^i x_t^j + x_s^i x_s^j - x_s^j x_t^i + x_s^j x_s^i \\ &= (x_t^i - x_s^i)(x_t^j - x_s^j), \end{aligned}$$

lo que en nuestra notación significa

$$\text{Sym}(X_{s,t}^2) = \frac{1}{2} X_{s,t}^1 \otimes X_{s,t}^1. \quad (2.9)$$

Sin embargo, la ecuación (2.9) no se satisface para todos los rough paths. En particular, podríamos considerar perturbaciones simétricas de la forma (2.8) para construir rough paths que no lo cumplen (un ejemplo práctico sería la integral de Itô).

En cualquier caso, dado que es una propiedad que se satisface para funciones regulares, podríamos decir que la condición (2.9) es, en algún sentido, *deseable*. Por ejemplo, con un argumento de continuidad puede probarse que todo rough path geométrico lo satisface; no obstante, el recíproco es falso, lo que motiva la definición de rough path *débilmente* geométrico.

El marco algebraico general es algo más complicado. Tomamos el álgebra tensorial truncada $T^{(n)}(\mathbb{R}^d)$, y consideramos los subespacios afines

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d) &:= \{g \in T^{(n)}(\mathbb{R}^d) : g^0 = 0\} \\ 1 + \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d) &:= \{g \in T^{(n)}(\mathbb{R}^d) : g^0 = 1\}.\end{aligned}$$

Observación 2.23. Los funcionales multiplicativos toman valores en $1 + \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d)$. Esto da perfecto sentido a la noción de rough path como una verdadera *trayectoria*, pues para conocer un rough path en $[0, T]$ bastará con conocer la función de una variable

$$t \mapsto \mathbf{X}_{0,t}$$

y tomar después $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{0,s}^{-1} \otimes \mathbf{X}_{0,t}$ como consecuencia de la multiplicatividad.

$(1 + \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d), \otimes)$ es un grupo; además es un subespacio afín de $T^{(n)}(\mathbb{R}^d)$. Puede probarse que las operaciones \otimes y $^{-1}$ son suaves y, por consiguiente, $1 + \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d)$ es un **grupo de Lie**.

Por otra parte, si tomamos el conmutador $[g, h] = g \otimes h - h \otimes g$, $(\mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d), [\cdot, \cdot])$ es un **álgebra de Lie**.

Definición 2.24. $\mathfrak{g}^{(n)}(\mathbb{R}^d)$ es la mínima subálgebra de Lie de $\mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d)$ que contiene a $\pi_1(\mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d))$, esto es,

$$\mathfrak{g}^{(n)}(\mathbb{R}^d) := \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d] \oplus \dots \oplus \underbrace{[\mathbb{R}^d, [\dots, [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d] \dots]]}_{n-1 \text{ corchetes}}.$$

Llamaremos a $\mathfrak{g}^{(n)}$ **álgebra de Lie nilpotente libre de paso n** .

Definimos la aplicación exponencial

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow 1 + \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d) \\ \mathbf{a} &\longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})^i}{i!} \end{aligned}$$

y su inversa, el logaritmo

$$\begin{aligned} \log : 1 + \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d) \\ 1 + \mathbf{a} &\longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(\mathbf{a})^i}{i}. \end{aligned}$$

Definición 2.25. *El subgrupo de Lie de $1 + \mathfrak{t}^{(n)}(\mathbb{R}^d)$ definido como*

$$G^{(n)}(\mathbb{R}^d) := \exp(\mathfrak{g}^{(n)}(\mathbb{R}^d))$$

es el grupo de Lie nilpotente libre de paso n .

Veamos un par de ejemplos para ver el porqué de nuestro interés en esta construcción.

Ejemplo 2.26. Consideremos $n = 2$. Entonces

$$\mathfrak{g}^{(2)}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d].$$

$[\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$ lo componen elementos de la forma

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^d a_{i,j} [e_i, e_j];$$

dicho de otro modo, son las **matrices antisimétricas** de dimensión d .

Entonces, dado un elemento $(0, v, A) \in \mathfrak{g}^{(2)}(\mathbb{R}^d)$, su exponencial es

$$(1, 0, 0) + (0, v, A) + \frac{1}{2}(0, 0, v \otimes v).$$

Si $\exp(0, v, A)$ fuera la imagen de $(s, t) \in \Delta$ por un rough path, este tendría una parte simétrica como la definida en (2.9) y una parte antisimétrica que definiría su área.

Ejemplo 2.27. Supongamos que $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una trayectoria suficientemente regular. Por los comentarios al inicio de la sección, su signatura truncada al nivel 2 es

$$S_2(x)_{s,t} = \left(1, x_t - x_s, \frac{1}{2}(x_t - x_s) \otimes (x_t - x_s) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^d \int_s^t ((x_u^i - x_s^i) dx_u^j - (x_u^j - x_s^j) dx_u^i) [e_i, e_j] \right).$$

Al tomar el logaritmo, nos quedamos con

$$\log(S_2(x)_{s,t}) = \left(0, x_t - x_s, \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^d \int_s^t ((x_u^i - x_s^i) dx_u^j - (x_u^j - x_s^j) dx_u^i) [e_i, e_j] \right),$$

es decir, recuperamos el incremento y el área.

Definición 2.28. Diremos que un rough path es **débilmente geométrico** si toma valores en $G^{(p)}(\mathbb{R}^d)$. Escribiremos $\mathbf{X} \in WG\Omega_p(\mathbb{R}^d)$.

De este modo, dada una trayectoria $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, para definir un rough path débilmente geométrico bastará con describir elementos de $\mathfrak{g}^{(p)}$. Por ejemplo, si $2 \leq p < 3$, será suficiente con tomar el incremento y una función de área.

En $G^{(n)}(\mathbb{R}^d)$ podemos dar una norma (de Carnot-Caratheódory)

$$\|\mathbf{g}\| := \inf \left\{ \int_0^T |d\gamma| : \gamma \in \mathcal{V}^1([0, T], \mathbb{R}^d), S_{(n)}(\gamma) = \mathbf{g} \right\},$$

que induce una métrica en $G^{(n)}$,

$$\mathbf{d}(\mathbf{g}, \mathbf{h}) := \|\mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{h}\|.$$

$(G^{(n)}, \mathbf{d})$ se convierte así en un espacio métrico (de hecho, un espacio geodésico).

No entraremos a discutir las propiedades de estos espacios más allá de lo que ya hemos establecido. Tan solo lo citamos para comprender algunos resultados que aparecerán más adelante, pero para el cuerpo del trabajo no tendrá mayor relevancia. Para un tratamiento más profundo sobre toda esta sección remitimos a [FV10b].

2.6. Regularidad Hölder

La regularidad de los rough paths se expresa también en términos de regularidad Hölder (véase [Gub04],[FV10b],[FH14]). En nuestro contexto, la aplicación

$$\begin{aligned} \omega : \quad \Delta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) &\longmapsto |t - s| \end{aligned}$$

es una función de control, lo que da lugar a definir rough paths con regularidad

$$|X_{s,t}^i| \lesssim |t - s|^{\frac{i}{p}}$$

para cada $i = 1, \dots, \lfloor p \rfloor$, donde \lesssim es \leq salvo multiplicación por una constante (independiente de s, t). Por otro lado, dada una función de p -variación finita, existe una reparametrización que la convierte en $1/p$ -Hölder.

De este modo, podemos decir que p -variación finita y $1/p$ -Hölder son, esencialmente, lo mismo. Esto nos permite definir rough paths desde el punto de vista de las seminormas Hölder:

Definición 2.29. *Dado un $\alpha \in (0, 1)$, $X : \Delta \rightarrow T^{(\lfloor \alpha^{-1} \rfloor)}(V)$ es un α -rough path si es un funcional multiplicativo tal que, para todo $i = 1, \dots, \lfloor \alpha^{-1} \rfloor$,*

$$\sup_{(s,t) \in \Delta} \frac{|X_{s,t}^i|}{|t - s|^{\alpha i}} < \infty.$$

Esta definición es especialmente útil al tratar con el movimiento browniano, pues su regularidad viene establecida en términos de seminormas Hölder, y por ello la utilizaremos en las secciones más vinculadas a procesos estocásticos. Todos los resultados anteriores, así como todos aquellos que formulemos en términos de p -variación, son válidos también para la definición Hölder.

Capítulo 3

Integración de rough paths

Definidos los rough paths, y siguiendo nuevamente la teoría de Lyons, damos una noción de integración *frente a* rough paths. Para ello abordaremos el concepto de *casi rough path* y su extensión única a un rough path. En la parte final del capítulo introduciremos los *rough paths controlados* de Gubinelli ([Gub04]).

3.1. Casi rough paths

A la hora de definir la integral de una 1-forma, nos encontraremos con un problema: el resultado no será un funcional multiplicativo, y por consiguiente no tendremos un rough path como desearíamos. Por ello nos conviene tratar un concepto algo más general.

Definición 3.1. Sean $p \geq 1$ y $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ una función de control. Diremos que $\mathbf{X} : \Delta_T \rightarrow T^{\lfloor p \rfloor}(V)$ es un **casi rough path** si satisface las dos condiciones siguientes:

1.

$$|X_{s,t}^i| \leq \frac{\omega(s,t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!}$$

para todos $(s,t) \in \Delta_T$, $i = 0, \dots, \lfloor p \rfloor$; y

2. existe $\theta > 1$ tal que

$$|(X_{s,u} \otimes X_{u,t})^i - X_{s,t}^i| \leq \omega(s,t)^\theta$$

para todos $s < u < t \in [0, T]$, $i = 0, \dots, \lfloor p \rfloor$.

La idea es que un casi-rough path es un funcional que cumple las hipótesis de regularidad que se le requieren a un rough path (condición 1) y que, pese a no ser multiplicativo, está *cerca* de serlo (condición 2); a esta condición se le llama **casi-multiplicatividad**. El siguiente teorema nos dice que todo casi-rough path tiene un único rough path asociado, en el sentido de que está *cerca* con respecto a la función de control ω .

Teorema 3.2. *Sean p, ω y θ como en la definición anterior, y sea \mathbf{X} un θ -casi p -rough path controlado por ω . Entonces existe un único p -rough path $\hat{\mathbf{X}}$ tal que*

$$\sup_{\substack{0 \leq s < t \leq T \\ i=0, \dots, [p]}} \frac{|\hat{X}_{s,t}^i - X_{s,t}^i|}{\omega(s,t)^\theta} < \infty. \quad (3.1)$$

Además existe una constante $K = K(p, \theta, \omega(0, T))$ tal que ese supremo es menor que K y la p -variación de $\hat{\mathbf{X}}$ está controlada por $K\omega$.

Demostración.

■ **Unicidad**

Supongamos que $\hat{\mathbf{X}}$ y $\tilde{\mathbf{X}}$ satisfacen el teorema. Probaremos por inducción sobre $j = 0, \dots, [p]$ que $\pi_j(\hat{\mathbf{X}}) = \pi_j(\tilde{\mathbf{X}})$; aquí π_j es la proyección sobre $T^{(j)}(V)$.

Para $j = 0$ esto es trivialmente cierto ($1 = 1$).

Supongamos ahora que $\pi_{j-1}(\hat{\mathbf{X}}) = \pi_{j-1}(\tilde{\mathbf{X}})$ para un cierto j . Entonces $\delta := \hat{X}^j - \tilde{X}^j$ es un funcional aditivo, luego existe una función $\rho : [0, T] \rightarrow V^{\otimes j}$ tal que $\hat{X}_{s,t}^i - X_{s,t}^i = \rho(t) - \rho(s)$ para todos $(s, t) \in \Delta_T$. Por la condición (3.1), ρ es constante, lo que implica que $\pi_j(\hat{\mathbf{X}}) = \pi_j(\tilde{\mathbf{X}})$, concluyendo la prueba de la unicidad.

■ **Existencia**

La demostración nuevamente se hará por inducción sobre j . De hecho probaremos lo siguiente:

Si \mathbf{X} es un θ -casi p -rough path controlado por ω tal que $\pi_{j-1}(\mathbf{X})$ es multiplicativo, entonces existe un θ -casi p -rough path $\tilde{\mathbf{X}}$ controlado por $K_j\omega$, con $K_j = K_j(j, \theta, p, \omega(0, T))$ tal que

$$1. |\tilde{X}_{s,t}^i| \leq \frac{(K_j\omega(s,t))^{\frac{i}{p}}}{\beta(\frac{i}{p})!} \text{ para todos } (s, t) \in \Delta, i = 0, \dots, [p];$$

2. $|X_{s,t}^i - \tilde{X}_{s,t}^i| \leq K_j \omega(s,t)^\theta$ para todos $(s,t) \in \Delta$, $i = 1, \dots, [p]$;
3. $\pi_j(\tilde{X})$ es multiplicativo.

De este modo, inductivamente estaremos construyendo un funcional multiplicativo de orden arbitrario, lo que nos llevará finalmente a construir un rough path.

En primer lugar debemos definir $\tilde{\mathbf{X}}$. Para ello utilizaremos un procedimiento similar al del Teorema 2.14. Tomamos $(s,t) \in \Delta$ y, para cada partición Π definimos $\tilde{\mathbf{X}}(\Pi)_{s,t} := \mathbf{X}_{s,t_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{X}_{t_{r-1},t}$. Si eliminamos progresivamente los puntos de la partición llegamos a la desigualdad

$$|(\tilde{\mathbf{X}}(\Pi)_{s,t} - X_{s,t})^j| \leq \left(1 + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{2}{r-1}\right)^\theta\right) \omega(s,t)^\theta. \quad (3.2)$$

De aquí puede deducirse un criterio de convergencia de Cauchy, lo que nos permite establecer la existencia del límite cuando $|\Pi| \rightarrow 0$. Así, definimos

$$\tilde{X}_{s,t}^i := \begin{cases} X_{s,t}^i, & \text{si } i \neq j \\ \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} (\tilde{\mathbf{X}}(\Pi)_{s,t}^j), & \text{si } i = j \end{cases}$$

La desigualdad (3.2) nos garantiza 1 y 2, mientras que 3 se cumple por construcción.

Tan solo resta probar que $\tilde{\mathbf{X}}$ es θ -casi multiplicativo.

Sean $s < u < t \in [0, T]$. Dado que $\pi_j(\tilde{\mathbf{X}})$ es multiplicativo, los únicos términos no nulos de $\tilde{\mathbf{X}}_{s,u} \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{u,t} - \tilde{\mathbf{X}}_{s,t}$ son de grado estrictamente mayor que j .

Definimos el funcional $R_{s,t} := \tilde{\mathbf{X}}_{s,t} - X_{s,t}$. Para un $n > j$,

$$\begin{aligned} (\tilde{X}_{s,u} \otimes \tilde{X}_{u,t} - \tilde{X}_{s,t})^n &= \sum_{k=0}^n \tilde{X}_{s,u}^k \otimes \tilde{X}_{u,t}^{n-k} - \tilde{X}_{s,t}^n \\ &= \sum_{k=0}^n (X_{s,u}^k + R_{s,u}^k) \otimes (X_{u,t}^{n-k} + R_{u,t}^{n-k}) - (X_{s,t}^n + R_{s,t}^n) \\ &= \underbrace{(X_{s,u} \otimes X_{u,t})^n - X_{s,t}^n}_I + \underbrace{(R_{s,u} \otimes R_{u,t})^n - R_{s,t}^n}_{II} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^n (X_{s,u}^k \otimes R_{u,t}^{n-k} + R_{s,u}^k \otimes X_{u,t}^{n-k})}_{III} \end{aligned}$$

Dado que \mathbf{X} es θ -casi multiplicativo, $|I| \leq \omega(s, t)^\theta$; por otro lado, 2 nos garantiza que $|II| \leq K_j \omega(s, t)^\theta + [p] K_j^2 \omega(s, t)^{2\theta}$. Combinando ambas propiedades,

$$|III| \leq \frac{2}{\beta} K_j \omega(s, t)^\theta \max\{1, \omega(s, t)\}.$$

Por consiguiente,

$$|\tilde{\mathbf{X}}_{s,u} \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{u,t} - \tilde{\mathbf{X}}_{s,t}| \leq C(\theta, p, \omega(0, T)) K_j \omega(s, t)^\theta,$$

lo que prueba que $\tilde{\mathbf{X}}$ es θ -casi multiplicativo, concluyendo la demostración. \square

La aplicación que asigna a un casi-rough path su único rough path asociado es, además, continua:

Teorema 3.3. Sean \mathbf{X}, \mathbf{Y} dos θ -casi- p -rough paths, y sean $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}$ sus p -rough paths asociados. Supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todos $i = 0, \dots, [p]$, $(s, t) \in \Delta$,

$$|X_{s,t}^i - Y_{s,t}^i| \leq \varepsilon \omega(s, t)^{\frac{i}{p}}.$$

Entonces existe una constante B_ε tal que $B_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ y

$$|\hat{X}_{s,t}^i - \hat{Y}_{s,t}^i| \leq B_\varepsilon \omega(s, t)^{\frac{i}{p}}.$$

Idea de la demostración. Probamos el caso $i = 1$; la demostración completa sigue el método de inducción con las mismas herramientas y puede consultarse en [LQ02].

Como X, Y son θ -casi rough paths, se tiene que

$$|X_{s,u}^1 + X_{u,t}^1 - X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^\theta,$$

y lo mismo sucede con \mathbf{Y} . Entonces, si tomamos una partición Π de (s, t) y le retiramos un punto como en el procedimiento habitual para obtener Π' , llegamos a la cota

$$\begin{aligned} |X(\Pi)_{s,t}^1 - X(\Pi')_{s,t}^1 - (Y(\Pi)_{s,t}^1 - Y(\Pi')_{s,t}^1)| &\leq |X_{t_{j-1}, t_j}^1 + X_{t_j, t_{j+1}}^1 - X_{t_{j-1}, t_{j+1}}^1| \\ &\quad + |Y_{t_{j-1}, t_j}^1 + Y_{t_j, t_{j+1}}^1 - Y_{t_{j-1}, t_{j+1}}^1| \\ &\leq 2\omega(t_{j-1}, t_{j+1})^\theta \leq 2 \left(\frac{2}{r-1} \right)^\theta \omega(s, t)^\theta. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
|X(\Pi)_{s,t}^1 - X(\Pi')_{s,t}^1 - (Y(\Pi)_{s,t}^1 - Y(\Pi')_{s,t}^1)| &\leq |X_{t_{j-1},t_j}^1 - Y_{t_{j-1},t_j}^1| \\
&\quad + |X_{t_j,t_{j+1}}^1 - Y_{t_j,t_{j+1}}^1| \\
&\quad + |X_{t_{j+1},t_{j+1}}^1 - Y_{t_{j+1},t_{j+1}}^1| \\
&\leq 3\varepsilon\omega(t_{j-1},t_{j+1})^{\frac{1}{p}} \leq 3\varepsilon\left(\frac{2}{r-1}\right)^{\frac{1}{p}}\omega(s,t)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Tomamos ahora un γ tal que $1/p < 1 < \gamma < \theta$ y α tal que $\alpha\theta + (1-\alpha)\frac{1}{p} = \gamma$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|X(\Pi)_{s,t}^1 - X(\Pi')_{s,t}^1 - (Y(\Pi)_{s,t}^1 - Y(\Pi')_{s,t}^1)| &\leq \left[2\left(\frac{2}{r-1}\right)^\theta\omega(s,t)^\theta\right]^\alpha \\
&\quad \times \left[3\varepsilon\left(\frac{2}{r-1}\right)^{\frac{1}{p}}\omega(s,t)^{\frac{1}{p}}\right]^{1-\alpha} \\
&= \omega(s,t)^{\frac{1}{p}} \left[2\left(\frac{2}{r-1}\right)^\theta\omega(s,t)^{\theta-\frac{1}{p}}\right]^\alpha \\
&\quad \left[3\varepsilon\left(\frac{2}{r-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{1-\alpha} \\
&\leq K\varepsilon^{\frac{\theta-\gamma}{\theta-\frac{1}{p}}}\left(\frac{2}{r-1}\right)^\gamma\omega(s,t)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Eliminando puntos como siempre,

$$|X(\Pi)_{s,t}^1 - X_{s,t}^1 - (Y(\Pi)_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1)| \leq K\varepsilon^{\frac{\theta-\gamma}{\theta-\frac{1}{p}}}\left(1 + \sum_{r=2}^{\infty}\left(\frac{2}{r-1}\right)^\gamma\right)\omega(s,t)^{\frac{1}{p}},$$

y, por tanto, para cualquier partici3n,

$$|X(\Pi)_{s,t}^1 - Y(\Pi)_{s,t}^1| \leq \left(\varepsilon + K\varepsilon^{\frac{\theta-\gamma}{\theta-\frac{1}{p}}}\left(1 + \sum_{r=2}^{\infty}\left(\frac{2}{r-1}\right)^\gamma\right)\right)\omega(s,t)^{\frac{1}{p}}$$

lo que prueba el enunciado en $i = 1$.

□

3.2. Integración de 1-formas

Nuestro objetivo ahora es definir integrales de la forma

$$\int f(\mathbf{Y})d\mathbf{X} \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{X} \in \Omega_p(V_1)$, $\mathbf{Y} \in \Omega_p(V_2)$ y $f : V_2 \rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_3)$. Más concretamente, y con la vista puesta en ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} dY_t &= f(Y_t)dX_t \\ Y_0 &= \xi \end{cases},$$

nos interesa el caso $f : V_2 \rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)$, aunque a la hora de definir la integral esto sea indiferente. Por supuesto, la situación en que \mathbf{X} e \mathbf{Y} tienen regularidades distintas queda incluida en nuestro estudio; bastará con considerar la p -variación de mayor p .

Observamos que podemos tratar un caso más sencillo, dado por expresiones de la forma

$$\int \alpha(\mathbf{Z})d\mathbf{Z}. \quad (3.4)$$

Si queremos recuperar una integral de la forma (3.3), bastará con tomar $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \Omega_p(V_1 \oplus V_2)$ y $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (1_{V_1}, f(\mathbf{Y}))$, y proyectar sobre la segunda variable.

Observación 3.4. Conviene señalar que (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) contiene más información que la que proporcionan \mathbf{X} e \mathbf{Y} por separado, pues (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) recoge las integrales cruzadas entre \mathbf{X} e \mathbf{Y} .

Por consiguiente, nos limitaremos a estudiar el caso (3.4), con $\mathbf{Z} \in \Omega_p(V)$, $\alpha : V \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$.

3.2.1. Funciones Lipschitz

Para definir nuestra integral necesitamos imponer cierta regularidad sobre α . Esta condición se formulará en términos de funciones Lipschitz, pero con mayor generalidad que en el sentido clásico.

Definición 3.5. Sean $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (k, k+1]$, y sea F un subconjunto cerrado de V . Sea $f : F \rightarrow W$ y, para cada $j = 1, \dots, k$, sea $f^j : F \rightarrow \mathcal{L}(V^{\otimes j}, W)$ una función que toma valores en el espacio de aplicaciones j -lineales simétricas de V en W . Diremos que $(f = f^0, f^1, \dots, f^k)$ o, simplemente, f es una función γ -Lipschitz en F si para todo $j = 0, \dots, k$ y una constante $M > 0$

1. $\sup_{x \in F} |f^j(x)| \leq M$, y
2. existe una $R_j : V \times V \rightarrow \mathcal{L}(V^{\otimes j}, W)$ tal que para todos los $x, y \in F$, $v \in V^{\otimes j}$,

$$f^j(y)(v) = \sum_{l=0}^{k-j} \frac{1}{l!} f^{j+l}(x)(v \otimes (y-x)^{\otimes l}) + R_j(x, y)(v) \quad (3.5)$$

$$|R_j(x, y)| \leq M|x-y|^{\gamma-j}. \quad (3.6)$$

Escribiremos $f \in \text{Lip}(\gamma, F)$, y a la menor constante M posible la denotaremos por $\|f\|_{\text{Lip}(\gamma, F)}$. En caso de que $F = V$, escribiremos simplemente $f \in \text{Lip}(\gamma)$.

Esta definición no es otra cosa que una extensión de la expansión de Taylor clásica, en la misma línea que Whitney [Whi34], a conjuntos cerrados (por ejemplo, de esta forma podemos definir expansiones de Taylor en el conjunto de Cantor) y con regularidad no entera (el residuo, en nuestro caso, tiene regularidad Hölder $\gamma - k \in (0, 1)$).

Para nuestro objetivo, dado un rough path $\mathbf{Z} \in \Omega_p(V)$, consideraremos $\alpha : V \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$, $\alpha \in \text{Lip}(\gamma-1)$ con un cierto $\gamma > p$; es decir, tenemos $\alpha = \alpha^0$ y $[p]-1$ funciones $\alpha^1, \dots, \alpha^{[p]-1}$, $\alpha^j : V \rightarrow \mathcal{L}(V^{\otimes j}, \mathcal{L}(V, W))$ en las condiciones de la definición 3.5.

Supongamos por ahora que Z es una trayectoria de variación acotada. En tal caso, la simetría de α nos permite sustituir (x, y) por (Z_s, Z_u) , y como

$$\begin{aligned} \frac{1}{l!} (Z_u - Z_s)^{\otimes l} &= \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{s < u_1 < \dots < u_l < u}} \int dZ_{u_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dZ_{u_{\sigma(l)}} \\ &= \text{Sym} \left(\int_{s < u_1 < \dots < u_l < u} dZ_{u_1} \otimes \dots \otimes dZ_{u_l} \right), \end{aligned}$$

en una primera aproximación tenemos que

$$\alpha(Z_u) = \sum_{l=0}^{[p]-1} \alpha^l(Z_s) Z_{s,u}^l + R_0(Z_s, Z_u);$$

integrando,

$$\int_s^t \alpha(Z_u) dZ_u = \sum_{l=0}^{[p]-1} \alpha^l(Z_s) Z_{s,t}^{l+1} + \int_s^t R_0(Z_s, Z_u) dZ_u.$$

Si asumimos que Z tiene 1-variación controlada por ω , entonces el residuo será de orden $\omega^{\frac{\gamma}{p}}$, y dado que $\gamma > p$, el término será despreciable. Por supuesto, este argumento es simplemente intuitivo, pero la definición de integral le dará verdadero rigor.

Con estas consideraciones definimos

$$Y_{s,t}^1 := \sum_{l=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^l(Z_s) Z_{s,t}^{l+1};$$

esta expresión tiene sentido para cualquier p -rough path, tomando $Z_s = Z_0 + Z_{s,t}^1$.

A partir de aquí, podemos definir formalmente los niveles superiores:

$$\begin{aligned} Y_{s,t}^n &= \int \cdots \int_{s < u_1 < \cdots < u_n < t} dY_{s,u_1}^1 \otimes \cdots \otimes dY_{s,u_n}^1 \\ &= \int \cdots \int_{s < u_1 < \cdots < u_n < t} \sum_{l_1=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^{l_1}(Z_s) Z_{s,u_1}^{l_1+1} \otimes \cdots \otimes \sum_{l_n=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^{l_n}(Z_s) Z_{s,u_n}^{l_n+1} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\lfloor p \rfloor} \alpha^{k_1-1}(Z_s) \cdots \alpha^{k_n-1}(Z_s) \int \cdots \int_{s < u_1 < \cdots < u_n < t} dZ_{s,u_1}^{k_1} \otimes \cdots \otimes dZ_{s,u_n}^{k_n}. \end{aligned}$$

Para que esta expresión no dependa de integrales, realizamos un pequeño inciso combinatorio. Si Z es suficientemente regular, entonces

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int_{s < u_1 < \cdots < u_n < t} dZ_{s,u_1}^{k_1} \otimes \cdots \otimes dZ_{s,u_n}^{k_n} \\ &= \int_S \dot{Z}_{v_{1,1}} \otimes \cdots \otimes \dot{Z}_{v_{1,k_1}} \otimes \dot{Z}_{v_{2,1}} \otimes \cdots \otimes \dot{Z}_{v_{2,k_2}} \otimes \cdots \otimes \dot{Z}_{v_{n,1}} \otimes \cdots \otimes \dot{Z}_{v_{n,k_n}}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

donde $S \subset \mathbb{R}^{k_1 + \cdots + k_n}$ es la región dada por las desigualdades

$$\begin{cases} s < v_{1,1} < \cdots < v_{1,k_1} < t \\ s < v_{2,1} < \cdots < v_{2,k_2} < t \\ \vdots \\ s < v_{n,1} < \cdots < v_{n,k_n} < t \\ s < v_{1,k_1} < \cdots < v_{n,k_n} < t \end{cases}$$

Queremos preservar las relaciones de la región S , por lo que nos interesará tomar el siguiente conjunto de permutaciones.

Definición 3.6. *Dados k_1, \dots, k_n , diremos que π es una **permutación ordenada** (ordered shuffle), y escribiremos $\pi \in \mathcal{OS}(k_1, \dots, k_n)$ si π es una permutación de $k_1 + \dots + k_n$ elementos que cumple las relaciones*

$$\begin{aligned} \pi(1) &< \pi(2) < \dots < \pi(k_1) \\ \pi(k_1 + 1) &< \dots < \pi(k_1 + k_2) \\ &\dots \\ \pi(k_1 + \dots + k_{n-1} + 1) &< \dots < \pi(k_1 + \dots + k_n) \\ \pi(k_1) &< \pi(k_2) < \dots < \pi(k_n). \end{aligned}$$

Entonces, con lo anterior, tenemos que

$$\int_{s < u_1 < \dots < u_n < t} \dots \int dZ_{s,u_1}^{k_1} \otimes \dots \otimes dZ_{s,u_n}^{k_n} = \sum_{\pi \in \mathcal{OS}(k_1, \dots, k_n)} \pi^{-1} Z_{s,t}^{k_1 + \dots + k_n}$$

donde $\pi(x_1 \otimes \dots \otimes x_K) := x_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(K)}$; por consiguiente, podemos expresar (3.7) como

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\lfloor p \rfloor} \alpha^{k_1-1}(Z_s) \otimes \dots \otimes \alpha^{k_n-1}(Z_s) \sum_{\pi \in \mathcal{OS}(k_1, \dots, k_n)} \pi^{-1} Z_{s,t}^{k_1 + \dots + k_n};$$

nuevamente, esta expresión es válida también para rough paths.

3.2.2. Definición de integral

La expresión así definida constituye, de hecho, un casi rough path.

Teorema 3.7. *Sea $\mathbf{Z} \in G\Omega_p(V)$ para un cierto $p \geq 1$, y sea $\alpha : V \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$, $\alpha \in \text{Lip}(\gamma-1)$ con $\gamma > p$. Entonces $\mathbf{Y} : \Delta \rightarrow T^{(\lfloor p \rfloor)}(W)$ definido como*

$$Y_{s,t}^n := \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\lfloor p \rfloor} \alpha^{k_1-1}(Z_s) \otimes \dots \otimes \alpha^{k_n-1}(Z_s) \sum_{\pi \in \mathcal{OS}(k_1, \dots, k_n)} \pi^{-1} Z_{s,t}^{k_1 + \dots + k_n} \quad (3.8)$$

es un casi p -rough path.

Definición 3.8. La integral de α sobre \mathbf{Z} es el p -rough path asociado al casi p -rough path del Teorema 3.7. La denotaremos por

$$\int_s^t \alpha(\mathbf{Z}_u) d\mathbf{Z}_u,$$

y al término de nivel n ,

$$\int_s^t \alpha(Z_u) dZ_u^n.$$

Para probar el Teorema 3.7 reproduciremos el procedimiento de [LCL07]. Necesitaremos dos lemas técnicos.

Lema 3.9. Para todos $x, y, z, v \in V$,

$$\sum_{l=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} (\alpha^l(y) - R_l(x, y)) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l}}{l!} \right) (v) = \sum_{l=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^l(x) \left(\frac{(z - x)^{\otimes l}}{l!} \right) (v).$$

Demostración. Dado que $\alpha \in \text{Lip}(\gamma - 1)$,

$$\begin{aligned} \alpha^l(y) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l}}{l!} \right) (v) &= \sum_{m=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^{m+l}(x) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l} \otimes (y - x)^{\otimes m}}{l!m!} \right) (v) \\ &\quad + R_l(x, y) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l}}{l!} \right) (v) \\ &= \sum_{m=l}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^m(x) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l} \otimes (y - x)^{\otimes (m-l)}}{l!(m-l)!} \right) (v) \\ &\quad + R_l(x, y) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l}}{l!} \right) (v), \end{aligned}$$

luego

$$(\alpha^l(y) - R_l(x, y)) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l}}{l!} \right) (v) = \sum_{m=l}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^m(x) \left(\frac{(z - y)^{\otimes l} \otimes (y - x)^{\otimes (m-l)}}{l!(m-l)!} \right) (v).$$

Sumando en l ,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} (\alpha^l(y) - R_l(x, y)) \left(\frac{(z-y)^{\otimes l}}{l!} \right) (v) \\ = \sum_{l=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \sum_{m=l}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^m(x) \left(\frac{(z-y)^{\otimes l} \otimes (y-x)^{\otimes (m-l)}}{l!(m-l)!} \right) (v) \\ = \sum_{m=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^m(x) \underbrace{\left(\sum_{l=0}^m \frac{(z-y)^{\otimes l} \otimes (y-x)^{\otimes (m-l)}}{l!(m-l)!} (v) \right)}_*. \end{aligned}$$

La demostración concluye observando que la proyección sobre tensores simétricos de (*) es exactamente $\frac{(z-x)^{\otimes m}}{m!}$.

□

Lema 3.10. Para todos $s < u < t \in [0, T]$

$$Y_{s,u} \otimes Y_{u,t} - Y_{s,t} = Y_{s,u} \times N_{s,u,t},$$

donde $N_{s,u,t}$ se define como sigue:

Para $\epsilon \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, \dots, \lfloor p \rfloor\}$,

$$F_l^\epsilon(Z_s, Z_u) = \begin{cases} R_l(Z_s, Z_u), & \text{si } \epsilon = 0, \\ -\alpha^l(Z_s), & \text{si } \epsilon = 1 \end{cases};$$

entonces

$$N_{s,u,t}^j = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j \in \{1, \dots, \lfloor p \rfloor\} \\ \epsilon_1, \dots, \epsilon_j \in \{0, 1\} \\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_j = 0}} F_{k_1-1}^{\epsilon_1}(Z_s, Z_u) \cdots F_{k_j-1}^{\epsilon_j}(Z_s, Z_u) \sum_{\pi \in \mathcal{OS}(k_1, \dots, k_j)} \pi^{-1} Z_{u,t}^{k_1 + \dots + k_j}.$$

Observación 3.11. Pese a la complicada notación, lo único que estamos haciendo es considerar, en la primera suma, todas las combinaciones posibles excepto aquellas en las que todos los términos sean α .

Demostración. Supongamos que \mathbf{Z} es suficientemente regular (por ejemplo Lipschitz). Entonces

$$Y_{s,t}^n = \int_{s < v_1 < \dots < v_n < t} \sum_{l_1=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^{l_1}(Z_s)(Z_{s,v_1}^{l_1})(dZ_{v_1}) \cdots \sum_{l_n=0}^{\lfloor p \rfloor - 1} \alpha^{l_n}(Z_s)(Z_{s,v_n}^{l_n})(dZ_{v_n}).$$

Por otro lado, el Lema 3.9 implica

$$\sum_{l=0}^{[p]-1} (\alpha^l(Z_u) - R_l(Z_s, Z_u))(Z_{u,t}^l)(dZ_t) = \sum_{l=0}^{[p]-1} \alpha^l(Z_s)(Z_{s,t}^l)(dZ_t).$$

Luego, si fijamos n , combinando ambas cosas obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n Y_{s,u}^i \otimes Y_{u,t}^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n Y_{s,u}^i \otimes \int_{s < v_{i+1} < \dots < v_n < t} \sum_{l_{i+1}=0}^{[p]-1} \alpha^{l_{i+1}}(Z_s)(Z_{s,v_{i+1}}^{l_{i+1}})(dZ_{v_{i+1}}) \\ & \quad \times \dots \times \sum_{l_n=0}^{[p]-1} \alpha^{l_n}(Z_s)(Z_{s,v_n}^{l_n})(dZ_{v_n}) \\ &= \sum_{i=0}^n Y_{s,u}^i \otimes \int_{u < v_{i+1} < \dots < v_n < t} \left[\sum_{l_{i+1}=0}^{[p]-1} \left(\alpha^{l_{i+1}}(Z_s)(Z_{s,v_{i+1}}^{l_{i+1}}) + R_{l_{i+1}}(Z_s, Z_u)(Z_{u,v_{i+1}}^{l_{i+1}}) \right) dZ_{v_{i+1}} \right] \\ & \quad \times \dots \times \left[\sum_{l_n=0}^{[p]-1} \left(\alpha^{l_n}(Z_s)(Z_{s,v_n}^{l_n}) + R_{l_n}(Z_s, Z_u)(Z_{u,v_n}^{l_n}) \right) dZ_{v_n} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n Y_{s,u}^i \otimes N_{s,u,t}^{n-i} + \sum_{i=0}^n \left(\int_{\substack{s < v_1 < \dots < v_i < u \\ u < v_{i+1} < \dots < v_n < t}} \left[\sum_{l_1=0}^{[p]-1} \alpha^{l_1}(Z_s)(Z_{s,v_1}^{l_1})(Z_{s,v_1}^{l_1}) dZ_{v_1} \right] \right. \\ & \quad \times \dots \times \left[\sum_{l_i=0}^{[p]-1} \alpha^{l_i}(Z_s)(Z_{s,v_i}^{l_i})(Z_{s,v_i}^{l_i}) dZ_{v_i} \right] \\ & \quad \times \left[\sum_{l_{i+1}=0}^{[p]-1} \alpha^{l_{i+1}}(Z_u)(Z_{u,v_{i+1}}^{l_{i+1}})(Z_{u,v_{i+1}}^{l_{i+1}}) dZ_{v_{i+1}} \right] \\ & \quad \left. \times \dots \times \left[\sum_{l_n=0}^{[p]-1} \alpha^{l_n}(Z_u)(Z_{u,v_n}^{l_n})(Z_{u,v_n}^{l_n}) dZ_{v_n} \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^n Y_{s,u}^i \otimes N_{s,u,t}^{n-i} + Y_{s,t}^n, \end{aligned}$$

lo que prueba que $\mathbf{Y}_{s,u} \otimes \mathbf{Y}_{u,t} = \mathbf{Y}_{s,u} \otimes N_{s,u,t} + \mathbf{Y}_{s,t}$.

Ahora, como ambos lados de la igualdad son continuos en la topología de p -variación, si \mathbf{Z} es un p -rough path geométrico un argumento de densidad concluye la prueba. \square

Con este resultado, la prueba del Teorema 3.7 es casi inmediata.

Demostración. Supongamos que la p -variación de \mathbf{Z} está controlada por una función de control ω . Tomamos $s < u < t \in [0, T]$ y $j \geq 1$.

En la definición de $N_{s,u,t}^j$, cada sumando tiene un término de la forma

$$R_{l_i-1}(Z_s, Z_u);$$

dado que $\alpha \in \text{Lip}(\gamma - 1)$, se tiene que

$$|R_{l_i-1}(Z_s, Z_u)| \leq \|\alpha\|_{\text{Lip}(\gamma-1)} |Z_{s,u}^1|^{\gamma-l_i} \lesssim \omega(s, t)^{\frac{\gamma-l_i}{p}}.$$

Por otro lado,

$$|Z_{u,t}^{l_1+\dots+l_j}| \lesssim \omega(s, t)^{\frac{l_1+\dots+l_j}{p}}.$$

Por consiguiente $|N_{s,u,t}^j| \lesssim \omega(s, t)^{\frac{j}{p}}$.

Por otra parte, $|Y_{s,u}| \lesssim \omega(s, t)^{\frac{j}{p}}$.

Aplicando el Lema 3.10, y dado que $\gamma > p$, tenemos que Y es un $\frac{\gamma}{p}$ -casi p -rough path. \square

Observación 3.12. Para definir la integral, en (3.8) basta con tomar los términos tales que $k_1 + \dots + k_n \leq [p]$. En efecto, si tomamos

$$\tilde{Y}_{s,t}^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, [p]\} \\ k_1 + \dots + k_n \leq [p]}} \alpha^{k_1-1}(Z_s) \otimes \dots \otimes \alpha^{k_n-1}(Z_s) \sum_{\pi \in \mathcal{OS}(k_1, \dots, k_n)} \pi^{-1} Z_{s,t}^{k_1+\dots+k_n}, \quad (3.9)$$

entonces para todo $i = 1, \dots, [p]$, $|Y_{s,t}^i - \tilde{Y}_{s,t}^i| \lesssim \omega(s, t)^{\frac{[p]+1}{p}}$, lo que implica que \tilde{Y} es también un casi p -rough path. El Teorema 3.2 nos garantiza además que su rough path asociado es el mismo.

Ejemplo 3.13. Supongamos que $\mathbf{Z} \in G\Omega_p(V)$ con $2 \leq p < 3$, y $\alpha \in \text{Lip}(\gamma - 1)$ con $\gamma > p$. Entonces, de acuerdo con la observación anterior, el casi rough path a partir del cual se construye $\int \alpha(\mathbf{Z})d\mathbf{Z}$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{s,t}^1 &= \alpha^0(Z_s)Z_{s,t}^1 + \alpha^1(Z_s)Z_{s,t}^2 \\ \tilde{Y}_{s,t}^2 &= (\alpha^0(Z_s) \otimes \alpha^0(Z_s))Z_{s,t}^2. \end{aligned}$$

Para comprobar que $\tilde{\mathbf{Y}}$ es casi multiplicativo, realizamos el cálculo explícito. En primer lugar, sustituyendo $\alpha^0(Z_u)$ y $\alpha^1(Z_u)$ por sus expansiones de Taylor en torno a \mathbf{Z}_s ,

$$\begin{aligned}
(\tilde{Y}_{s,u} \otimes \tilde{Y}_{u,t})^1 - \tilde{Y}_{s,t}^1 &= \alpha^0(Z_s)Z_{s,u}^1 + \alpha^1(Z_s)Z_{s,u}^2 + \alpha^0(Z_u)Z_{u,t}^1 + \alpha^1(Z_u)Z_{u,t}^2 \\
&\quad - \alpha^0(Z_s)Z_{s,t}^1 - \alpha^1(Z_s)Z_{s,t}^2 \\
&= \alpha^0(Z_s)Z_{s,u}^1 + \alpha^1(Z_s)Z_{s,u}^2 + \alpha^0(Z_s)Z_{u,t}^1 \\
&\quad + \alpha^1(Z_s)(Z_{u,t}^1 \otimes Z_{s,u}^1) + \alpha^2(Z_s)(Z_{u,t}^1 \otimes Z_{s,u}^1 \otimes Z_{s,u}^1) \\
&\quad + R_0(Z_s, Z_u)Z_{u,t}^1 + \alpha^1(Z_s)Z_{u,t}^2 + \alpha^2(Z_s)(Z_{u,t}^2 \otimes Z_{s,u}^1) \\
&\quad + R_1(Z_s, Z_u)Z_{u,t}^2 - \alpha^0(Z_s)Z_{s,t}^1 - \alpha^1(Z_s)Z_{s,t}^2 \\
&= \alpha^2(Z_s)(Z_{u,t}^1 \otimes Z_{s,u}^1 \otimes Z_{s,u}^1) + R_0(Z_s, Z_u)Z_{u,t}^1 \\
&\quad + \alpha^2(Z_s)(Z_{u,t}^2 \otimes Z_{s,u}^1) + R_1(Z_s, Z_u)Z_{u,t}^2,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la multiplicatividad de Z . Acotando los términos,

$$\begin{aligned}
|\alpha^2(Z_s)(Z_{u,t}^1 \otimes Z_{s,u}^1 \otimes Z_{s,u}^1)| &\leq \|\alpha\|_{\text{Lip}(\gamma-1)} \omega^{\frac{3}{p}}(s, t) \\
|R_0(Z_s, Z_u)Z_{u,t}^1| &\leq \|\alpha\|_{\text{Lip}(\gamma-1)} \omega^{\frac{\gamma+1}{p}}(s, t) \\
|\alpha^2(Z_s)(Z_{u,t}^2 \otimes Z_{s,u}^1)| &\leq \|\alpha\|_{\text{Lip}(\gamma-1)} \omega^{\frac{3}{p}}(s, t) \\
|R_1(Z_s, Z_u)Z_{u,t}^2| &\leq \|\alpha\|_{\text{Lip}(\gamma-1)} \omega^{\frac{\gamma+1}{p}}(s, t).
\end{aligned}$$

Con los mismos argumentos, aunque con muchos más términos, podemos obtener cotas similares para $|(\tilde{Y}_{s,u} \otimes \tilde{Y}_{u,t})^2 - \tilde{Y}_{s,t}^2|$. De este modo hemos probado que $\tilde{\mathbf{Y}}$ es un casi rough path, pero para ello no hemos necesitado que \mathbf{Z} fuera un rough path geométrico (tan solo un rough path).

Este ejemplo da lugar a la siguiente proposición.

Proposición 3.14. *Dado un $\mathbf{Z} \in \Omega_p(V)$ con $2 \leq p < 3$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ definido en 3.9 es un casi p -rough path. Por consiguiente, la integral de la definición 3.4 está bien definida para cualquier p -rough path con $2 \leq p < 3$ (y no solo para rough paths geométricos).*

Este hecho es importante porque permite dar una noción de integral de 1-formas para, por ejemplo, el movimiento browniano con la integral de Itô (que no da lugar a un rough path geométrico).

Para cerrar la sección, y como consecuencia de los Teoremas 3.2 y 3.3, tenemos que la integral también es continua. Esto queda recogido en el siguiente resultado, cuya prueba omitimos (puede hallarse en [LCL07]).

Teorema 3.15. *La aplicación $\mathbf{Z} \mapsto \int \alpha(\mathbf{Z})d\mathbf{Z}$ es continua de $G\Omega_p(V)$ en $G\Omega_p(W)$. Además, si ω es una función de control, existe una constante*

$$K = K(\|\alpha\|_{\text{Lip}(\gamma)}, p, \gamma, \omega(0, T))$$

tal que para todo $\mathbf{Z} \in G\Omega_p(V)$ con p -variación controlada por ω

$$\left| \int_s^t \alpha(Z)dZ^i \right| \leq K\omega(s, t)^{\frac{i}{p}}$$

para todos $(s, t) \in \Delta$, $i = 1, \dots, [p]$.

3.3. Rough paths controlados

La teoría de integración expuesta hasta ahora aporta una definición de integral más rica que la de Young, pero plantea algunos problemas. En efecto, pese a la utilidad de dicha definición de cara a las ecuaciones de control que estudiaremos en el siguiente capítulo, no debemos ignorar la rigidez de las hipótesis: la integral de Lyons se reduce a rough paths geométricos (excepto en el caso $2 \leq p < 3$, como vimos en la Proposición 3.14), pues sus argumentos se basan en extender por continuidad integrales de funciones de variación acotada.

Nuestro interés está ahora en integrar objetos más generales sin depender de la estructura tan rígida de los rough paths (geométricos o no), y esto es lo que llevó a Massimiliano Gubinelli a reinterpretar la teoría de Lyons en [Gub04] a través de un marco algebraico que bebe directamente de herramientas empleadas en topología algebraica (complejos de cadenas y cocadenas, lema de escisión, etc.). En esta sección exponemos algunos resultados y definiciones del citado artículo en el contexto de la teoría de rough paths de Lyons.

La idea fundamental consiste en estudiar expansiones de Taylor cuya *base* venga dada por un rough path de referencia. Es por esto que, en sintonía con las expansiones de la sección de funciones Lipschitz, adoptaremos la notación de regularidad Hölder.

El caso más simple lo constituyen expansiones de Taylor de primer orden, y este fue el punto de partida de Gubinelli.

Definición 3.16. Sea \mathbf{X} un α -rough path, $0 < \alpha < 1$. Diremos que una trayectoria $Z \in C^\alpha([0, T], V)$ es un **rough path controlado** por \mathbf{X} con residuo de orden $\eta > \alpha$ si existen $Z' \in C^{\eta-\alpha}([0, T], V \otimes V^*)$ y $R_Z \in C^\eta([0, T]^2, V)$ tales que

$$Z_t = Z_s + Z'_s X_{s,t}^1 + R_Z. \quad (3.10)$$

Llamaremos a Z' **derivada de Gubinelli** de Z con respecto a \mathbf{X} , y escribiremos $(Z, Z') \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, \eta}([0, T], V)$.

En este espacio consideramos la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{X}, \alpha, \eta}$ dada por

$$\|Z\|_{\mathbf{X}, \alpha, \eta} := \|Z\|_\infty + \|Z\|_\alpha + \|Z'\|_{\eta-\alpha} + \|R_Z\|_\eta.$$

Veamos algunos ejemplos de rough paths controlados.

Ejemplo 3.17. Trivialmente, si \mathbf{X} es un rough path asociado a un path X , ($X_{s,t}^1 = X_t - X_s$), entonces X es un rough path controlado por \mathbf{X} y la identidad es una derivada de Gubinelli.

Ejemplo 3.18. Si Z es una función suave (o $C^{2\alpha}$), entonces es un rough path controlado por cualquier α -rough path, y su derivada de Gubinelli es nula.

Observación 3.19. En la línea de este último ejemplo, es importante señalar que la derivada de Gubinelli **no** es única, y de hecho una mayor regularidad del rough path implica, en algún sentido, mayores posibilidades a la hora de escoger derivadas de Gubinelli.

Por ejemplo, si tanto X^1 como Z son suaves, entonces podremos tomar $Z' = 0$; pero también podremos considerar cualquier función continua como derivada de Gubinelli.

Ejemplo 3.20. Si f es una función $\text{Lip}(\gamma)$, $\gamma > 1$, como las definidas en este capítulo, entonces la expansión de tipo Taylor que define $f(X)$ hace también que $f(X)$ sea un rough path controlado por \mathbf{X} , y su derivada de Gubinelli viene dada por $f^1(X_{s,t}^1)$.

En relación con la composición de rough paths controlados con funciones, recogemos aquí el siguiente resultado de [Hai11] (Lema 2.2) que nos será de utilidad en el capítulo 6:

Lema 3.21. Sea $\varphi : \mathbb{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^2 en \mathbb{R}^m con derivadas acotadas y $C^{2\alpha}$ en $[0, T]$. Sea \mathbf{X} un α -rough path, y sea $(Y, Y') \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, 2\alpha}$. Definimos $(\varphi(Y), \varphi(Y)')$ como

$$\begin{aligned} \varphi(Y)_t &:= \varphi(Y_t, t) \\ \varphi(Y)'_t &:= D_y \varphi(Y_t, t) Y'_t. \end{aligned}$$

Entonces $(\varphi(Y), \varphi(Y')) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$ y existe una constante C tal que

$$\|\varphi(Y)\|_{\mathbf{X}, \alpha, 2\alpha} \leq C(\|D_y^2 \varphi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_{2\alpha; t})(1 + \|Y\|_{\mathbf{X}, \alpha, 2\alpha})^2$$

donde $\|\varphi\|_{2\alpha; t} = \sup_y \|\varphi(y, \cdot)\|_{2\alpha}$.

3.3.1. Integración de rough paths controlados

Para los rough paths controlados existe también una teoría de integración. El siguiente enunciado es una adaptación del Teorema 1 de [Gub04].

Teorema 3.22. Sean $(Z, Z'), (W, W') \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, \eta}([0, T], V)$ con $\alpha + \eta = \lambda > 1$. Entonces la integral

$$\int_s^t Z_u \otimes dW_u := \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_i Z_{t_i} \otimes (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + Z'_{t_i} W'_{t_i} X_{t_i, t_{i+1}}^2$$

extiende la integral de Young. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, \eta}([0, T], V) \times \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, \eta}([0, T], V) &\longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, \min\{2\alpha, \eta\}}([0, T], V \otimes V) \\ ((Z, Z'), (W, W')) &\longmapsto \left(\int_0^\cdot Z \otimes dW, ZW' \right) \end{aligned}$$

es continua, y se tiene la cota

$$\left| \int_s^t (Z_u - Z_s) \otimes dW_u - Z'_s W'_s X_{s, t}^2 \right| \leq C_\lambda |t - s|^\lambda \|(Z, Z')\|_{\mathbf{X}, \alpha, \eta} \|(W, W')\|_{\mathbf{X}, \alpha, \eta}.$$

La demostración de este teorema conllevaría entrar a fondo en las herramientas algebraicas que emplea Gubinelli, por lo que remitimos al artículo original [Gub04] para su consulta. Pero la importancia de este teorema es crucial, en el sentido de que extiende la definición, aparentemente reducida, de la integración de Lyons a objetos que van más allá de rough paths geométricos; en efecto, la teoría de Gubinelli solo necesita de un rough path *base* (no necesariamente geométrico) para describir integrales de objetos que *localmente* se comportan como ese rough path.

Como corolario podemos estudiar la integral de un rough path controlado frente al rough path que lo controla.

Corolario 3.23. Si $Z \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, \eta}([0, T], V)$, entonces

$$\int_s^t Z_u \otimes dX_u = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_i Z_{t_i} \otimes X_{t_{i+1}, t_i}^1 + Z'_{t_i} X_{t_i, t_{i+1}}^2,$$

$\int_0^\cdot Z_u \otimes dX_u \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha, 2\alpha}([0, T], V \otimes V)$ y se tiene la cota

$$\left\| \int Z \otimes dX - Z \otimes X^1 - Z' X^2 \right\|_{\mathbf{X}, \alpha, 2\alpha} \leq C_{\alpha+\eta} (\|X^1\|_\alpha + \|X^2\|_{2\alpha}) \|Z\|_{\mathbf{X}, \alpha, \eta}.$$

Observación 3.24. La pregunta natural que podemos hacernos en este momento es si, igual que consideramos expansiones de Taylor de primer orden, podemos definir rough paths controlados con expansiones de Taylor *arbitrariamente grandes*. Esta perspectiva fue analizada también por Gubinelli años más tarde ([Gub10]), y conlleva estructuras de árboles mucho más complejas que las que muestran las expansiones de primer orden.

De hecho, los trabajos de Gubinelli inspirarán la teoría de estructuras de regularidad de Martin Hairer ([Hai14]), por la que recibió la Medalla Fields en el año 2014. Esta teoría generaliza la idea de la expansión de Taylor a objetos mucho más abstractos, con el fin de estudiar ecuaciones en derivadas parciales estocásticas rugosas o singulares. Como muestra de la relación de ambas teorías, el último capítulo del presente trabajo recoge los resultados de Hairer sobre ecuaciones rugosas de tipo Burgers utilizando rough paths controlados ([Hai11]).

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales forzadas por rough paths. El Teorema Universal del Límite

El propósito de este capítulo es enunciar y demostrar el **Teorema Universal del Límite**, esto es, el teorema fundamental de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales controladas por rough paths. Nuevamente seguimos las referencias de Lyons ya citadas.

4.1. Definición de solución

Las ecuaciones diferenciales que vamos a resolver tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} dY_t &= f(Y_t)dX_t \\ Y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Aquí, $X \in \mathcal{V}_p([0, T], V)$, $f : W \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$, $y_0 \in W$. Como esto no es posible con técnicas clásicas, trabajaremos al nivel de rough paths, esto es, estudiaremos un problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} d\mathbf{Y}_t &= f(\mathbf{Y}_t)d\mathbf{X}_t \\ Y_0 &= y_0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{X} \in G\Omega_p(V)$.

El primer problema que nos encontramos es el de definir $f(\mathbf{Y}_t)d\mathbf{X}_t$; más concretamente, necesitamos entender qué significa aplicar una función $A \in \mathcal{L}(V, W)$ a un rough path que tiene imagen en $T^{(n)}(V)$.

Para cada $k \geq 0$, A define de manera natural una aplicación lineal de $V^{\otimes k}$ en $W^{\otimes k}$:

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \mapsto Ax_1 \otimes \cdots \otimes Ax_k.$$

Si unimos todas estas aplicaciones lineales, obtenemos una nueva aplicación $\Gamma(A) \in \mathcal{L}(T^{(n)}(V), T^{(n)}(W))$.

Por otro lado, igual que hicimos con la integral en el capítulo anterior, trabajaremos con $V \oplus W$. Recordemos que $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in G\Omega_p(V \oplus W)$ tiene más información que \mathbf{X} e \mathbf{Y} por separado.

Con estas consideraciones, damos nuestra definición de solución.

Definición 4.1. Sean $\gamma > p \leq 1$, $f \in W \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ una función $\text{Lip}(\gamma - 1)$, $X \in G\Omega_p(V)$, $y_0 \in W$.

Definimos

$$\begin{aligned} h : V \oplus W &\longrightarrow \text{End}(V \oplus W) \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \text{Id}_V & 0 \\ f_{y_0}(y) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $f_{y_0}(\cdot) := f(\cdot + y_0)$.

Diremos que $\mathbf{Z} \in G\Omega_p(V \oplus W)$ es una solución de la ecuación diferencial (4.2) si satisface las condiciones siguientes:

1. $\mathbf{Z} = \int h(\mathbf{Z})d\mathbf{Z}$;
2. $\pi_V(\mathbf{Z}) = \mathbf{X}$.

4.2. El Teorema Universal del Límite

La existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones de estas ecuaciones diferenciales quedan recogidas en el teorema más importante de toda esta sección, y de

hecho uno de los teoremas fundamentales de la teoría de rough paths de Lyons.

Teorema 4.2 (Teorema Universal del Límite). *Sean $p \geq 1$, $\gamma > p$, y sea $f : W \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ una función $\text{Lip}(\gamma)$. Para todos los $\mathbf{X} \in G\Omega_p(V)$, $y_0 \in W$, la ecuación (4.2) tiene una única solución $\mathbf{Z} \in G\Omega_p(V \oplus W)$ en el sentido de la definición 4.1.*

Esta solución depende continuamente de \mathbf{X} e y_0 , y la aplicación

$$\begin{aligned} I_f : G\Omega_p(V) \times W &\longrightarrow G\Omega_p(W) \\ (\mathbf{X}, y_0) &\longmapsto \mathbf{Y} \end{aligned}$$

es la única extensión de la aplicación de Itô que es continua en la topología de p -variación.

\mathbf{Y} es el límite de $(\mathbf{Y}(n))_{n \geq 0}$, donde $\mathbf{Y}(n) = \pi_W(\mathbf{Z}(n))$ y $\mathbf{Z}(n)$ se define de manera iterativa como

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(0) &= (\mathbf{X}, \mathbf{0}) \\ \mathbf{Z}(n+1) &= \int h(\mathbf{Z}(n)) d\mathbf{Z}(n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Además, si ω es una función de control para la p -variación de \mathbf{X} , entonces para todo $\rho > 1$ existe $T_\rho = T_\rho(\|f\|_{\text{Lip}(\gamma)}, p, \gamma, \omega) \in (0, T]$ tal que, para todos $(s, t) \in \Delta_{T_\rho}$, $i = 1, \dots, \lfloor p \rfloor$,

$$|\mathbf{Y}(n)_{s,t}^i - \mathbf{Y}(n+1)_{s,t}^i| \leq 2^i \rho^{-n} \frac{\omega(s, t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!}. \quad (4.4)$$

Observación 4.3. $\pi_V(\mathbf{Z}(n)) = \mathbf{X}$ para todos los $n \geq 0$. Es trivialmente cierto si X es suficientemente regular (en cuyo caso las integrales están bien definidas en el sentido de Riemann-Stieltjes), y por un argumento de densidad también para rough paths geométricos. Por tanto \mathbf{Z} satisface la condición 2 de la definición 4.1.

Demostración del Teorema Universal del Límite

La demostración del teorema es realmente costosa. Daremos aquí el procedimiento utilizado en [LCL07], muy similar al original [Lyo98].

La idea fundamental es realizar iteraciones de Picard sobre los objetos apropiados. Para controlar estas iteraciones, necesitaremos información sobre $\mathbf{Y}(n)$ para todo $n \geq 0$; en particular, bastará con estudiar $\mathbf{Y}(n)$, $\mathbf{Y}(n+1)$ y su diferencia. Sin embargo, no podemos esperar que de un rough path de la forma $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1))$ obtengamos un control sobre $\mathbf{Y}(n) - \mathbf{Y}(n+1)$. El siguiente lema, de hecho, nos dice qué información necesitamos.

Lema 4.4. Sea E un espacio de Banach, y consideramos $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in G\Omega_p(E \oplus E)$. Dado un $\varepsilon > 0$, definimos la aplicación $D \in \text{End}(E \oplus E)$, $D(x, y) := (x, \frac{y-x}{\varepsilon})$.

Si la p -variación de $D(\mathbf{Z})$ está controlada por ω , entonces

$$|X_{s,t}^i - Y_{s,t}^i| \leq ((1 + \varepsilon^{-i}) - 1) \frac{\omega(s, t)^{\frac{i}{p}}}{\beta\left(\frac{i}{p}\right)!}.$$

Demostración. Lo demostraremos suponiendo que Z tiene variación acotada; el caso general se deriva de un argumento de densidad. Tomando $\mathbf{H}_0 := \mathbf{X}$, $\mathbf{H}_1 := \mathbf{Y} - \mathbf{X}$, la relación $\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}_t + (\mathbf{Y} - \mathbf{X})_t$ nos permite expresar

$$\begin{aligned} Y_{s,t}^i &= \sum_{\tau \in \{0,1\}^i} \int_{s < u_1 < \dots < u_i < t} d(\mathbf{H}_{\tau_1})_{u_1} \cdots d(\mathbf{H}_{\tau_i})_{u_i} \\ &= X_{s,t}^i + \sum_{\substack{\tau \in \{0,1\}^i \\ |\tau| > 0}} \varepsilon^{|\tau|} \pi_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{\tau_i} D(\mathbf{Z})_{s,t}^i. \end{aligned}$$

Entonces

$$|X_{s,t}^i - Y_{s,t}^i| \leq \sum_{\substack{\tau \in \{0,1\}^i \\ |\tau| > 0}} \varepsilon^{|\tau|} |D(\mathbf{Z})_{s,t}^i| \leq ((1 + \varepsilon^{-i}) - 1) \frac{\omega(s, t)^{\frac{i}{p}}}{\beta\left(\frac{i}{p}\right)!}.$$

□

Por consiguiente, en nuestras iteraciones tendremos que considerar un rough path en el que una de sus coordenadas sea, precisamente, la diferencia que queremos estimar.

Para definir las iteraciones, en primer lugar, haremos uso de la siguiente propiedad de las funciones Lipschitz.

Proposición 4.5. Sea $f : V \rightarrow V$, $f \in \text{Lip}(\gamma)$, $\gamma > 1$. Entonces existe una función $g : V \times V \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$, $g \in \text{Lip}(\gamma - 1)$ tal que para todos $x, y \in V$ se tiene

$$f(x) - f(y) = g(x, y)(x - y).$$

Además $\|g\|_{\text{Lip}(\gamma-1)} \lesssim \|f\|_{\text{Lip}(\gamma)}$.

Fijamos un $\rho > 1$ y consideramos las siguientes 1-formas:

$$\begin{aligned} h_0 : V \oplus W &\longrightarrow \text{End}(V \oplus W) \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \text{Id}_V & 0 \\ f_{y_0}(y) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 : V \oplus W \oplus W &\longrightarrow \text{End}(V \oplus W \oplus W) \\ (x, y_1, y_2) &\longmapsto \begin{pmatrix} \text{Id}_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id}_W \\ f_{y_0}(y_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 : V \oplus W \oplus W \oplus W &\longrightarrow \text{End}(V \oplus W \oplus W \oplus W) \\ (x, y_1, y_2, w) &\longmapsto \begin{pmatrix} \text{Id}_V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id}_W & 0 \\ f_{y_0}(y_2) & 0 & 0 & 0 \\ \rho g(y_1, y_2)(w) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación 4.6. h_0 es la aplicación h de la definición 4.1.

Asociamos a cada una de estas 1-formas una iteración:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_0(0) &= (\mathbf{X}, \mathbf{0}) \\ \mathbf{Z}_0(n+1) &= \int h_0(\mathbf{Z}_0(n)) d\mathbf{Z}_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_1(0) &= (\mathbf{X}, \mathbf{0}, \mathbf{Y}(1)) \\ \mathbf{Z}_1(n+1) &= \int h_1(\mathbf{Z}_1(n)) d\mathbf{Z}_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_2(0) &= (\mathbf{X}, \mathbf{0}, \mathbf{Y}(1), \mathbf{Y}(1)) \\ \mathbf{Z}_2(n+1) &= \int h_2(\mathbf{Z}_2(n)) d\mathbf{Z}_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

Con el mismo argumento que el de la Observación 4.3, tenemos el siguiente lema.

Lema 4.7.

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_0(n) &= (\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)) \\ \mathbf{Z}_1(n) &= (\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1)) \\ \mathbf{Z}_2(n) &= (\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1), \rho^n(\mathbf{Y}(n+1) - \mathbf{Y}(n))) \end{cases}$$

Vamos a dotar a $(V \oplus W)^{\otimes n}$ de una norma adecuada para nuestros propósitos. Observamos que podemos escribir

$$(V \oplus W)^{\otimes n} = \bigoplus_{\tau=(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \{0,1\}^n} G_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes G_{\tau_n}$$

donde $G_0 = V$, $G_1 = W$. Entonces todo elemento $g \in (V \oplus W)$ se escribe como $g = \sum_{\tau} g_{\tau}$; definimos su norma como

$$\|g\| := \max_{\tau \in \{0,1\}^n} \|g_{\tau}\|,$$

donde la norma de g_{τ} viene definida a partir de la norma que hayamos escogido para el producto tensorial de dos espacios de Banach (bajo las hipótesis habituales).

Esta apreciación nos permitirá adoptar una notación similar a la del Lema 4.4 para probar el siguiente resultado de escala, que nos servirá más adelante para obtener un control uniforme sobre las iteraciones (4.5), (4.6) y (4.7):

Lema 4.8. *Consideramos $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in G\Omega_p(V \oplus W)$. Sean ω una función de control y $M \geq 1$ tales que la p -variación de \mathbf{X} está controlada por ω y la de \mathbf{Z} por $M\omega$. Entonces para todo $\varepsilon \in [0, M^{-\lfloor p \rfloor / p}]$ la p -variación de $(\mathbf{X}, \varepsilon \mathbf{Y})$ está controlada por ω .*

Demostración. Fijamos ε y tomamos $D \in \text{End}(V \oplus W)$, $D(x, y) = (x, \varepsilon y)$. Supongamos que \mathbf{Z} es suficientemente regular (variación acotada). Denotando $\mathbf{X} = \mathbf{H}_0$, $\mathbf{Y} = \mathbf{H}_1$, y π_0, π_1 las proyecciones sobre V y W , respectivamente, tenemos

$$D(\mathbf{Z})_{s,t}^i = \sum_{\tau \in \{0,1\}^i} \varepsilon^{|\tau|} \int_{s < u_1 < \dots < u_i < t} d(\mathbf{H}_{\tau_1})_{u_1} \cdots d(\mathbf{H}_{\tau_i})_{u_i} \quad (4.8)$$

$$= \sum_{\tau \in \{0,1\}^i} \varepsilon^{|\tau|} \pi_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{\tau_i} Z_{s,t}^i \quad (4.9)$$

$$= X_{s,t}^i + \sum_{\substack{\tau \in \{0,1\}^i \\ |\tau| > 0}} \varepsilon^{|\tau|} \pi_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{\tau_i} Z_{s,t}^i. \quad (4.10)$$

Por un argumento de densidad, los lados izquierdo y derecho de (4.8) son iguales para cualquier rough path geométrico \mathbf{Z} .

Ahora, para cualquier $i = 1, \dots, \lfloor p \rfloor$,

$$\begin{aligned}
\|D(\mathbf{Z})_{s,t}^i\| &\leq \max \left\{ \|X_{s,t}^i\|, \max_{\substack{\tau \in \{0,1\}^i \\ |\tau| > 0}} \varepsilon^{|\tau|} \|Z_{s,t}^i\| \right\} \\
&\leq \max \left\{ \frac{\omega(s,t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!}, \max_{\substack{\tau \in \{0,1\}^i \\ |\tau| > 0}} \varepsilon^{|\tau|} \frac{M^{\frac{i}{p}} \omega(s,t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!} \right\} \\
&= \max \left\{ 1, \max_{\substack{\tau \in \{0,1\}^i \\ |\tau| > 0}} \varepsilon^{|\tau|} M^{\frac{i}{p}} \right\} \frac{\omega(s,t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!} \\
&\leq \frac{\omega(s,t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!},
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. \square

Pasamos ahora a buscar el control uniforme de las iteraciones. En primer lugar, el Teorema 3.15 nos garantiza que existe una constante M que solo depende de $\|h_0\|_{\text{Lip}}$, p y γ tal que si $\mathbf{Z} \in G\Omega_p(V \oplus W)$ tiene p -variación controlada por ω tal que $\omega(0, T) \leq 1$ entonces la p -variación de $\int h_0(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z}$ está controlada por $M\omega$. Mismas apreciaciones pueden hacerse en relación a h_1 y h_2 , por lo que la constante M puede tomarse para que cumpla las tres cotas.

En este contexto, asumimos $M \geq 1$ y tomamos $\varepsilon = M^{\lfloor p \rfloor / p}$. Dado un control ω_0 de la p -variación de \mathbf{X} , tomamos $T_\rho > 0$ tal que $\omega_0(0, T_\rho) = \varepsilon^p$. Entonces $\varepsilon^{-1}\mathbf{X}$ está controlado por $\omega := \varepsilon^{-p}\omega_0$ y $\omega(0, T_\rho) \leq 1$.

Proposición 4.9. *Para todo $n \geq 0$ la p -variación de los rough paths*

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)) \tag{4.11}$$

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1)) \tag{4.12}$$

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1), \rho^n(\mathbf{Y}(n+1) - \mathbf{Y}(n))) \tag{4.13}$$

está controlada por ω en $[0, T_\rho]$.

Demostración. La demostración se realiza por inducción en cada uno de los casos.

- (4.11) La p -variación de $(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{0})$ está controlada por ω en $[0, T_\rho]$ por hipótesis.

Supongamos que también lo está la p -variación de $(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))$. Consideramos el rough path

$$\int h_0(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))d(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)).$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \int h_0(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))d(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)) &= \int \begin{pmatrix} \text{Id}_V & 0 \\ f_{y_0}(\mathbf{Y}(n)) & 0 \end{pmatrix} d(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)) \\ &= \left(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \varepsilon^{-1} \int f_{y_0}(\mathbf{Y}(n))d\mathbf{X} \right) \\ &= (\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \varepsilon^{-1}\mathbf{Y}(n+1)). \end{aligned}$$

Este cálculo es formal, pero asumiendo que \mathbf{X} es de variación acotada y con un argumento de densidad se hace totalmente riguroso.

Por la definición de M , la p -variación de $(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \varepsilon^{-1}\mathbf{Y}(n+1))$ está controlada por $M\omega$ en $[0, T_\rho]$. Como la p -variación de $\varepsilon^{-1}\mathbf{X}$ está controlada por ω , aplicando el Lema 4.8 tenemos que la p -variación de $(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n+1))$ está controlada por ω en $[0, T_\rho]$.

- (4.12) La p -variación de $(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{0}, \mathbf{Y}(1))$ está controlada por ω en $[0, T_\rho]$ por lo probado en el apartado anterior.

Supongamos que es cierto para $(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1))$. Tomamos

$$\begin{aligned} \int h_1(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1))d(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n+1)) \\ = (\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n+1), \varepsilon^{-1}\mathbf{Y}(n+2)). \end{aligned} \tag{4.14}$$

La p -variación de (4.14) está controlada por $M\omega$ en $[0, T_\rho]$; como, por el apartado anterior, la p -variación de $(\varepsilon^{-1}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n+1))$ está controlada por ω en $[0, T_\rho]$, aplicamos el Lema 4.8 para concluir que la de (4.14) está controlada por ω en $[0, T_\rho]$.

- (4.13) Empleamos el mismo procedimiento con h_2 .

□

Por fin estamos en condiciones de demostrar el teorema.

Demostración del Teorema Universal del Límite.

■ **Existencia**

Como $\varepsilon^{-1} > 1$, aplicando la Proposición 4.9 tenemos que la p -variación de $\mathbf{Z}_2(n)$ está controlada por ω en $[0, T_\rho]$.

Tomamos la imagen de $\mathbf{Z}_2(n)$ por la aplicación

$$\begin{aligned} P: V \oplus W \oplus W \oplus W &\longrightarrow (V \oplus W) \oplus (V \oplus W) \\ (x, y_1, y_2, w) &\longmapsto ((x, y_1), (0, w)). \end{aligned}$$

Como esta aplicación tiene norma 1, la p -variación de

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Z}_2(n)) &= ((\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)), \rho^n(0, \mathbf{Y}(n+1) - \mathbf{Y}(n))) \\ &= ((\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)), \rho^n [(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n+1)) - (\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))]) \end{aligned}$$

está controlada por ω en $[0, T_\rho]$. Entonces, por el Lema 4.4,

$$|(X, Y(n))_{s,t}^i - (X, Y(n+1))_{s,t}^i| \leq ((1 + \rho^{-n})^i - 1) \frac{\omega(s, t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!}.$$

Observamos que, como $\rho^{-n} < 1$,

$$(1 + \rho^{-n})^i - 1 = \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (\rho^{-n})^j = \rho^{-n} \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (\rho^{-n})^{j-1} \leq 2^i \rho^{-n},$$

luego

$$|(X, Y(n))_{s,t}^i - (X, Y(n+1))_{s,t}^i| \leq 2^i \rho^{-n} \frac{\omega(s, t)^{\frac{i}{p}}}{\beta \left(\frac{i}{p}\right)!}. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))$ converge en p -variación a un $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in G\Omega_p(V \oplus W)$ solución de la ecuación en $[0, T_\rho]$ y, además, tenemos la desigualdad (4.4).

Para obtener una solución en $[0, T]$, simplemente observamos que la continuidad uniforme de ω permite acotar inferiormente T_ρ , y por consiguiente podemos extender las conclusiones a todo el intervalo simplemente pegando (un número finito de) soluciones locales.

■ **Unicidad**

Supongamos que $\tilde{\mathbf{Z}} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}})$ es también solución. Tomamos la 1-forma

$$h_3 : V \oplus W \oplus W \oplus W \longrightarrow \text{End}(V \oplus W \oplus W \oplus W)$$

$$(x, y, \tilde{y}, \tilde{w}) \longmapsto \begin{pmatrix} \text{Id}_V & 0 & 0 & 0 \\ f_{y_0}(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id}_W & 0 \\ \rho g(y, \tilde{y})\tilde{w} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_3(0) &= (\mathbf{X}, \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \\ \mathbf{Z}_3(n+1) &= \int h_3(\mathbf{Z}_3(n)) d\mathbf{Z}_3(n) \end{cases},$$

tenemos que $\mathbf{Z}_3(n) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n), \tilde{\mathbf{Y}}, \rho^n(\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}(n)))$, y con los argumentos empleados en la Proposición 4.9 tenemos que su p -variación está controlada uniformemente en n en un subintervalo de $[0, T]$. En dicho subintervalo, el Lema 4.4 implica que $\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}$. Para probar unicidad en todo $[0, T]$ seguimos el mismo argumento que para la existencia.

■ **Continuidad**

Definimos $F_n(\mathbf{X}, y_0) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))$. Hasta ahora hemos probado que, dados $(\mathbf{X}, y_0) \in G\Omega_p(V) \times W$, $F_n(\mathbf{X}, y_0)$ converge en p -variación a $I_f(\mathbf{X}, y_0)$. Por otro lado, las funciones F_n quedan definidas por medio de un procedimiento iterativo de integración, y en consecuencia son continuas.

Para probar la continuidad de I_f bastará con probar algún tipo de uniformidad en la convergencia de F_n .

La desigualdad (4.15) muestra que dicha convergencia es uniforme al menos en el conjunto de rough paths geométricos controlados por ω , y en un subintervalo de $[0, T]$ que depende de ω ; nuevamente con el argumento empleado en la existencia, esto es cierto para todo el intervalo.

Por último, si $\mathbf{X}(n)$ tiende a \mathbf{X} , existe una función de control que controla la p -variación de $(\mathbf{X}(n))_{n \geq 0}$ y \mathbf{X} . Por consiguiente, si $y_0^n \rightarrow y_0$, entonces $I_f(\mathbf{X}(n), y_0^n) \rightarrow I_f(\mathbf{X}, y_0)$, lo que prueba la continuidad.

La unicidad de soluciones implica que esta es la única extensión de la aplicación de Itô de $G\Omega_p(V) \times W \rightarrow G\Omega_p(V \oplus W)$ que es continua en p -variación.

□

4.3. Procedimiento para resolver una ecuación diferencial rugosa

Los argumentos empleados hasta ahora pueden resultar algo técnicos, y quizá nos hayan hecho perder la perspectiva de la ecuación original. Recordemos que nuestro problema es demostrar existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} dY_t &= f(Y_t)dX_t \\ Y_0 &= y_0 \end{cases}$$

donde X es una función muy irregular (*rugosa*). En el enunciado no se asume nada sobre teoría de rough paths, de modo que conviene aclarar cuál es el argumento preciso para estudiar estas ecuaciones.

El procedimiento se reduce a los siguientes pasos:

1. Asociamos a nuestra función $X : [0, T] \rightarrow V$ un rough path \mathbf{X} tal que $X_{s,t}^1 = X_t - X_s$.
2. Aplicamos el Teorema Universal del Límite, que nos dará la existencia de un rough path (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) que resuelve la ecuación (desde el punto de vista de la definición 4.1).
3. Proyectamos sobre W para obtener el rough path \mathbf{Y} ; la solución de nuestra ecuación será la función

$$Y_t := y_0 + Y_{0,t}^1.$$

En otras palabras: lo que estamos haciendo es dotar de información extra a nuestro problema para tener un resultado de existencia, unicidad y continuidad; pero al final, toda la información extra es eliminada, y volvemos al nivel teórico inicial.

Pero aquí hay algo importante que estamos pasando por alto. Si resolver la ecuación desde la perspectiva clásica era imposible (no había extensión continua de la aplicación de Itô), y ahora tanto la aplicación I_f como las proyecciones son continuas, es de esperar que el mecanismo por el cual asociamos un rough path a una función X sea, en algún sentido, problemático. Dicho de otro modo, es claro que, dada una *interpretación* del problema (como

un problema de rough paths) tenemos una solución, pero nada hemos dicho hasta ahora de cómo escoger dicha representación.

De hecho, a una misma trayectoria irregular le podemos asociar infinidad de rough paths, y cada uno de ellos nos dará, previsiblemente, una solución diferente.

La identificación de una trayectoria con un rough path canónico o natural no es un problema trivial, y como veremos en el siguiente capítulo requiere de propiedades que van más allá de la simple regularidad de la función.

Capítulo 5

El movimiento browniano como rough path. Rough paths gaussianos

En el capítulo anterior probamos que, dada una estructura de rough path, podemos resolver ecuaciones diferenciales para trayectorias de arbitraria irregularidad. La pregunta a la que queremos dar respuesta ahora es en qué medida podemos identificar una trayectoria dada con un rough path. Concretamente nos centraremos en las trayectorias muestrales de procesos gaussianos. Siguiendo los trabajos de Peter Friz y Nicolas Victoir, daremos una condición sobre la covarianza para la existencia de dicho rough path *canónico*.

5.1. Criterio de Kolmogorov para rough paths

Para probar la regularidad de las trayectorias del movimiento browniano, un argumento habitual es utilizar un criterio de Kolmogorov (véase [Eva13]): control sobre los momentos de los incrementos del proceso implica regularidad Hölder. Existe también un criterio de Kolmogorov para rough paths. Para formularlo en los mismos términos que el criterio clásico, trabajaremos con regularidad Hölder en vez de p -variación. Como ya dijimos anteriormente, toda trayectoria α -Hölder es de $1/\alpha$ -variación finita, y el recíproco también es cierto salvo

por una reparametrización.

Teorema 5.1 (Criterio de Kolmogorov para rough paths). *Sea X un proceso estocástico continuo en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea $\mathbf{X} = (X^1, X^2)$ un funcional multiplicativo tal que $X_{s,t}^1 = X_t - X_s$. Sea $q \geq 2$, $\beta > \frac{1}{q}$, y supongamos que para todo $(s, t) \in \Delta_T$,*

$$\mathbb{E}|X_{s,t}^1|^q \lesssim |t - s|^\beta \quad (5.1)$$

$$\mathbb{E}|X_{s,t}^2|^{\frac{q}{2}} \lesssim |t - s|^{2\beta}. \quad (5.2)$$

Entonces para todo $\alpha \in \left[0, \beta - \frac{1}{q}\right)$ existen variables aleatorias $K_\alpha^1 \in L^q(\mathbb{P})$, $K_\alpha^2 \in L^{q/2}(\mathbb{P})$ tales que para todo $(s, t) \in \Delta_T$

$$|X_{s,t}^1(\omega)| \leq K_\alpha^1(\omega)|t - s|^\alpha \quad (5.3)$$

$$|X_{s,t}^2(\omega)| \leq K_\alpha^2(\omega)|t - s|^{2\alpha}. \quad (5.4)$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad tomamos $T = 1$, y consideramos las particiones diádicas

$$\Pi_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \right\}.$$

Nos limitaremos a demostrar el teorema para los puntos diádicos; el resultado general se sigue por un argumento de continuidad.

Sean $K_n^1 := \sup_{u \in \Pi_n} |X_{u, u+2^{-n}}^1|$, $K_n^2 := \sup_{u \in \Pi_n} |X_{u, u+2^{-n}}^2|$. Entonces por (5.1), (5.2)

$$\mathbb{E}(K_n^1)^q \leq \mathbb{E} \sum_{u \in D_n} |X_{u, u+2^{-n}}^1|^q \lesssim 2^n |\Pi_n|^{\beta q} = 2^{-(\beta q - 1)n}$$

$$\mathbb{E}(K_n^2)^{\frac{q}{2}} \leq \mathbb{E} \sum_{u \in D_n} |X_{u, u+2^{-n}}^2|^{\frac{q}{2}} \lesssim 2^n |\Pi_n|^{2\frac{\beta q}{2}} = 2^{-(\beta q - 1)n}.$$

Fijamos $s, t \in \cup_n \Pi_n$, $(s, t) \in \Delta_T$, y tomamos m tal que $|D_{m+1}| < t - s \leq |D_m|$. $[s, t]$ se puede expresar como unión finita disjunta e intervalos $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_{i+1} - \tau_i \in \Pi_n$ con $n \geq m+1$ y tales que no hay tres intervalos de la misma longitud; esto es una simple consecuencia de la descomposición diádica. Con una partición $s = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t$ así generada, se tiene que

$$|X_{s,t}^1| \leq \max_{0 \leq i \leq N-1} |X_{s, \tau_i}^1| \leq \sum_{i=0}^{N-1} |X_{\tau_i, \tau_{i+1}}^1| \leq 2 \sum_{n \geq m+1} K_n^1,$$

y por consiguiente

$$\frac{|X_{s,t}^1|}{|t-s|^\alpha} \leq \sum_{n \geq m+1} \frac{2K_n^1}{|t-s|^\alpha} \leq \sum_{n \geq m+1} \frac{2K_n^1}{|\Pi_n|^\alpha} \leq 2 \sum_{n \geq 0} 2^{\alpha n} K_n^1.$$

Definimos $K_\alpha^1 := 2 \sum_{n \geq 0} 2^{\alpha n} K_n^1$ y tenemos el resultado deseado, pues

$$\mathbb{E}|K_\alpha^1|^q \leq 2 \sum_{n \geq 0} 2^{-n(\beta q - 1 - \alpha q)},$$

y por hipótesis $\beta q - 1 - \alpha q > 0$.

Por otro lado, aplicando la identidad de Chen,

$$\begin{aligned} |X_{s,t}^2| &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left(X_{\tau_i, \tau_{i+1}}^2 + X_{s, \tau_i}^1 \otimes X_{\tau_i, \tau_{i+1}}^1 \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left(|X_{\tau_i, \tau_{i+1}}^2| + |X_{s, \tau_i}^1| |X_{\tau_i, \tau_{i+1}}^1| \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} |X_{\tau_i, \tau_{i+1}}^2| + \max_{0 \leq i \leq N-1} |X_{s, \tau_{i+1}}^1| \sum_{i=0}^{N-1} |X_{\tau_i, \tau_{i+1}}^1| \\ &\leq 2 \sum_{n \geq m+1} K_n^2 + \left(2 \sum_{n \geq m+1} K_n^1 \right)^2, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{|X_{s,t}^2|}{|t-s|^{2\alpha}} &\leq \sum_{n \geq m+1} \frac{2K_n^2}{|t-s|^{2\alpha}} + \left(2 \sum_{n \geq m+1} \frac{K_n^1}{|t-s|^\alpha} \right)^2 \\ &\leq 2 \sum_{n \geq m+1} 2^{2n\alpha} K_n^2 + \left(2 \sum_{n \geq m+1} 2^{n\alpha} K_n^1 \right)^2 \leq 2 \sum_{n \geq m+1} 2^{2n\alpha} K_n^2 + (K_\alpha^1)^2; \end{aligned}$$

basta con tomar $K_\alpha^2 := 2 \sum_{n \geq m+1} 2^{2n\alpha} K_n^2 + (K_\alpha^1)^2$ para obtener el resultado, pues $K_\alpha^2 \in L^{\frac{q}{2}}$. \square

Gracias a este criterio, podemos probar que el movimiento browniano equipado con la integral de Itô es efectivamente un rough path.

Proposición 5.2. *Sea B un movimiento browniano d -dimensional, y sea*

$$\mathbf{B} = (B^1, B^2) : \Delta \rightarrow T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$$

tal que

$$\begin{aligned} B_{s,t}^1 &:= B_t - B_s \\ B_{s,t}^2 &:= \int_{s < u_1 < u_2 < t} dB_{u_1} \otimes dB_{u_2}, \end{aligned}$$

es decir, el segundo nivel es la integral de Itô. Entonces (B^1, B^2) es, con probabilidad 1, un α -rough path para todo $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Demostración. Sabemos que con probabilidad 1 B tiene trayectorias continuas. Por otro lado, (B^1, B^2) es un funcional multiplicativo como se probó en el Ejemplo 2.19.

Probaremos el criterio para todo $2 < q < \infty$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Para el primer nivel,

$$\mathbb{E}|B_{s,t}^1|^q \lesssim |t-s| \leq T^{1/2}|t-s|^\beta$$

por lo que, aplicando el Teorema 5.1, tenemos que para todo $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$,

$$|B_{s,t}^1| \lesssim |t-s|^\alpha.$$

Para el segundo nivel utilizaremos argumentos de caos de Wiener-Itô ([Nua06]). Dado un movimiento browniano B , podemos expresar

$$\int_{s < u_1 < u_2 < t} dB_{u_1} dB_{u_2} = \int_{[0,T]^2} \chi_{[s,u_2]}(u_1) \chi_{[s,t]}(u_2) dB_{u_1} dB_{u_2}.$$

Entonces, por las propiedades de las integrales iteradas, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_{s < u_1 < u_2 < t} dB_{u_1} dB_{u_2} \right)^2 \right] &= \frac{1}{2} \|\chi_{[s,u_2]}(u_1) \chi_{[s,t]}(u_2) + \chi_{[s,u_1]}(u_2) \chi_{[s,t]}(u_1)\|_{L^2([0,T]^2)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_s^t \int_s^{u_2} du_1 du_2 + \int_s^t \int_s^{u_1} du_2 du_1 \right) \\ &= (t^2 - s^2) \leq T(t-s), \end{aligned}$$

y la equivalencia de los momentos (por gaussianidad) concluye que se satisface la segunda hipótesis. Aplicando el Teorema 5.1 concluimos la demostración.

Juntando todo tenemos que (B^1, B^2) es con probabilidad 1 un α -rough path para todo $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. \square

De igual modo, el movimiento browniano equipado con la integral de Stratonovich es también un rough path. Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, simplemente con una perturbación, pues por independencia de las componentes del movimiento browniano multidimensional

$$\int_s^t (B_u - B_s) \otimes \circ dB_u = \int_s^t (B_u - B_s) \otimes dB_u + (t-s) \frac{1}{2} \text{Id}.$$

Proposición 5.3. *En las condiciones de la Proposición 5.2, con*

$$\begin{aligned} B_{s,t}^1 &:= B_t - B_s \\ B_{s,t}^2 &:= \int_{s < u_1 < u_2 < t} \circ dB_{u_1} \otimes \circ dB_{u_2}, \end{aligned}$$

es decir, el segundo nivel es la integral de Stratonovich. Entonces (B^1, B^2) es, con probabilidad 1, un α -rough path para todo $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

5.2. Área de Lévy

Un simple vistazo a las expresiones de las integrales nos dicen que el movimiento browniano equipado con la integral de Itô es un rough path, pero no es débilmente geométrico, pues

$$\text{Sym} \left(\int_{s < u_1 < u_2 < t} dB_{u_1} \otimes dB_{u_2} \right) = \frac{1}{2} B_{t,s}^1 \otimes B_{t,s}^1 - \frac{1}{2} (t-s) I_d;$$

el de Stratonovich, en cambio, sí lo es (de hecho es geométrico).

La diferencia entre ambos rough paths es simétrica, lo que implica que generan el mismo área (tienen la misma parte antisimétrica).

Definición 5.4. *Dados un movimiento browniano bidimensional (b^1, b^2) , y $s < t$, definimos el área de Lévy como*

$$\int_s^t ((b_u^1 - b_s^1) d(b_u^2) - (b_u^2 - b_s^2) d(b_u^1)).$$

De modo que, tanto en el caso de Itô como en el de Stratonovich, $2\text{Anti}(B_{s,t}^2)_{ij}$ es el área de Lévy de las coordenadas i, j .

Llegados a este punto, cabe preguntarse si otras áreas son posibles y si aparecen de manera natural. Que son posibles es claro, pues basta con considerar perturbaciones no-simétricas de la integración de Stratonovich. Pero además existen situaciones en las que surgen con cierto sentido físico.

Una de estas situaciones es la del movimiento browniano en campo magnético, tal y como estudiaron, desde la teoría de rough paths, Friz, Gassiat y Lyons en [FGL15]. Este problema se plantea con la ecuación

$$m\ddot{x} = -M\dot{x} + \xi. \quad (5.5)$$

Aquí, x representa la posición de una partícula cargada sometida a rozamiento, campo magnético e impulsos aleatorios (colisiones con otras partículas, por ejemplo); $m > 0$ es la masa de dicha partícula; la matriz M se escribe como $A + qT$, donde A es la contribución del rozamiento (una matriz diagonal positiva), q es la carga de la partícula y T es el campo magnético (constante); y ξ es ruido blanco temporal en tres dimensiones, formalmente la derivada de un movimiento browniano tridimensional. La ecuación es simplemente la combinación entre la segunda ley de Newton y la fuerza de Lorentz.

Si tomamos el límite $m \rightarrow 0$, Mx será un movimiento browniano estándar. Pero desde la teoría de rough paths nos interesa estudiar no solo el límite como trayectoria, sino también el de sus integrales iteradas; en sintonía con esta sección, nos preguntamos qué área de Lévy tiene este movimiento browniano.

Resulta que este paso al límite tiene un efecto no trivial sobre el momento ($p = m \cdot x$) de la partícula. En efecto, si consideramos las ecuaciones de la posición y el momento (con notación estocástica) obtenemos el sistema

$$\begin{cases} dX &= \frac{1}{m}Pdt \\ dP &= -\frac{1}{m}MPdt + dB \end{cases} \quad (5.6)$$

Este sistema de ecuaciones tiene perfecto sentido; la segunda ecuación describe un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, de sobra estudiado. Pero si tomamos $m \rightarrow 0$, observamos que dP “explota”.

La situación se precisa en el siguiente teorema.

Teorema 5.5 (Friz, Gassiat, Lyons, 2013). *Consideremos el sistema de ecuaciones (5.6), donde M es una matriz cuyos autovalores son estrictamente positivos y B es un movimiento browniano d -dimensional, con condiciones iniciales $(X_0, P_0) = (0, 0)$.*

Entonces MX converge en L^q para todo $q \geq 1$ y en la topología de α -rough paths para todo $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ al rough path browniano $\hat{\mathbf{B}} = (B^1, B^2)$, donde

$$B_{s,t}^2 = \int_s^t \circ dB_{u_1} \circ dB_{u_2} + (t-s) \frac{1}{2} (M\Sigma - \Sigma M^*)$$

con

$$\Sigma = \int_0^\infty e^{-Ms} e^{-M^*s} ds,$$

o lo que es lo mismo, la matriz de covarianzas de la solución estacionaria de

$$dY = -MYdt + dB.$$

Como vemos, el término de corrección $(t-s)\frac{1}{2}(M\Sigma - \Sigma M^*)$ es puramente antisimétrico, y por lo tanto el área de Lévy de este movimiento browniano será diferente a la de las integrales de Itô o Stratonovich.

Los detalles de este problema se pueden consultar en [FGL15].

5.3. Rough paths gaussianos

Pese a que en este ejemplo hemos construido un movimiento browniano con área diferente a la de Lévy, parece razonable que consideremos a esta última como su *área canónica*. Más aún, dado que el movimiento browniano de Stratonovich es, además, un rough path geométrico, podríamos decir que este es el rough path que *naturalmente* se le asocia al movimiento browniano.

De igual modo, nos gustaría saber si podemos establecer resultados similares para procesos estocásticos más generales; en particular, esta sección la dedicaremos a procesos gaussianos. El principal resultado nos dará una condición suficiente, en términos de la función de covarianza, para la existencia de un rough path canónico asociado a un proceso gaussiano.

Definición 5.6. Dado un proceso estocástico X , definimos su **función de covarianza** como

$$R_X(s, t) := \mathbb{E}(X_s X_t).$$

Para establecer esa condición, primero revisamos los conceptos de p -variación y función de control y los llevamos a dos dimensiones.

Definición 5.7. Dadas una función $f \in C([0, T]^2, V)$ y $p > 1$, diremos que X tiene p -variación bidimensional finita si

$$\|f\|_{p, [0, T]^2} := \left[\sup_{\Pi_1, \Pi_2} \sum_{i, j} \left| f \begin{pmatrix} t_i & t_j \\ t_{i+1} & t_{j+1} \end{pmatrix} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

donde

$$f \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} := f(t, v) - f(s, v) - f(t, u) + f(s, u).$$

Observación 5.8. En el caso de funciones de covarianza, se observa que

$$R_X \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = \mathbb{E}((X_t - X_s)(X_v - X_u)).$$

Definición 5.9. Una función $\omega : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función de control bidimensional** si satisface:

1. *Superaditividad:*

$$\begin{aligned} \omega((s, r) \times (u, v)) + \omega((r, t) \times (u, v)) &\leq \omega((s, t) \times (u, v)) \\ \omega((s, t) \times (u, r)) + \omega((s, t) \times (r, v)) &\leq \omega((s, t) \times (u, v)) \end{aligned}$$

2. *Continuidad:*

$$\lim_{s \rightarrow t} \omega((s, t) \times (0, T)) = \lim_{s \rightarrow t} \omega((0, T) \times (s, t)) = 0.$$

Observación 5.10. Si ω es una función de control bidimensional, entonces $(s, t)^2 \mapsto \omega((s, t)^2)$ es una función de control unidimensional (definición 2.12).

Enunciamos ahora los dos principales resultados en lo que se refiere a la asociación natural de un rough path a un proceso gaussiano. Recogemos aquí versiones reducidas de los Teoremas 35 y 37 de [FV10a].

Teorema 5.11. *Sea $X = (X^1, \dots, X^d)$ un proceso gaussiano, continuo, centrado y con componentes independientes. Sea $\rho \in [1, 2)$, y supongamos que la covarianza de X es de ρ -variación finita controlada por una función de control bidimensional ω ; esto es, para todos $(s, t) \in \Delta$,*

$$\left| R_X \begin{pmatrix} s & s \\ t & t \end{pmatrix} \right| \leq \omega((s, t)^2)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Entonces existe un p -rough path geométrico \mathbf{X} con $p \in (2\rho, 4)$ tal que $\pi_1(\mathbf{X}_{s,t}) = X_t - X_s$ casi seguramente. Este \mathbf{X} es el límite en la topología de p -variación y en $L^q(\mathbb{P})$ para todo $q \in [1, \infty)$ de $\mathbf{X}(\Pi)$ cuando $|\Pi| \rightarrow 0$.

Teorema 5.12. *Sea $(X, Y) = (X^1, Y^1, \dots, X^d, Y^d)$ es un proceso gaussiano, centrado, continuo y tal que (X^i, Y^i) es independiente de (X^j, Y^j) para todos $i, j = 1, \dots, d$, $i \neq j$. Sea $\rho \in [1, 2)$ y supongamos que la covarianza de (X, Y) es de ρ -variación finita controlada por una función de control bidimensional ω . Entonces existen constantes $\theta = \theta(p, \rho)$, $C = C(p, \rho, \omega)$ tales que*

$$|\mathbf{d}_{p\text{-var}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| \leq C\sqrt{q}|R_{X-Y}|_{\infty}^{\theta},$$

donde $\mathbf{d}_{p\text{-var}}$ es la métrica de p -variación asociada a la métrica de Carnot-Carathéodory \mathbf{d} .

Dar una prueba de estos dos enunciados nos llevaría a territorios que quedan al margen de los objetivos de este trabajo (estudio de $G^{(n)}$ como espacio geodésico, desigualdades de Garsia-Roderich-Rumsey, etc.), por lo que los afirmamos sin demostración. Para una prueba detallada de los mismos, consúltese [FV10a], donde además podrán encontrarse los enunciados completos.

Sin embargo sí podemos dar ejemplos importantes de aplicación del Teorema 5.11 y probar la existencia de áreas de Lévy para ciertos procesos gaussianos.

Ejemplo 5.13 (Movimiento browniano). Escribiendo para abreviar $\Delta B_{s,t} := B_t - B_s$, sabemos que $\mathbb{E}(\Delta B_{s,t} \Delta B_{u,v}) = \mu((s, t) \cap (u, v))$, donde μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Entonces $R_B(s, t) \leq |t - s|$, por lo que cumple la hipótesis del Teorema 5.11.

En el caso del movimiento browniano, además, podemos identificar cuál es su rough path canónico; se trata del **rough path browniano de Stratonovich** definido en la Proposición 5.3.

La demostración es sencilla. Dados s, t , escribimos

$$B_{s,t}^2 = \frac{1}{2}(B_t - B_s)^{\otimes 2} + \frac{1}{2} \int_s^t (B_u - B_s) \otimes dB_u - \frac{1}{2} \int_s^t dB_u \otimes (B_u - B_s),$$

donde las integrales son de Itô. Sabemos que, por el Teorema 5.11, las firmas de las aproximaciones lineales a trozos convergen a un rough path en la topología de p -variación para $p \in (2, 4)$ y en $L^q(\mathbb{P})$. Es sencillo ver que el segundo nivel de la firma es, para una partición Π ,

$$B_{s,t}^2 = \frac{1}{2}(B_t - B_s)^{\otimes 2} + \frac{1}{2} \sum_l (B_{t_l} - B_s) \otimes (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) - \frac{1}{2} \sum_l (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \otimes (B_{t_l} - B_s);$$

la convergencia en $L^2(\mathbb{P})$ de las sumas a la integral de Itô identifica el rough path geométrico del teorema con el de Stratonovich.

Ejemplo 5.14 (Puente browniano). Definimos el **puente browniano** en $[0, T]$ como

$$BB_t = B_t - \frac{t}{T} B_T.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(BB_t BB_s) &= \mathbb{E}(B_t B_s) - \frac{s}{T} \mathbb{E}(B_t B_T) - \frac{t}{T} \mathbb{E}(B_s B_T) + \frac{st}{T^2} \mathbb{E}(B_T B_T) \\ &= R_B(s, t) - \frac{st}{T} \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$R_{BB} \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = R_B \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} - \frac{1}{T}(t-s)(v-u).$$

Por tanto

$$\left| R_{BB} \begin{pmatrix} s & s \\ t & t \end{pmatrix} \right| \leq \left| R_B \begin{pmatrix} s & s \\ t & t \end{pmatrix} \right| + |t-s|.$$

Esto prueba que la covarianza de BB es de 1-variación finita; aplicando el Teorema 5.11 existe un rough path canónico asociado que se construye por aproximaciones lineales a trozos.

5.3.1. Movimiento browniano fraccionario

Una de las aplicaciones más interesantes del Teorema 5.11 es la construcción de integrales del movimiento browniano fraccionario.

Definición 5.15. *Definimos el movimiento browniano fraccionario B^H como un proceso gaussiano, centrado y con función de covarianza*

$$\mathbb{E}(B_s^H B_t^H) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

donde $H \in (0, 1)$ es el parámetro de Hurst.

En particular, si $H = \frac{1}{2}$ tenemos un movimiento browniano estándar. Pero, a diferencia de este, el movimiento browniano fraccionario no posee incrementos independientes. De hecho podemos observar el comportamiento de la correlación de los incrementos en función de H . Dados $s < t < u < v$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta B_{s,t}^H \Delta B_{u,v}^H) &= \mathbb{E}(B_t^H B_v^H) - \mathbb{E}(B_t^H B_u^H) - \mathbb{E}(B_s^H B_v^H) + \mathbb{E}(B_s^H B_u^H) \\ &= \frac{1}{2} (-|t - v|^{2H} + |t - u|^{2H} + |v - s|^{2H} - |u - s|^{2H}) \\ &= -\frac{1}{2} (((v - t)^{2H} - (v - s)^{2H}) - ((u - t)^{2H} - (u - s)^{2H})). \end{aligned}$$

Para s, t fijos y en las condiciones anteriores, tomamos $f(\cdot) = (\cdot - t)^{2H} - (\cdot - s)^{2H}$. Su derivada

$$f'(\cdot) = 2H((\cdot - t)^{2H-1} - (\cdot - s)^{2H-1})$$

es, en valores mayores que t , negativa si $2H > 1$, nula si $2H = 1$ y positiva si $2H < 1$. Por tanto, podemos concluir que

$$\mathbb{E}((B_t^H - B_s^H)(B_v^H - B_u^H)) \begin{cases} > 0 & \text{si } H \in (\frac{1}{2}, 1) \\ = 0 & \text{si } H = \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{si } H \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}.$$

Utilizando el criterio de Kolmogorov, es sencillo probar que las trayectorias de B^H son casi seguramente $(H - \varepsilon)$ -Hölder para todo $\varepsilon > 0$. Por consiguiente, si $H > \frac{1}{2}$ podemos definir una integral trayectoria a trayectoria a través de la definición de Young. El caso crítico lo representa el movimiento browniano, del que ya hemos hablado.

¿Qué sucede si bajamos el parámetro de Hurst? Para saberlo debemos estudiar el comportamiento de la función de covarianza.

Proposición 5.16. Para $H \in (0, \frac{1}{2})$, R_{B^H} es una función de $\frac{1}{2H}$ -variación finita.

Demostración. Tomamos $s < t$, y consideramos una partición Π de $[s, t]$. Queremos estudiar

$$\sum_{i,j} |\mathbb{E}(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{t_j, t_{j+1}}^H)|^{\frac{1}{2H}}.$$

Fijamos i , y como los incrementos son negativamente correlados tenemos

$$\begin{aligned} \sum_j |\mathbb{E}(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{t_j, t_{j+1}}^H)|^{\frac{1}{2H}} &\leq \sum_{j \neq i} |\mathbb{E}(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{t_j, t_{j+1}}^H)|^{\frac{1}{2H}} + \mathbb{E}(|\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H|^2)^{\frac{1}{2H}} \\ &\leq \left| \mathbb{E} \left(\sum_{j \neq i} \Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{t_j, t_{j+1}}^H \right) \right|^{\frac{1}{2H}} + \mathbb{E} \left(|\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H|^2 \right)^{\frac{1}{2H}} \\ &\leq \left| \mathbb{E} \left(\sum_j \Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{t_j, t_{j+1}}^H \right) \right|^{\frac{1}{2H}} + 2\mathbb{E} \left(|\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H|^2 \right)^{\frac{1}{2H}} \\ &\leq \left| \mathbb{E} \left(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{s,t}^H \right) \right|^{\frac{1}{2H}} + 2\mathbb{E} \left(|\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H|^2 \right)^{\frac{1}{2H}}. \end{aligned}$$

Ahora, como $\mathbb{E}(|\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H|^2) = |t_{i+1} - t_i|^{2H}$, sumando en i obtenemos

$$\sum_{i,j} |\mathbb{E}(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{t_j, t_{j+1}}^H)|^{\frac{1}{2H}} \leq \sum_i \left| \mathbb{E} \left(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{s,t}^H \right) \right|^{\frac{1}{2H}} + 2|t - s|.$$

Dado que $[t_i, t_{i+1}] \subset [s, t]$,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{s,t}^H) \right| &\leq \frac{1}{2} |(t - t_i)^{2H} - (t - t_i)^{2H}| + |(t_{i+1} - s)^{2H} - (t_i - s)^{2H}| \\ &\leq |t_{i+1} - t_i|^{2H}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que, si $H < 1/2$, $(x + y)^{2H} - x^{2H} \leq y^{2H}$. Esto concluye la prueba, pues implica que

$$\sum_i \left| \mathbb{E} \left(\Delta B_{t_i, t_{i+1}}^H \Delta B_{s,t}^H \right) \right|^{\frac{1}{2H}} \leq |t - s|.$$

□

Combinando esta proposición con el Teorema 5.11 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.17. El movimiento browniano fraccionario de parámetro de Hurst $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ tiene H -rough path geométrico canónico asociado, obtenido como límite de las aproximaciones lineales a trozos.

Es decir, podemos definir integrales iteradas (y por tanto áreas de Lévy) para cualquier parámetro de Hurst mayor que $1/4$.

Observación 5.18. El caso $H < 1/4$ no es tratable con los argumentos de aproximación lineal. Otras técnicas han sido utilizadas para romper esa barrera; por ejemplo, Nualart y Tindel [NT11] construyen un rough path asociado al movimiento browniano fraccionario a partir de su representación como proceso de Volterra.

5.4. Teoremas de Wong-Zakai

El Teorema de Friz-Victoir 5.11 incluye en sí mismo toda una familia de teoremas de gran importancia en la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. Más concretamente, en combinación con el Teorema Universal del Límite, podemos obtener resultados de aproximación para ecuaciones estocásticas.

El espíritu de esta sección es entender ecuaciones estocásticas cuya interpretación desconocemos (a fin de cuentas la derivada del movimiento browniano *no existe*) como límite de ecuaciones deterministas que sí sabemos estudiar. El problema, claramente, es qué interpretación de ruido surge al tomar ese paso al límite.

El resultado que podemos calificar como *clásico* en torno a esta cuestión es el **teorema de Wong-Zakai**. Esencialmente, este teorema establece que dada una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dX_t = m(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \quad (5.7)$$

bajo ciertas condiciones sobre m y σ , si consideramos aproximaciones lineales de B y sus respectivas ecuaciones

$$dX_t^i = m(X_t^i, t)dt + \sigma(X_t^i, t)dB_t^i,$$

entonces X^i converge casi seguramente a la solución de Stratonovich de la ecuación (5.7).

No damos un enunciado preciso del teorema de Wong-Zakai (para ello remitimos a [WZ65]); nos interesa, en cambio, relacionarlo con la teoría de rough paths que hemos expuesto hasta ahora. Una combinación del Teorema Universal del Límite y del Teorema 5.11, junto con la construcción del rough path browniano de Stratonovich del Ejemplo 5.13, prueba el teorema de Wong-Zakai para ecuaciones de control

$$\begin{cases} dY_t &= f(Y_t)dB_t \\ Y_0 &= y_0 \end{cases}$$

bajo la hipótesis $f \in \text{Lip}(\gamma)$ con $\gamma > 2$.

Pero para este tipo de ecuaciones tenemos algo aún más general, y es un teorema de Wong-Zakai para procesos gaussianos bajo la condición de la covarianza que establece el Teorema 5.11; en última instancia, dicho teorema nos da no solo una interpretación canónica del área o del rough path asociado a un proceso gaussiano, sino también del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones de control que generan como límites de aproximaciones lineales.

Capítulo 6

Ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de tipo Burgers a través de rough paths

En este último capítulo mostramos cómo algunas de las ideas anteriores pueden emplearse en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas (EDPEs). Más concretamente, estudiaremos ecuaciones de la forma

$$du_t = (\partial_x^2 u + f(u) + g(u)\partial_x u)dt + dW_t, \quad (6.1)$$

con técnicas como los rough paths gaussianos y los rough paths controlados de Gubinelli.

6.1. Proceso de Wiener cilíndrico y ruido blanco espacio-temporal

Una de las características más definitorias de las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas es la presencia de un *ruido* que juega el mismo papel que el de las ecuaciones diferenciales estocásticas pero, en este caso, es infinito-dimensional.

En [DZ92] se establecen una serie de consideraciones muy precisas en torno a estos procesos de Wiener generalizados. De allí tomamos la siguiente definición:

Definición 6.1. *Dado un espacio de Hilbert separable con una base ortonormal $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, definimos el **proceso de Wiener cilíndrico** como*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} B^k(t) e_k,$$

donde $\{B^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia independiente de movimientos brownianos (evaluados en \mathbb{R}) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

En nuestro caso, el espacio de Hilbert será $L^2(\mathbb{T})$, y por razones que se verán más adelante consideraremos la base ortonormal

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), & k > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), & k < 0 \end{cases}. \quad (6.2)$$

Del mismo modo que con el movimiento browniano, la derivada de este proceso de Wiener cilíndrico tiene una interpretación como ruido; en este caso, es el llamado **ruido blanco espacio-temporal** (STWN, por su nombre en inglés), y suele denotarse por ξ .

Explicado de manera sencilla, el STWN es una *distribución aleatoria* gaussiana centrada y tal que, para todas φ, ϕ funciones test,

$$\mathbb{E}[\langle \xi_t, \varphi \rangle \langle \xi_s, \phi \rangle] = \delta(t - s) \langle \varphi, \phi \rangle_{L^2},$$

o, de otro modo,

$$\mathbb{E}[\xi(t, x) \xi(s, y)] = \delta(t - s) \delta(x - y).$$

Así, la ecuación *integral* (6.1) puede reescribirse como

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u) + g(u) \partial_x u + \xi.$$

Para una discusión más detallada del proceso de Wiener cilíndrico y el STWN pueden consultarse [DZ92] y [Sch89].

Sin preocuparnos demasiado por ser precisos, diremos que la extrema irregularidad del STWN hará que las posibles soluciones de (6.1) sean también irregulares; tanto que no podemos esperar que un producto distribucional de la forma $g(u)\partial_x(u)$ esté bien definido. En nuestro contexto, esto equivale a que la integral

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)g(u(x))du(x),$$

que aparece en la formulación débil de la ecuación (aquí φ actúa como función test) no está bien definida en el sentido de Young. Aquí es donde una interpretación del problema como un problema de rough paths nos dará las herramientas suficientes para su resolución.

6.2. Construcción del rough path asociado a la ecuación

Para abordar nuestro problema como un problema de rough paths controlados, el primer paso es identificar el rough path que servirá de *base*. Para ello, estudiaremos soluciones estacionarias (en tiempo) de la ecuación del calor estocástica

$$d\psi_t = (\partial_x^2 - 1)\psi_t dt + \sigma dW_t. \quad (6.3)$$

La base (6.2) diagonaliza el operador $-\partial_x^2 + 1$,

$$(-\partial_x^2 + 1)e_k(x) = (k^2 + 1)e_k(x).$$

La elipticidad del operador hace que la ecuación tenga una solución estacionaria que podemos expresar como

$$\psi_t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Y_t^k e_k(x),$$

donde $(Y^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia independiente de procesos de Ornstein-Uhlenbeck que resuelven

$$dY_t^k = -(k^2 + 1)Y_t^k dt + \sigma dB_t^k,$$

con $(B^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ una familia de movimientos brownianos estándar unidimensionales e independientes.

Una aplicación sencilla de la isometría de Itô permite ver que la varianza de Y_t^k viene dada por

$$\mathbb{E}[(Y_t^k)^2] = \frac{\sigma^2}{2(k^2 + 1)}.$$

Con esta expresión, podemos estudiar la covarianza de la solución estacionaria de (6.3).

Lema 6.2. *Dado un t fijo,*

$$R_{\psi_t}(x, y) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(k|x-y|)}{k^2 + 1} = \frac{\sigma^2}{4\pi \sinh \pi} \cosh(|x-y| - \pi).$$

Demostración. En primer lugar observamos que

$$\begin{aligned} e_{-k}(x)e_{-k}(y) + e_k(x)e_k(y) &= \frac{1}{\pi} (\cos(kx) \cos(ky) + \sin(kx) \sin(ky)) \\ &= \frac{1}{\pi} \cos(k(x-y)). \end{aligned}$$

Entonces, por independencia,

$$\begin{aligned} R_{\psi_t}(x, y) &= \mathbb{E}(\psi_t(x)\psi_t(y)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(x)e_k(y) \mathbb{E}[(Y_t^k)^2] \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}[(Y_t^0)^2] + \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \cos(k(x-y)) \mathbb{E}[(Y_t^k)^2] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \cos(k(x-y)) \frac{\sigma^2}{2(k^2 + 1)} = \frac{\sigma^2}{4\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(k(x-y))}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

La paridad del coseno concluye la prueba de la primera igualdad.

Para la segunda, expandimos el coseno hiperbólico en su serie de cosenos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cosh(|x| - \pi) \cos(kx) dx &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(e^{|x| - \pi} + e^{-|x| + \pi} \right) (e^{ikx} + e^{-ikx}) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-\pi}}{1+ik} (e^{2\pi} - 1) + \frac{e^{-\pi}}{1-ik} (e^{2\pi} - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\pi}}{1-ik} (1 - e^{2\pi}) + \frac{e^{\pi}}{1+ik} (1 - e^{2\pi}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sinh \pi \left(\frac{1}{1+ik} + \frac{1}{1-ik} \right) = \frac{\sinh \pi}{1+k^2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\cos kx}{1+k^2} = \frac{\cosh(|x| - \pi)}{\sinh \pi}.$$

□

Con este análisis, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.3. *Fijado un t , existe un α -rough path canónico asociado a ψ_t con $\alpha \in (1/3, 1/2)$.*

Demostración. ψ_t es un proceso gaussiano con regularidad α -Hölder para todo $\alpha < 1/2$. Por el lema anterior, su covarianza es de 1-variación finita. Aplicando el Teorema 5.11 tenemos el resultado deseado. □

A este rough path lo llamaremos $\Psi_t := (\Psi_t^1, \Psi_t^2)$.

Observación 6.4. Conviene señalar, llegados a este punto, el giro fundamental de la visión de Hairer. Nuestro rough path es un rough path en el que la variable que originalmente ocupaba el *tiempo* ahora es cubierta por el *espacio*; dicho de otro modo, para cada tiempo t estamos definiendo una función que es rugosa en la variable x , y es esa función la que levantamos a un rough path de variable x .

6.3. Existencia y unicidad de soluciones

Para probar existencia y unicidad de soluciones para nuestro problema, necesitamos primero dar una noción de solución. En nuestro caso trabajaremos con **soluciones mild**, construidas a través de integrales de rough paths controlados.

Definición 6.5. *Diremos que u es una **solución mild** de (6.1) si la función $v_t := u_t - \psi_t$ pertenece a $C([0, T], C) \cap L^1([0, T], C^1)$ y satisface casi seguramente*

$$\begin{aligned} v_t(x) = & (S_t(u_0 - \psi_0))(x) + \int_0^t (S_{t-s}(g(u_s \partial_x v_s + f(u_s) + u_s)))(x) ds \\ & + \int_0^t \int_0^{2\pi} p_{t-s}(x-y) g(u_s(y)) d\Psi_s(y) ds. \end{aligned}$$

Aquí S_t y p_t son el semigrupo y el núcleo del calor, respectivamente, generados por ∂_x^2 con condiciones de contorno periódicas, de tal modo que

$$(S_t u)(x) = \int_0^{2\pi} p_t(x-y)u(y)dy.$$

Es en

$$\int_0^{2\pi} p_{t-s}(x-y)g(u_s(y))d\Psi_s(y)$$

donde aparece la integral de un rough path controlado.

Observación 6.6. Existe también un concepto de solución débil, con el cual no trabajaremos, pero que también incluye una integral de rough path. Su expresión casi segura, para la misma v que en la definición 6.5, es

$$\begin{aligned} \langle v_t, \varphi \rangle &= \langle u_0 - \psi_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle (\partial_x^2 - 1)\varphi, v_s \rangle ds + \int_0^t \int_0^{2\pi} \varphi(x)g(v_s(x) + \psi_s(x))d\Psi_s(x)ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \varphi, f(u_s) + u_s \rangle ds \end{aligned}$$

para toda función test $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ y periódica. Aquí la integral de rough path controlado es

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)g(v_s(x) + \psi_s(x))d\Psi_s.$$

Hairer [Hai11] demuestra que, de hecho, ambas nociones de solución coinciden. Por lo tanto el teorema de existencia y unicidad, pese a estar formulado en términos *mild*, es válido también para soluciones débiles.

Definida la solución, presentamos el teorema de existencia y unicidad.

Teorema 6.7 (Hairer, 2011). *Sea $u_0 \in C^\beta$ con $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Entonces para casi toda realización del proceso Ψ existe un $T > 0$ tal que la ecuación (6.1) tiene una única solución mild con valores en $C([0, T], C^\beta)$. Si además tanto g como todas las derivadas de g y f son acotadas, entonces la solución es global.*

Demostración. La idea de la prueba es una iteración de Picard para la ecuación de punto fijo de la definición 6.5. Fijamos una realización de ψ y un $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta)$. Consideremos

$$\Psi : [0, 1] \rightarrow \Omega_\alpha(\mathbb{R}^d)$$

de tal forma que para cada s tenemos un rough path Ψ_s de $[0, 2\pi]$ en \mathbb{R}^d ; insistimos en que estos rough paths son rugosos **en espacio**. Por otra parte, esto no impide considerar también ψ_0 como una función de C^β , algo que aprovecharemos más adelante.

Para efectuar nuestra iteración, tomamos el espacio C_T^1 formado por las funciones continuas de $[0, T]$ en $C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^d)$ para un cierto $T \leq 1$ (a determinar) equipado con la norma

$$\|v\|_{1,T} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|v_t\|_{C^1}$$

donde $\|v(x)\|_{C^1} := \|v(x)\|_\infty + \|D_x v(x)\|_\infty$.

Nos será cómodo *eliminar* la condición inicial, de modo que consideramos la modificación $v_t := u_t - \psi_t - U_t$ donde $U_t := S_t(u_0 - \psi_0)$; de este modo $v_0 = 0$, y la ecuación de punto fijo resulta

$$\begin{aligned} v_t(x) &= \int_0^t (S_{t-s}(g(u_s)(\partial_x v_s + \partial_x U_s) + f(u_s) + u_s))(x) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{2\pi} p_{t-s}(x-y)g(v_s(y) + \psi_s(y) + U_s(y))d\Psi_s(y) ds \\ &:= (\mathcal{M}_{T,\Psi}^{(1)}(v))(x, t) + (\mathcal{M}_{T,\Psi}^{(2)}(v))(x, t) := (\mathcal{M}_{T,\Psi}(v))(x, t). \end{aligned}$$

En definitiva, vamos a considerar una iteración a través de $\mathcal{M}_{T,\Psi}$ como función

$$\mathcal{M}_{T,\Psi} : C_T^1 \longrightarrow C_T^1.$$

Tomamos un $K > 1$ tal que $\|u_0\|_{C^\beta}, \|\psi_0\|_{C^\beta} \leq K$, y consideramos $v, \bar{v} \in C_T^1$ tales que $\|v\|_{1,T}, \|\bar{v}\|_{1,T} < K$.

Comenzaremos acotando $\mathcal{M}_{T,\Psi}^{(1)}(v)$.

En primer lugar tenemos las siguientes cotas:

$$\begin{aligned}\|v_s\|_\infty &\leq \|v_s\|_{C^1} \leq \|v\|_{1,T} < K \\ \|U_s\|_\infty &\leq \|u_0 - \psi_0\|_\infty \leq \|u_0 - \psi_0\|_{C^\beta} \leq 2K \\ \|\psi_s\|_\infty &\leq \|\Psi\| \leq K\|\Psi\|\end{aligned}$$

donde $\|\Psi\| := \sup_{s \in [0, T]} \|\psi_s\|_\infty + \|\Psi_s^1\|_\alpha + \|\Psi_s^2\|_{2\alpha}$. Con todo, $\|u_s\|_\infty \leq cK$ para todo $s \leq T$.

Por otra parte $\|D_x U_s\|_\infty \lesssim s^{-1/2} \|u_0 - \psi_0\|_\infty$, y si $T < 1$ entonces $\|U_s\|_\infty \leq 2Ks^{-1/2}$; en consecuencia,

$$\|U_s\|_{C^1} \leq Cs^{-1/2} \|u_0 - \psi_0\| \leq Cs^{(\beta-1)/2} \|u_0 - \psi_0\|_\infty.$$

Entonces, si fijamos un $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_{T, \Psi}^{(1)}(v)(\cdot, t)\|_{C^1} &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|g(u_s)(\partial_x v_s + \partial_x U_s) + f(u_s) + u_s\|_\infty ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \left(\|g(u_s)\|_\infty (\|v\|_{1,T} + \|U_s\|_{C^1}) \right. \\ &\quad \left. + \|f(u_s)\|_\infty + \|v_s\|_\infty + \|U_s\|_\infty + \|\psi_s\|_\infty \right) ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \left(C_K^{(1)}(K + cKs^{(\beta-1)/2}) + C_K^{(2)} + cK + \|\Psi\| \right) ds \\ &\leq C_K t^{\beta/2} (1 + \|\Psi\|),\end{aligned}$$

y en consecuencia $\|\mathcal{M}_{T, \Psi}^{(1)}(v)\|_{1,T} \leq C_K T^{\beta/2} (1 + \|\Psi\|)$.

Obsérvese que, si g es acotada, $C_K^{(1)}$ es en realidad independiente de K ; del mismo modo, si Df es acotada, $C_K^{(2)}$ es proporcional a K . Bajo esas hipótesis C_K es proporcional a K .

Ahora

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{M}_{T, \Psi}^{(1)} v - \mathcal{M}_{T, \Psi}^{(1)} \bar{v}\right)(\cdot, t) &= \int_0^t S_{t-s} (g(u_s)(\partial_x v_s - \partial_x \bar{v}_s) + f(u_s) - f(\bar{u}_s) + u_s - \bar{u}_s) \\ &\quad \int_0^t S_{t-s} (g(u_s) - g(\bar{u}_s)) (\partial_x \bar{v}_s + \partial_x U_s) ds,\end{aligned}$$

y con argumentos similares a los anteriores obtenemos

$$\left\| \mathcal{M}_{T,\Psi}^{(1)} v - \mathcal{M}_{T,\Psi}^{(1)} \bar{v} \right\|_{1,T} \leq C_K T^{\beta/2} (1 + \|\Psi\|) \|v - \bar{v}\|_{1,T}$$

donde C_K es proporcional a K si g , Dg y Df son acotadas.

Pasemos ahora a $\mathcal{M}_{T,\Psi}^{(2)}$. Dado que para cada $s \in [0, T]$, $v_s \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^d)$ y $U_s \in C^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}^d)$, $v_s + \psi_s + U_s$ es un rough path controlado por Ψ con derivada de Gubinelli la identidad.

Entonces, por el Lema 3.21, (Y, Y') es un rough path controlado por \mathbf{X} , donde

$$\begin{aligned} Y_s(x) &:= g(v_s(x) + \psi_s(x) + U_s(x)), \\ Y'_s(x) &:= Dg(v_s(x) + \psi_s(x) + U_s(x)), \end{aligned}$$

y existe una constante C tal que

$$\begin{aligned} \|Y_s\|_{\Psi_s, \alpha} &\leq C(\|D^2g\|_\infty + \|g\|_\infty) (1 + \|v_s + \psi_s + U_s\|_{\Psi_s, \alpha})^2 \\ &\leq \hat{C}_K (\|v_s\|_{2\alpha} + \|U_s\|_{2\alpha}) (1 + \|\Psi\|)^2 \end{aligned}$$

donde, nuevamente, si las derivadas de g son acotadas podemos tomar \hat{C}_K independiente de K . Ahora, $\|U_s\|_{2\alpha} \leq K s^{-(2\alpha-\beta)/2}$ por las propiedades del semigrupo del calor¹, luego

$$\|Y_s\|_{\Psi_s, \alpha} \leq C_K \left(1 + s^{-(2\alpha-\beta)/2}\right) (1 + \|\Psi\|)^2$$

y C_K es proporcional a K si las derivadas de g son acotadas.

Por otro lado, si llamamos (\bar{Y}_s, \bar{Y}'_s) al rough path construido como arriba pero para \bar{v}_s , tenemos

$$\bar{Y}_s(x) - Y_s(x) = \int_0^1 Dg(\psi_s(x) + U_s(x) + v_s(x) + \lambda(\bar{v}_s(x) - v_s(x))) (\bar{v}_s(x) - v_s(x)) d\lambda.$$

Con los mismos argumentos que antes, llegamos a la expresión

$$\|\bar{Y}_s(x) - Y_s(x)\|_{\Psi_s, \alpha, 2\alpha} \leq \hat{C}_K \left(1 + s^{-(2\alpha-\beta)/2}\right) (1 + \|\Psi\|)^2 \|v_s - \bar{v}_s\|_{C^{2\alpha}},$$

e integrando

$$\|\mathcal{M}_{T,\Psi}^{(2)}(v) - \mathcal{M}_{T,\Psi}^{(2)}(\bar{v})\|_{1,T} \leq C_K T^{\frac{\beta-\alpha}{2}} (1 + \|\Psi\|)^2 \|v_s - \bar{v}_s\|_{1,T}; \quad (6.4)$$

¹Según [Hai11] esta es una propiedad estándar del semigrupo.

observamos que ahora la dependencia en K de C_K es cuadrática como puede verse en la integral.

Juntando todo, dado que $\beta > \alpha$ podemos escoger un T suficientemente pequeño para que $\mathcal{M}_{T,\Psi}$ sea una contracción estricta, probando así la existencia de un punto fijo; iterando este proceso hasta un posible *blow-up* tenemos el resultado deseado.

Para ver que la solución es global si g , Dg , D^2g y Df son acotadas, tenemos que existe un tiempo T_\star **independiente de K** tal que

$$\|\mathcal{M}_{T,\Psi}v\|_{1,T} \leq \frac{K}{2} \quad (6.5)$$

para todo $T \leq T_\star$ si $\|u_0\|_{C^\beta}$, $\|\psi_0\|_{C^\beta}$, $\|v\|_{1,T} \leq K$.

Sea $\hat{T} = \inf\{t \geq 0 : \|v_t\|_1 \geq K\}$. Necesariamente $\hat{T} > T_\star$ (lo contrario entraría en contradicción con (6.5)), y por consiguiente si τ es un tiempo de *blow-up* entonces $\tau > T_\star$.

Como T_\star es independiente de u_0 , iterando el argumento tenemos la solución global deseada. \square

Observación 6.8. Esta construcción de solución tan particular con teoría de rough paths se justifica además con un argumento de aproximación. Hairer ([Hai11]) demuestra también que esta solución coincide con aquella obtenida a partir de la aproximación por hiperviscosidad y de la molificación del ruido.

6.4. Hacia las estructuras de regularidad

La teoría de rough paths, y especialmente las aportaciones de Gubinelli, han resultado ser de gran utilidad para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas; entre otros problemas, han servido al estudio de ecuaciones parabólicas de segundo orden [CF09] y de la versión estocástica de Navier-Stokes [Gub06].

Uno de los grandes problemas de esta rama, relacionado además con la ecuación de Burgers, es la ecuación KPZ (Kardar-Parisi-Zhang):

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + (\partial_x u)^2 + \xi.$$

Hairer construyó una teoría de existencia y unicidad para esta ecuación con teoría de rough paths [Hai13], pero su complejidad es mayor que la del caso analizado en este trabajo. Esto es así por dos motivos: primero, porque el rough path asociado al problema lineal

no se corresponde con un proceso gaussiano; segundo porque su área no puede obtenerse como límite de aproximaciones lineales, sino que necesita una técnica de **renormalización** (esencialmente una *recentralización* de las variables que imita la idea del teorema central del límite) para su convergencia.

Esta serie de dificultades a la hora de analizar ecuaciones en derivadas parciales estocásticas singulares motivó la creación de la **Teoría de Estructuras de Regularidad** [Hai14], motivo por el cual Hairer fue galardonado con la Medalla Fields en 2014. Esta teoría, en algún sentido, continúa con la de rough paths, especialmente con la de Gubinelli, construyendo expansiones de Taylor con elementos *abstractos* y grados de regularidad arbitrarios (incluidos negativos).

La idea fundamental consiste en tomar la ecuación a analizar en forma *mild* y levantar su ruido (habitualmente STWN) a un *modelo*, que dota de mayor estructura al problema, para después resolver un punto fijo abstracto (en la terminología de Hairer, *teorema de integración*) y después proyectar sobre el espacio de soluciones (*teorema de reconstrucción*).

Además de KPZ, las estructuras de regularidad permiten cubrir problemas como el modelo Φ^4 en dimensión 3 y el modelo de Anderson parabólico (ambos casos señalados en [Hai14]).

Tanto la teoría de rough paths como las estructuras de regularidad han permitido grandes avances en ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, un campo que a día de hoy se encuentra en expansión y con un creciente interés desde las áreas de Ecuaciones en Derivadas Parciales y Probabilidad.

Bibliografía

- [CF09] Caruana, Michael y Friz, Peter. «Partial differential equations driven by rough paths». En: *Journal of Differential Equations* 247 (2009), págs. 140-173.
- [DZ92] Da Prato, Giuseppe y Zabczyk, Jerzy. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Vol. 152. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1992.
- [Eva13] Evans, Lawrence C. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society, 2013.
- [FGL15] Friz, Peter K., Gassiat, Paul y Lyons, Terry. «Physical Brownian motion in magnetic field as rough path». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 367 (2015), págs. 7939-7955.
- [FH14] Friz, Peter K. y Hairer, Martin. *A Course on Rough Paths: With an Introduction to Regularity Structures*. 1.^a ed. Universitext. Springer International Publishing, 2014.
- [FV10a] Friz, Peter K. y Victoir, Nicolas B. «Differential equations driven by Gaussian signals». En: *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques* 46.2 (2010), págs. 369-413.
- [FV10b] Friz, Peter K. y Victoir, Nicolas B. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications*. 1.^a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2010.
- [Gub04] Gubinelli, Massimiliano. «Controlling Rough Paths». En: *Journal of Functional Analysis* 216 (2004), págs. 86-140.

- [Gub06] Gubinelli, Massimiliano. «Rooted trees for 3D Navier-Stokes equation». En: *Dynamics of PDE* 3.2 (2006), págs. 161-172.
- [Gub10] Gubinelli, Massimiliano. «Ramification of rough paths». En: *Journal of Differential Equations* 248 (2010), págs. 693-721.
- [Hai11] Hairer, Martin. «Rough stochastic PDEs». En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 64 (2011), págs. 1547-1585.
- [Hai13] Hairer, Martin. «Solving the KPZ equation». En: *Annals of Mathematics* 178 (2013), págs. 559-664.
- [Hai14] Hairer, Martin. «A theory of regularity structures». En: *Inventiones Mathematicae* 198 (2014), págs. 269-504.
- [LCL07] Lyons, Terry, Caruana, Michael y Lévy, Thierry. *Differential Equations Driven by Rough Paths: École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIV - 2004*. 1.^a ed. Vol. 1908. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [LQ02] Lyons, Terry y Qian, Zhongmin. *System control and rough paths*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications. Clarendon Press; Oxford University Press, 2002.
- [Lyo98] Lyons, Terry. «Differential equations driven by rough signals». En: *Revista Matemática Iberoamericana* 14.2 (1998), págs. 215-310.
- [NT11] Nualart, David y Tindel, Samy. «A construction of the rough path above fractional Brownian motion using Volterra's representation». En: *Annals of Probability* 39.3 (2011), págs. 1061-1096.
- [Nua06] Nualart, David. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. 2.^a ed. Probability and Its Applications. Springer, 2006.
- [Sch89] Schaumlöffel, Kay-Uwe. «White noise in space and time as the time-derivative of a cylindrical Wiener process». En: ed. por Giuseppe Da Prato y Luciano Tubaro. Vol. 1390. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1989, págs. 225-229.
- [Whi34] Whitney, Hassler. «Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 36 (1934), págs. 63-89.

- [WZ65] Wong, Eugene y Zakai, Moshe. «On the Convergence of Ordinary Integrals to Stochastic Integrals». En: *The Annals of Mathematical Statistics* 36.5 (1965), págs. 1560-1564.
- [You36] Young, Laurence C. «An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration». En: *Acta Mathematica* 67 (1936), págs. 251-282.