Álgebra Lineal: más alla de los sistemas de ecuaciones

Aurora Alejandra Olivieri Palmas

Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato: Matemáticas

MÁSTERES DE LA UAM 2017 - 2018

Facultad de Formación de Profesorado y Educación

Universidad Autónoma de Madrid

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN

SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Álgebra Lineal: más allá de los sistemas de ecuaciones

Autora Aurora Alejandra Olivieri Palmas

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Curso 2017/18

Resumen

En el siguiente Trabajo de Fin de Máster se presenta una propuesta didáctica para el tema de Álgebra lineal de 2º Bachillerato de la Modalidad de Ciencias, que incorpora el uso de Tecnologías de la Información y de la Comunicación.

La propuesta plantea la creación y gestión de un foro de discusión en línea para que los alumnos resuelvan problemas que requieran destrezas en argumentación y comunicación con el lenguaje matemático. Además, contiene cinco actividades diseñadas para fundamentar conceptos complejos del tema, proporcionar ejemplos donde las matrices sirven para resolver problemas e integrar herramientas informáticas de Sistemas de Cómputo Algebraico como apoyo a estos temas.

Índice

1. Introducción

Este trabajo es el producto de lo aprendido en el Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, al cual llegué después de unos años como profesora universitaria en Venezuela. Estos nuevos conocimientos, me han servido para reflexionar sobre mi práctica docente y prepararme para afrontar el reto que representa la enseñanza de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato.

Inicialmente se me propuso realizar el diseño de la unidad didáctica de Álgebra Lineal para 2º Bachillerato de la Modalidad de Ciencias[1] en la que, cumpliendo por supuesto con los objetivos recogidos en el currículo, el hilo conductor fuera usar el álgebra lineal. La intensión sería proponer un recorrido que incluyera la resolución de sistemas de ecuaciones lineales e (implícitamente) su discusión, pero en el que esta no acapare toda la atención de la unidad. La propuesta original se fue adaptando producto de la evaluación realizada, hasta convertirse en una propuesta didáctica que complementa el trabajo que se realiza actualmente.

Desde el inicio se supo que, por tratarse del curso final de Bachillerato, sería imposible aplicar el material didáctico producido en este trabajo directamente, al menos previo a su presentación. La principal razón para concluir la inviabilidad de su aplicación se debe a que el contenido se había dictado antes de asistir a la segunda parte de las prácticas. Otra razón, a la que se hará referencia más adelante, es el ritmo con el que se revisan los contenidos de este curso, motivado por la Prueba de Acceso a la Universidad[2] que tiene su primera convocatoria en junio. La planificación de este curso es tan cerrada que no permite la intervención de un agente externo que pudiera restarles tiempo para cumplir el cronograma establecido. Bajo estas condiciones, aproveché parte del tiempo que estuve en el Colegio Zurbarán de Colmenar Viejo, donde realicé las prácticas del Máster, para conocer todos los aspectos de la enseñanza del Álgebra lineal en 2º Bachillerato y recibí todo el apoyo por parte del equipo de profesores del Centro.

Este Trabajo de Fin de Máster[3] ha sido estructurado siguiendo los lineamientos del documento de orientación facilitado por la Universidad para completar esta tarea. En la Sección 4 se puede encontrar la revisión del contexto y en la Sección 5 se hace el

[1] En adelante no se hará referencia de la Modalidad.
[2] En adelante PAU.
[3] En adelante TFM.

diagnóstico y la descripción del reto. La Propuesta Didáctica se ha colocado en la sección 6.

2. Objetivos del trabajo

Los objetivos que nos hemos planteado para la realización de este trabajo son los siguientes:

- Analizar y reflexionar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra lineal en Bachillerato.
- Estudiar el marco curricular teórico de estos temas y describir etapas del aprendizaje que necesiten ser reforzadas para fundamentar otros conocimientos.
- Evaluar el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación[4] como apoyo didáctico en este nivel.
- Realizar una propuesta didáctica que contribuya al aprendizaje del álgebra lineal inicial.
- Evaluar la propuesta, añadiendo adaptaciones o sugiriendo mejoras.

3. Marco legal

La educación en España está regulada por la Ley Orgánica de Educación[5] (BOE-Ley Orgánica 2/2006), con las modificaciones introducidas por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa[6] (BOE-Ley Orgánica 8/2013).

En la LOMCE se define el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. En el Real Decreto 1105/2014 se puede encontrar el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria[7] y del Bachillerato, que debe ser establecido por el Gobierno según las regulaciones de la LOE. En este Real Decreto, se reconoce que le corresponde a las Administraciones educativas constituir el currículo de las distintas enseñanzas reguladas en ella, que incluirá en todo caso el currículo básico. Por esta razón debemos recurrir al Decreto 52/2015 donde se establece el currículo de Bachillerato en la

[4] En adelante TIC.
[5] En adelante LOE.
[6] En adelante LOMCE.
[7] En adelante ESO.

Comunidad de Madrid. En el Artículo 9, sobre *Materias y currículo,* apartado a) establece:

> Materias del bloque de asignaturas troncales: Los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de las materias del bloque de asignaturas troncales son los del currículo básico fijados para dichas materias en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
> La Administración educativa de la Comunidad de Madrid podrá complementar los contenidos del bloque de materias troncales.

Como no se ha publicado ningún complemento en el caso de Matemáticas, que es una de las asignaturas troncales, debemos trabajar según lo establecido en el Real Decreto 1105/2014.

La evaluación final de Bachillerato, regulada por el artículo 36 bis de la LOE, se realizará exclusivamente para el alumnado que quiera acceder a las enseñanzas universitarias oficiales de grado, como se fija en el Real Decreto-ley 5/2016 de medidas urgentes para la implantación de la LOMCE. Por lo anterior, la evaluación final de Bachillerato corresponde a la PAU. Para saber sobre las características, el diseño y el contenido de esta prueba se ha consultado la Orden del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte 42/2018.

4. Revisión del contexto

Para realizar el diagnóstico de la enseñanza del Álgebra lineal en 2º Bachillerato se llevaron a cabo las siguientes acciones:

- Se consultó las investigaciones en el área de educación matemáticas **sobre las dificultades propias del tema**.
- Se siguió los orígenes y la evolución de **los sistemas de ecuaciones lineales en el currículo** de la ESO y de Bachillerato.
- Se buscó información de **cómo se dicta el álgebra lineal en el Colegio Zurbarán**.
- Se revisaron **algunos problemas de la PAU** sobre el tema.

- Se consultó **la enseñanza del Álgebra lineal en Francia** del nivel equivalente al que nos interesa.

A continuación se desarrolla cada una de ellas.

4.1 Sobre dificultades propias del tema

A diferencia de otras áreas de la matemática, el Álgebra Lineal es relativamente de reciente estudio. A continuación haremos una breve revisión histórica usando información de las recopilaciones hechas por Knill (2014) y O'Connor y Robertson (1996). Se le atribuye al grupo de matemáticos nombrado Nicolas Burbaki la afirmación: "To give the history of linear algebra is a task that is as important as it is difficult", que da la idea de lo complicado que es seguir el desarrollo de esta área a lo largo del tiempo.

El interés en resolver sistemas de ecuaciones tiene referencias desde 300 a.C., con los babilonios, aunque fueron los chinos los que estuvieron mucho más cerca de las matrices, entre 200-100 a.C.

En 1683 la aparición de los determinantes de forma simultánea en Europa y en Japón podría decirse que es el origen al álgebra lineal que conocemos. Los estudios de Cramer, en 1750, en problemas de curvas algebraicas, muestran el uso de los determinantes para resolver un sistema de ecuaciones con la regla que lleva su nombre, sin demostrarla. Se consigue en esos años una serie de resultados que centran el interés en los determinantes. Como dato curioso, en 1812 Cauchy y Binet llegaron de forma independiente a la regla del producto de determinantes $\det(A{\cdot}B) = \det(A) \cdot \det(B)$, sin haber definido lo que era una matriz y mucho menos la multiplicación entre ellas.

En 1850, Sylvester utilizó por primera vez el término matriz, que viene del latín clásico "matrice" en referencia al órgano reproductor femenino. La elección de la palabra matriz resultó del hecho de que a partir de ella se puede generar un determinante, es decir que la matriz "engendra" al determinante.

La resolución de los sistemas de ecuaciones avanzaba en paralelo. La eliminación gaussiana apareció por primera vez en Jiuzhang suanshu (Nueve capítulos sobre el arte matemático) 200 a.C., pero debe su nombre a Gauss que lo utilizó para resolver un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas, asociado a las observaciones que realizó de la órbita del asteroide Pallas, entre los años 1803 y 1809.

Sin detenernos en los detalles, por cuestión de la brevedad que debe tener este recuento, en 1858 Cayley define una matriz de forma abstracta y en 1888 Giuseppe Peano presentó los axiomas de un espacio vectorial. El desarrollo del álgebra lineal como la estudiamos actualmente se realizó en la primera mitad del siglo XX, para alcanzar su papel principal actual como uno de los temas más importantes de matemáticas a nivel universitario.

Esta relevancia a nivel universitario, sobre todo en carreras de ciencias, ha provocado discrepancias sobre los límites desde cuándo se deben enseñar estos temas y cuál es la profundidad y el enfoque que deben tener al inicio. Dorier, Robert, Robinet y Rogalsiu (2000) hacen un repaso de la enseñanza en Francia del álgebra lineal en este sentido. Es interesante este caso, pues en los sesenta, movidos por la influencia de Bourbaki, se reformó el currículo de matemáticas de los Lycèe (que corresponde a una etapa de los 15 a los 18 años) para enseñar los espacios vectoriales desde los axiomas, entre otros cambios. Tenían la concepción de que esto facilitaría su comprensión. En 1962, la asociación de profesores de matemáticas de la enseñanza pública de Francia (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) publicó una serie de libros basados en unas conferencias dictadas por André y Germaine Revuz en París, como parte de un proyecto experimental. El segundo volumen estaba dedicado a la teoría de los espacios vectoriales de dimensión finita. Este libro se convirtió en referencia en Francia y en 1969 se concretó este cambio curricular que se mantuvo en Francia hasta 1985, cuando se llevaron estos temas al primer año de la universidad y se cambió el currículo a nivel de los Lycèe.

Desde sus primeros años, esta reforma abrió el debate sobre la enseñanza de los espacios vectoriales en secundaria en Francia. Entre los detractores de ella, estaba el matemático Gustave Choquet (1915- 2006) que defendía la idea de que la estructura de espacios vectoriales no debería enseñarse tan pronto y en cambio, promovía enseñar una visión geométrica más intuitiva para ese nivel.

A pesar de retrasar su enseñanza detallada, en el nivel universitario es común que se presenten dificultades en el aprendizaje de los conceptos abstractos asociados al

Álgebra lineal cuando se profundiza en estas estructuras (Carlson, Johnson, Lay y Porter 1993; Day, J. y Kalman, D., 2001; Andreoli, 2009; Possani, Trigueros, Preciado, y Lozano, 2010; Thomas, 2011; Martínez, Almazán, Lentini, Lentini, y Hernán, 2013; Petrov, Gyudzhenov y Tuparova, 2015; Salgado, 2015; Dorier et al., 2000; Dorier, 2002 y 2016; Herrero y Solares, 2017; Cárcamo, 2017).

Harel (2000) recomienda un curso básico en esta área orientado geométricamente en Bachillerato, alegando una falta de tiempo en los primeros cursos de la universidad para lograr que estén motivados y cognitivamente preparados para la abstracción. Se refiere a que, aunque los contenidos están en el currículo, se hace poca conexión entre los objetos y las ideas que se pueden conseguir en la geometría en $\mathbf{R}^2$ (el plano) y $\mathbf{R}^3$ (el espacio), por ejemplo; en esta situación, la única conexión posible entre el Bachillerato y el Álgebra lineal es el estudio de los sistemas de ecuaciones.

Más recientemente, Harel (2017) comentó que iniciar los sistemas de ecuaciones sin usar la representación matricial es un enfoque consistente con el hecho histórico y tiene el beneficio de permitir la conexión con conocimientos previos de los alumnos. Continúa diciendo Harel que usar la Geometría como una aplicación del Álgebra lineal produce mejor compresión. Sin embargo, también ha encontrado indicios que muestran que usar la geometría como motivación para estos conceptos puede restringir la capacidad de los estudiantes de abstraerse (Harel, 1999, 2000). Lo cierto es que no concluye que la geometría deba eliminarse del contenido curricular; más bien, recomienda que durante un período de tiempo la geometría debiera aparecer como una aplicación de conceptos e ideas de álgebra lineal, no como su motivación.

Fue el mismo Harel (2000) quien postuló tres principios para la enseñanza del Álgebra lineal, basado en la teoría psicológica del desarrollo de conceptos de Piaget. Estos tres principios son:

- **El Principio de Concretitud:** se refiere a que el alumno necesita un contexto para asimilar un concepto.
- **El Principio de Necesidad:** para aprender un nuevo concepto el alumno debe contar con una necesidad intelectual que justifique el nuevo conocimiento.
- **El Principio de Generalidad:** el modelo adquirido debe permitir la generalización dentro del primer principio.

Estos principios están bien desarrollados por Dorier en su artículo de 2002. En la conclusión de este mismo trabajo, Dorier dice que es difícil que la investigación en educación matemática pueda dar una respuesta milagrosa para superar todas las dificultades de enseñar y aprender Álgebra lineal, ya que están involucrados procesos cognitivos complejos. Pero lo que sí se ha conseguido es que en varios países la investigación en educación matemática haya influido en las reformas curriculares, como en América del Norte a través del "Linear Algebra Curriculum Study Group" (Carlson et al., 1993).

Sobre el caso que nos ocupa, Prieto (2014) en su TFM "El Papel del Álgebra Lineal en el Bachillerato y en la Universidad", analizó el cambio de Bachillerato a la Universidad (en la Comunidad Autónoma de Cantabria) siguiendo el hilo al estudio de este tema en ambos niveles. Concluyó que, aunque hay contenidos comunes en ambos temarios, tienen una aproximación bien diferente, ya que pasan de una matemática "mostrativa" a una "demostrativa"; además de que el estudio en Bachillerato de estos temas se hace de forma muy superficial para favorecer la preparación para la PAU. Esta prueba limita mucho pues condiciona los objetivos del Bachillerato, pero podemos proponernos mejorar la conexión con la intuición geométrica como sugiere Harel para preparar a los alumnos para la Universidad. Como dice De León (2007): "Las Matemáticas españolas se enfrentan, pues, a una triple encrucijada: investigación, reformas universitarias, secundaria. No son independientes unas de otras, al contrario, forman un circulo que no puede ser roto".

4.2 El lenguaje algebraico y la solución de ecuaciones lineales en el currículo

La resolución de ecuaciones se inicia pronto en la educación, aunque es en 2º ESO donde aparece explícitamente en los contenidos del currículo (BOCM-Decreto 48/2015). La referencia al uso del lenguaje algebraico para la representación de situaciones cotidianas forma parte de los contenidos mínimos de 1º ESO, pero sólo con la finalidad de obtener fórmulas o términos generales y valores numéricos de estos.

Lo cierto es que hay una diferencia importante entre los contenidos mínimos del currículo, los desarrollados en los libros y lo que se enseña en los centros. Los alumnos de 1º ESO que atendí durante las prácticas resolvían una ecuación lineal con una incógnita en cada examen, independientemente del tema que se estuviera evaluando.

Volviendo al contenido de 2º ESO, aparecen las ecuaciones de primer y de segundo grado con una incógnita, y los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para finalizar el bloque. Se combina el método algebraico de resolución con el gráfico, excepto para las de segundo grado pues no conocen aún las funciones cuadráticas. En todos los casos, se les enseña a comprobar e interpretar los resultados obtenidos y la utilidad en la resolución de problemas.

En 3º ESO y 4º ESO se ahonda en el tema de la resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones de segundo grado y de sistemas de ecuaciones lineales. Este contenido es común en ambas opciones de matemáticas, aplicadas o académicas (BOCM-Decreto 48/2015).

El método de Gauss para la resolución e interpretación de Sistemas de Ecuaciones Lineales[8] cierra los contenidos del Bloque 2, "Números y álgebra", de 1º Bachillerato. En los estándares de aprendizaje evaluables correspondientes se acota que como máximo se resuelvan SEL de tres ecuaciones y tres incógnitas (3×3). Además de la resolución, se incluye la formulación de las ecuaciones entre los contenidos que se deben enseñar, así como su interpretación gráfica, en el caso que sea posible. Como no se incluyen en el bloque de Geometría los planos y rectas en el espacio, las ecuaciones de estos sistemas y sus soluciones no se pueden asociar a lugares geométricos en el espacio.

En 2º Bachillerato se introducen los elementos básicos del Álgebra lineal: matrices, sus operaciones y el determinante, entre otros. Los contenidos se establecen en un orden que puede suponerse como una ruta a seguir donde el último ítem corresponde al Método de Gauss, la Regla de Cramer y su aplicación a la resolución de problemas, como puede verse en la siguiente tabla (BOCM-Decreto 48/2015):

Contenidos	Criterios y estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra	
• Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones. • Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de	1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos. 1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados. 1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las

[8] En adelante SEL.

contextos reales. • Determinantes. Propiedades elementales. • Rango de una matriz. • Matriz inversa. • Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.	propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones. 2.1. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. 2.2. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. 2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. 2.4. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

El bloque de Geometría viene a continuación en los libros (Colera y Oliveira, 2009; Hernández, Quirós y Tarrés, 2002; Alcaide et al., 2016; Gámez, Marín, Martín, Pérez, y Sánchez, 2016). Como las destrezas necesarias para la resolución de SEL se consideran alcanzadas, al igual que el resto de los temas de álgebra, se usan como una herramienta para resolver problemas de geometría. Concluyo que se pierde una dirección en la interpretación posible de los problemas de estos dos temas, me refiero de la geometría salen problemas de SEL, pero a los SEL no suelen darles una interpretación geométrica pues la geometría en el espacio no es conocida previo a la discusión de los sistemas. Se coloca a continuación la tabla con los contenidos de este bloque:

Contenidos	Criterios y estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. Geometría	
• Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. • Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. • Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos). Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).	1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores. 1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. 2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio. 2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. 2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. 2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas

	en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. 2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. 3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico. 3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. 3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades. 3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. 3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.

4.3 Caso particular del centro de prácticas

El Colegio Zurbarán es un centro concertado que atiende a 590 alumnos para las etapas de infantil, primaria, secundaria y Bachillerato; siendo, en este último, de carácter privado. Cuenta con dos unidades de Bachillerato en las modalidades de Ciencias, y Humanidades y Ciencias Sociales.

Se entrevistó a la profesora de 2º Bachillerato de Ciencias para conocer cómo trabaja con sus alumnos los temas de Álgebra lineal y de Geometría. En la Entrevista (Anexo 1), la Profesora contó que tiene 26 alumnos en este curso. Aunque ella es nueva en el Colegio, ha trabajado con otro curso de 2º Bachillerato en la asignatura de Física. Reconoce que debe tener una buena planificación y cumplirla de forma muy estricta con los tiempos destinados a cada contenido porque uno de los objetivos que tiene es enseñarles a los alumnos a resolver los problemas del estilo de la PAU, para esto toma ejercicios de la página web del profesor Isaac Musat[9]. Como recurso principal utiliza el libro (Alcaide et al., 2016) y en ocasiones utiliza el proyector como apoyo en sus clases. No utiliza programas informáticos para hacer cálculos simbólicos pues no le ha parecido necesario.

La Profesora sigue el orden del tema como viene en el libro, comenzando con las matrices con el objetivo de resolver sistemas de ecuaciones. No suele representar los SEL con geometría pues ese tema es posterior. Cuando en Geometría intenta hacer esta

[9] http://www.musat.net/

conexión dice que cree que a sus alumnos les cuesta mucho y no lo llegan a comprender. La planificación temporal para este curso (Anexo 1), contenida en la programación del Departamento de Matemáticas, contempla que la primera evaluación contenga las tres secciones en las que el libro divide al Álgebra lineal y la sección de vectores en el espacio, que corresponde al bloque de Geometría. El resto del bloque de Geometría ocupa la mitad de la segunda evaluación.

Sobre la motivación en los problemas de las clases según la preferencia de carreras universitarias, me dijo que es difícil hacerla. Aunque ella indaga al principio del curso, los alumnos van cambiando de preferencias a lo largo del año. Son pocos los que lo tienen claro desde un principio. Añadió que sí lo hace con problemas de ingeniería, de los cuales tiene conocimiento por su profesión.

Sobre cuáles son los aspectos con mayor dificultad para los alumnos, y donde cometen más errores, ella comentó que la discusión de sistemas de ecuaciones es de lo que más les cuesta, a pesar de ser a lo que más tiempo le dedican. Otros contenidos en los que suelen tener dificultades son la aplicación de la Regla de Cramer y el cálculo de la inversa.

4.4 Comentarios sobre la PAU, revisión de algunos problemas de Álgebra lineal en ella

Aunque en el apartado primero del Artículo 31, del Real Decreto 1105/2014, se indica que los alumnos y alumnas realizarán una evaluación individualizada al finalizar Bachillerato, en la que se comprobará el logro de los objetivos de esta etapa, en la Orden del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte 42/2018 sólo aparecen los contenidos y estándares de evaluación correspondientes a 2º Bachillerato, al menos en el Bloque 2 de Álgebra.

Boal, Bueno, Leris, y Sein-Echaluce (2008) realizaron un estudio, sobre los objetivos que se evalúan en la PAU, en el que concluía que:

> En síntesis, a partir del análisis realizado, hemos detectado un enfoque superficial del aprendizaje de las matemáticas de Bachillerato: aprender a reproducir la información para cumplir con los requisitos de la PAU. Esto conduce a tratar el curso como partes aisladas sin relación, a memorizar conceptos y procedimientos de manera rutinaria, etc.

La preocupación de estos autores se centró en las habilidades matemáticas que eran evaluadas en esta prueba, entre ellas: la resolución de problemas, la ortografía matemática y la comunicación matemática; todas contenidas en la Ley vigente en el momento en que se realizó el estudio (LOGSE[10]). Aunque la legislación ha cambiado desde entonces, podemos encontrar estas habilidades entre los contenidos que se deben enseñar del Bloque 1 del currículo actual. Este Bloque 1, sobre los Procesos, métodos y actitudes matemáticas, es común en toda la ESO y Bachillerato, aunque va cambiando en su alcance. La resolución de problemas y comunicación en matemática, con el uso correcto de los símbolos, requiere una formación continua, un crecimiento y una madurez que se busca alcanzar durante toda la fase escolar.

Se han revisado algunas pruebas de la recopilación hecha por el profesor Musat (Mayo, 2018), que es utilizada por la Profesora del Colegio Zurbarán. El documento PDF disponible en su página web contiene todas las PAU de la Comunidad de Madrid en todas sus convocatorias, desde el año 2000. Por lo extenso del material, se han seleccionado los años 2014, 2015 y 2016. Entre los 26 modelos disponibles para esos años, se han elegido los problemas de Álgebra lineal de tres de ellos como ejemplos sobre la variedad de problemas que pueden aparecer.

Ejemplo 1

Modelo A. 2014

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   se pide:
   a) Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.
   b) Hallar la matriz A^{-1} para k=6.
   c) Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para k=6.
2. Dado el punto P(1;1;1) y los planos

   $\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0$; $\pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0$; $\pi_3 \equiv x + y - z = 0$;

se pide:
   a) Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.
   b) Para a=2, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1y π_2.
   c) Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3.

[10] Real Decreto 938/2001, de 3 de agosto, derogado por RD 1467/2007 de 2 de Nov. Esta última fue derogada en su totalidad por el Real Decreto 562/2017, de 2 de junio.

<u>Comentarios:</u> Aunque el segundo problema pertenece al bloque de Geometría, contiene también un sistema de ecuaciones con un parámetro para el que se debe encontrar valores que condicionen un tipo de solución.

Ejemplo 2

Junio, 2014 (Opción B)
3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, se pide: d) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.   e) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso a=2.   4. Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide: a) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.   b) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

<u>Comentarios:</u> Lo he seleccionado pues tiene un problema asociado a la vida real, donde el estudiante debe traducir a lenguaje simbólico y resolver, lo que es poco común entre los modelos revisados.

Ejemplo 3

Junio, 2015 (Opción B)
3. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ se pide: f) Calcular A^{15} y A^{20}.   g) Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.   4. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}, \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

a) Hallar el rango de A en función de t.

b) Calcular t para que $\det(A-tI)=0$.

Comentarios: En el primer problema se pide calcular dos potencias de una matriz. En el mismo problema aparece una ecuación matricial que requiere destreza con el manejo de las operaciones para obtener una relación que se pueda resolver. Si el alumno trabaja directamente con las entradas de las matrices, realizando las operaciones indicadas, se puede convertir en una respuesta muy larga. Sobre el segundo problema, se pide el rango en función de un parámetro y además un determinante que involucra el mismo parámetro t.

Conclusiones

- El puntaje de los problemas de Álgebra lineal en estas pruebas puede variar de tres a cuatro puntos (sobre diez), con una pregunta de tres puntos en el primer caso o dos preguntas de dos puntos cada una en el segundo.
- Son comunes los problemas de discusiones sobre sistemas de ecuaciones lineales, inversa de matrices o cálculo de rango, con parámetros.
- Se ha usado, en algunos modelos, un punto de la pregunta de Geometría para discutir un sistema de ecuaciones con parámetros. En este caso, junto a una pregunta de tres puntos, se lleva el peso del álgebra lineal a cuatro puntos.
- Se presentan ecuaciones matriciales que requieren un buen uso de las operaciones en el álgebra de matrices. En algunos casos, se pide sobre estas relaciones deducir el valor de algún determinante, lo que requiere tener habilidades con las propiedades de los determinantes.
- No queda claro, a partir de los estándares de aprendizaje evaluables, la destreza que debe alcanzar un alumno con el determinante y sus propiedades elementales, aunque en algunos problemas se evalúan.

4.5 La enseñanza del Álgebra lineal en Francia

El programa francés del nivel correspondiente al que nos interesa (BOEN- nº 8, 2011) expone en su párrafo introductorio que entre los objetivos generales de la etapa (cycle terminal de la série scientifique) está dar una base solida para los estudiantes que deseen participar en estudios superiores científicos, reforzando su gusto por las actividades de investigación. Entre los objetivos específicos de la asignatura expone que buscan desarrollar competencias como: realización de investigaciones de forma independiente y de razonamientos; tener una actitud crítica hacia los resultados obtenidos; comunicarlos de forma escrita y oral.

En el bloque que nos ocupa, “Matrices et suites”, proponen los contenidos a partir de problemas de ejemplo obtenidos de procesos discretos, determinísticos o estocásticos. La tabla de los contenidos tiene una primera columna con los problemas de ejemplo y la segunda de los contenidos. La traducción de ambas columnas se presenta a continuación:

Problemas de ejemplo	Contenidos

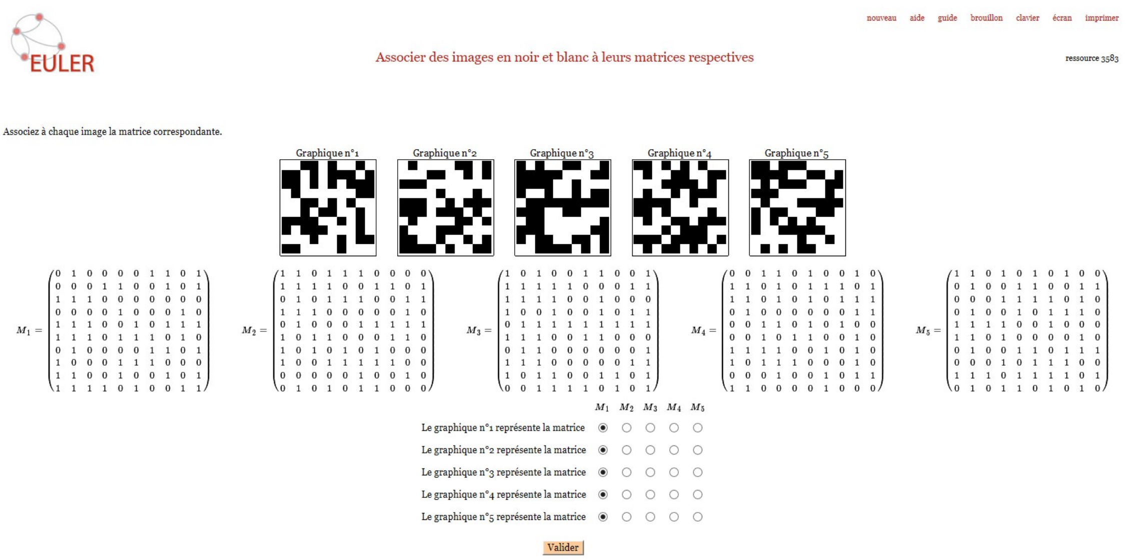
• Paseo aleatorio simple en un grafo con dos o tres vértices.
• Paseo aleatorio en un tetraedro o grafo de *N* vértices con salto directo posible desde un vértice a otro: en cada momento, el móvil puede recorrer las aristas del grafo probabilístico o ir directamente a cualquier vértice con una probabilidad constante *p*.
• Estudio del principio de cálculo de la relevancia de una página web.
• Modelo de dispersión de Ehrenfest: *N* partículas están distribuidas en dos recipientes; en cada momento, un partícula elegida al azar cambia de recipiente.
• Modelo de depredador-presa discreto:
  o evolución acoplada de dos secuencias recurrentes;
  o estudio del problema lineal cerca del punto de equilibrio.
	• Matrices cuadradas, matrices columnas: operaciones.
	• Matriz inversa de una matriz cuadrada.
	• Ejemplos de cálculo de la enésima potencia de un matriz cuadrada de orden 2 o 3.
	• Escritura matricial de un sistema lineal.
	• Sucesión de Matrices (U_n) que verifican una relación de recurrencia del tipo $U_{n+1} = AU_n + C$:
	  o buscar una sucesión constante que verifique la relación de recurrencia;
	  o estudio de la convergencia.
	• Estudio asintótico de un paseo aleatorio.

En la presentación de este tema se señala que los cálculos se deben hacer con matrices de orden 2 y se propone para matrices de orden 3 o mayor el uso de calculadoras o software. Queremos observar que entre los contenidos no aparece el determinante y sus aplicaciones.

El programa cuenta con un libro de apoyo (Éduscol, 2012) donde están desarrollados estos ejemplos. Uno de los objetivos, declarado de la presentación de este libro, es conquistar y convencer a los alumnos de que continúen con estudios científicos.

Esta propuesta se basa en la resolución de problemas y la primera parte del libro la dedican al desarrollo, con cierto detalle, de los problemas de ejemplo de la tabla anterior, donde las matrices aparecen "naturalmente". En la introducción del libro (Éduscol, 2012) se lee: "Les professeurs sont invités, conformément à la recommandation du programme, à ne pas démarrer directement par la présentation des contenus théoriques exposés dans la seconde partie, mais à essayer la démarche proposée consistant à introduire les notions dans le cadre de problèmes à résoudre"; cuya traducción dice: Se invita a los profesores, de acuerdo con la recomendación del programa, a no comenzar directamente por la presentación de los contenidos teóricos expuestos en la segunda parte, sino a probar el enfoque propuesto de introducir las nociones en el contexto de los problemas a resolver.

Este libro tiene enlaces que llevan a recursos en línea que se pueden usar en las clases, algunos de ellos son preguntas de selección simple que se autocorrigen. El siguiente es uno de ellos[11], sobre tratamiento de la imagen:



5 Diagnóstico, descripción y análisis del reto

Con la revisión del contexto y las dificultades propias del tema, podemos realizar el siguiente diagnóstico:

- Las matrices se introducen con la única intención de resolver y discutir SEL.
- Ausencia de los apoyos TIC.

[11] https://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image1.jsp

- Existe una escasa conexión entre los sistemas de ecuaciones y su representación geométrica en el caso 3x3.
- Una larga lista de investigaciones reconocen las dificultades de abstracción en el primer año de universidad sobre conceptos de álgebra lineal.

Después de realizado este diagnóstico, nos hemos propuesto los siguientes objetivos para atender el resultado de la evaluación realizada:

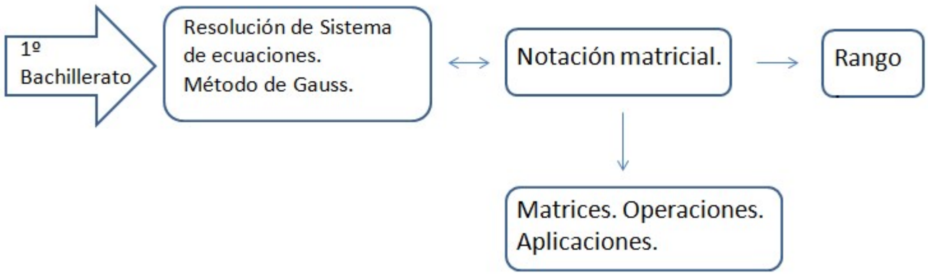
- Proporcionar ejemplos donde las matrices y sus operaciones sirvan para resolver problemas.
- Explorar diferentes recursos TIC y valorar su utilización en el aula.
- Generar espacios para experimentar y proponer conjeturas, para una compresión significativa de resultados centrales del álgebra lineal.
- Proporcionar actividades que ayuden a establecer conexión entre SEL, hasta 3×3, y su representación en el plano o en el espacio.

Teniendo en cuenta el diagnóstico y los objetivos, se fijaron las siguientes acciones para elaborar la propuesta didáctica:

- Revisión y discusión del marco curricular teórico, buscando las conexiones que nos permitan seguir los tres principios de Harel (2000): **Concretitud, Necesidad y Generalización**.
- Discusión sobre el uso de los TIC en este bloque, realizando sugerencias y actividades que puedan usarse para apoyar nuestra tarea.
- Diseño y discusión de las actividades propuestas, incluyendo posibles adaptaciones y propuestas complementarias.

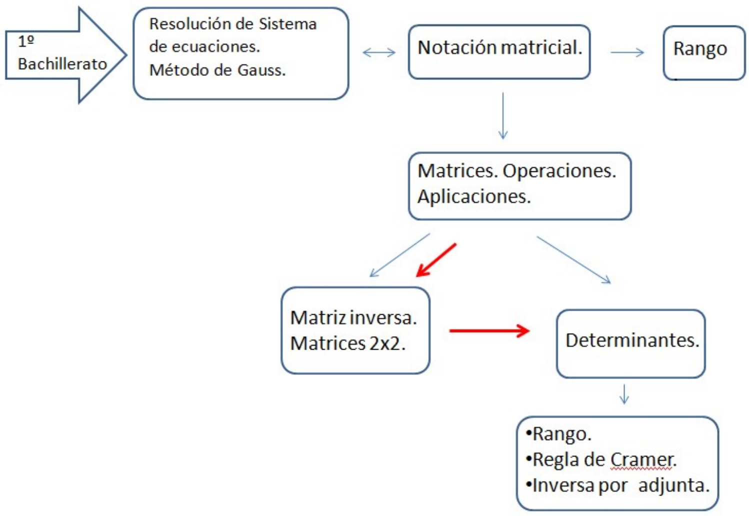
5.1 Marco curricular teórico

En 1º de Bachillerato se termina el Bloque 2, de Álgebra, con la solución de los sistemas de ecuaciones hasta tres ecuaciones y tres incógnitas con el Método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones, por esta razón comenzar en el siguiente curso con este nexo me parece adecuado. Proponemos empezar con los SEL sin usar la representación matricial. Desde este punto se puede conseguir el contexto a partir del cual construir la secuencia de contenidos. A continuación se presenta el esquema que se puede seguir.



Ese es el orden que tiene el libro de Hernández et al. (2002) y es acorde al **Principio de Concretitud** que queremos seguir en esta propuesta didáctica, para establecer conexión entre lo que saben y el nuevo conocimiento.

A partir de aquí se abren dos posibilidades que se pueden seguir: la inversa de una matriz cuadrada o los determinantes. El camino que proponemos es continuar con la inversa de una matriz y seguir con el determinante, como se ve en la imagen a continuación.



La razón principal para esta ruta es que calcular la inversa 2x2 es un problema de sistemas de ecuaciones lineales que se les puede plantear a los alumnos para una matriz en particular y motiva la generalización del Método de Gauss para el cálculo de la inversa para matrices $n \times n$. La generalización de los procesos, de forma natural, sigue la línea del **Principio de Generalidad** que queremos conseguir con este camino.

A partir de la solución del problema de encontrar la inversa de una matriz 2×2, se puede proponer el caso general. Supongamos que queremos calcular la inversa de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es decir queremos encontrar $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esto produce un sistema de ecuaciones 4x4.

$$\begin{gathered} ax + bz = 1 \\ ay + bw = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dw = 1 \end{gathered}$$

Para comenzar a resolverlo debemos convencernos que a o c debe ser no nulo para poder calcular la inversa. Si a=c=0, llegaremos a resultados contradictorios:

$$\left.\begin{aligned} bz = 1 \\ bw = 0 \end{aligned}\right\} => b \neq 0 \; y \; z \neq 0 => w = 0$$

$$\left.\begin{aligned} dz = 0 \\ dw = 1 \end{aligned}\right\} => d \neq 0 \; y \; w \neq 0 => z = 0$$

Por lo anterior podemos suponer, por ejemplo, que $a \neq 0$. Se debe argumentar la conveniencia de resolver los dos sistemas de ecuaciones simultáneamente, haciendo eliminación gaussiana, para concluir que $ad - bc \neq 0$, pues

$$\begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to -\frac{c}{a}F_1 + F_2]{Si\ a\neq 0,} \begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & | & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

Con un poco de esfuerzo hemos obtenido que si $ad - bc \neq 0$, entonces A tiene inversa. El número obtenido haciendo $ad - bc$ está asociado a la matriz A y recibe el nombre de determinante de *A*. Este razonamiento nos permite conectar con los determinantes en general, ver sus propiedades elementales y otros algoritmos como la Regla de Cramer o la matriz adjunta.

Ahora bien, aquí cabe una pregunta que no he planteado antes para poder señalar el camino primero. La pregunta crucial, siguiendo el **Principio de Necesidad**, es ¿por qué o para qué invertir una matriz? Es un buen punto para proponer actividades que se resuelvan con la inversa de una matriz.

La última parte de este bloque tiene menos conexión con objetos que el alumno conozca, los determinantes; por ello se propone motivarlo con la inversa de una matriz. Del contenido que aparece en currículo no queda muy claro la profundidad con la que se debe dictar este tema: “Determinantes. Propiedades elementales”. De los estándares de evaluación se puede inferir otros temas asociados que se deben estudiar: determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando determinantes (2.1); y determina condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado (2.2).

Ahora bien, hemos encontrado problemas en la PAU de la Comunidad de Madrid que pueden dar una idea del nivel de habilidad que se espera que tenga un alumno en las propiedades del determinante, aunque como dije anteriormente no se puede deducir de la información del currículo:

Junio, 2014 (coincidente) - Opción B
Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente: a. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$. b. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$. c. El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B.

5.2 Apoyo con TIC para la propuesta didáctica

Quiero presentar aquí dos oportunidades para el uso las TIC que pueden resultar útiles en la enseñanza del Álgebra lineal en Bachillerato.

5.2.1 Foro de discusión en línea

Petrov, Gyudzhenov y Tuparova (2015) presentaron los resultados de cinco experimentos realizados a nivel universitario, implementando métodos interactivos y el uso de tecnologías en un curso tradicional de Álgebra lineal, con dos horas a la semana de laboratorio. Cada contenido del currículo estaba en correspondencia con un problema práctico adaptado a métodos interactivos, incluyendo trabajo cooperativo y los foros de discusión para hacer sus deberes. En sus resultados muestran que hubo un aumento en el promedio de las calificaciones, aunque añaden que no fue capaz de ganar el interés de los estudiantes que traían calificaciones más bajas del Bachillerato en Matemáticas.

Una experiencia similar la realizamos, junto a Sabrina Garbin, en varios cursos de Álgebra Universitaria (Garbin y Olivieri, 2017). En este artículo mostramos evidencias, a través de un estudio de casos, de que los foros de discusión en línea abren un espacio adecuado para mejorar competencias de comunicación y argumentación. Los estudiantes de este estudio estaban entre los 18 y 20 años de edad y por el tipo de educación en el sistema escolar venezolano, podemos ubicarlos en la franja cognitiva llamada de transición entre el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Avanzado (PMA) (Garbin, 2005, 2015).

Una muestra de que los alumnos de 2º Bachillerato están en una franja cognitiva de cambio la podemos encontrar en los contenidos del Bloque 1 "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" con la inclusión de los siguientes contenidos:

- Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc.
- Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.
- Razonamiento deductivo e inductivo.

En ambos estudios se concluyeron que hay beneficios en el aprendizaje y que los alumnos se involucraron en la discusión de sus argumentos. Por ello proponemos utilizar esta experiencia en la discusión de problemas donde se requiera argumentar, lo que es común en problemas de la PAU como el siguiente:

Modelo A (Comunidad de Madrid). 2002
Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2+2A=I$, donde I denota la matriz identidad. a) Demostrar que A es no singular ($\det(A) \neq 0$) y expresar A^{-1} en función de A e I. b) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = p\,I + qA$. c) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

También, ambos artículos refieren que comunicarse en los foros con símbolos matemáticos puede traer, al comienzo, inconvenientes pues tienen que escribir fórmulas y símbolos sin las fuentes tipográficas adecuadas. En el caso que el editor de texto del foro no sea suficiente, proponen usar editores de Latex en línea como CodeCogs; o adjuntar documentos o fotos para complementar.

5.2.2 Sistema de Cómputo Algebraico (CAS)

Ortega (2002) en su Tesis doctoral "La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico" buscaba contribuir a las investigaciones sobre las posibilidades didácticas que los Sistemas de Cómputo Algebraico[12] proporcionan a la enseñanza. Diez años antes Hodgson y Muller (1992) ya describían en "The impact of symbolic Mathematical Systems on Mathematical Education" las posibilidades del uso de estos sistemas en la enseñanza de Matemáticas. En el libro de la UNESCO "The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching, Science and technology education", donde se publicó el artículo de Hodgson y Muller, ya se vislumbraban las posibilidades de estas herramientas. Los CAS agrupan a las calculadoras y los programas informáticos que lleven integrados tres capacidades:

- ✓ La capacidad númerica.
- ✓ La capacidad gráfica.
- ✓ La capacidad simbólica.

Estos sistemas se han multiplicado en todos estos años y están disponibles en versiones en línea que permiten usarlos sin necesidad de descargar e instalar el programa en el ordenador. Algunas formas como se pueden integrar los CAS en los cursos son (Ortega, 2002):

1. **Puede ser usado por el profesor para presentar conceptos en clases.** El profesor debe sacrificar la seguridad que le proporciona la enseñanza tradicional de las matemáticas (Hodgson y Muller, 1992) para incluir los CAS, que, a diferencia de un video o presentación, permite la intervención para adaptarse al rumbo de la clase.
2. **Como herramienta en un sistema de enseñanza asistida por ordenador**, en el que el ordenador se convierte en un elemento central en el aprendizaje.
3. **En sesiones de laboratorios de Matemáticas.** Sobre este punto, Hodgson y Muller (1992) enumeran las actividades que se pueden potenciar con ello:
    - la exploración de conceptos, con el descubrimiento de conjeturas y su posterior demostración;
    - el razonamiento inductivo;
    - la interrelación entre diferentes sistemas de representación; y

[12] En adelante usaremos CAS, por sus siglas en inglés "Computer Algebra System".

- la resolución de problemas que llevarían mucho tiempo sin en el uso de la tecnología.

Actualmente existen varios CAS disponibles en línea, como se señalaba anteriormente, que pueden ser de gran utilidad en Bachillerato como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. Su presencia en el aula deber estar planificada, tomando en cuenta algunas dificultades que pueden presentarse; entre ellas: el alumno puede perder el sentido de las operaciones que realiza, confundiendo la manipulación en estos sistemas con el conocimiento, y puede reducir las habilidades de cálculo mental, etc. Aún así, los beneficios son mayores, ya que permite múltiples representaciones, dinamismo e interactividad que pueden ser muy motivadores en el aula, con una adecuada atención a la diversidad (Ortega, 2002), lo que no se debe descuidar en ninguna etapa de la educación. Entre las conclusiones de Ortega podemos destacar que no encontró indicios de que aprender a usar CAS elegida para su estudio representara mayor problema para los alumnos. En cambio observó entre los alumnos un tipo de colaboración especial, suscitando la comprobación y contraste de resultados.

Volviendo al Álgebra lineal en Bachillerato, es difícil decidir qué CAS es el más adecuado. Según el tema a estudiar o el problema a resolver, alguna de las plataformas CAS puede funcionar mejor que otra. Por ejemplo, encontré un video muy bueno de Rafael Pérez Laserna (2015) donde se muestra cómo hacer la discusión de un sistema de ecuaciones con un parámetro apoyado en GeoGebra. Por desgracia, al intentar reproducir su experiencia, encuentro inconvenientes pues las funciones en GeoGebra han cambiado con su versión en línea y no he logrado sortear algunos de esos problemas. Así que he realizado una reflexión sobre los CAS que conozco, enumerando ventajas y desventajas para la propuesta que nos hemos planteado en este TFM.

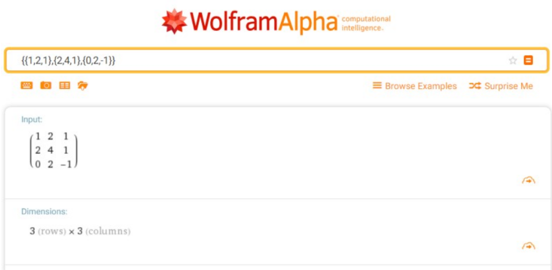
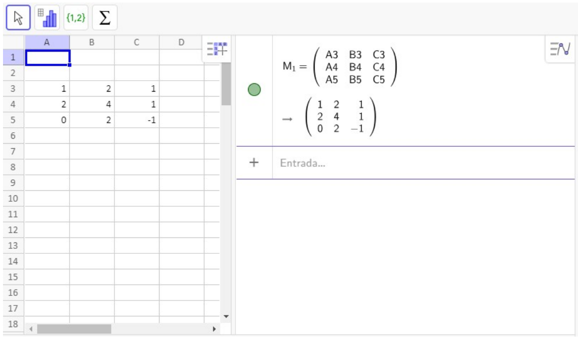
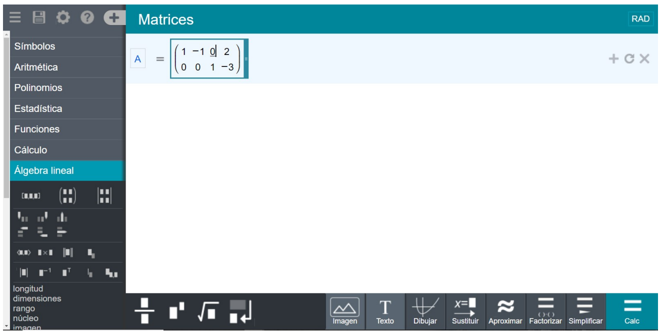
Reflexión sobre Sistema de Cómputo Algebraico (CAS) en línea

Los programas con características CAS en línea que conozco y he utilizado son: GeoGebra Classic, CalcMe y WolframAlpha, aunque este último no es exactamente un programa (ver descripción correspondiente, sobre las características generales en la siguiente tabla). Intentaré mostrar algunas de sus funciones y discutir sobre la conveniencia, o no, de cada uno, enfocada únicamente al Álgebra lineal de Bachillerato. He realizado una tabla que resume sus características según las necesidades que he tenido en el TFM para el diseño de las actividades.

	GeoGebra	CalcMe	WolframAlpha
Sitio web	https://www.geogebra.org/classic	https://calcme.com/a	https://www.wolframalpha.com/
Características generales	Tiene varios ambientes de trabajo (Vistas) que permiten tener diferentes representaciones de forma simultáneas. Entre las Vistas que nos interesan están: algebraica, CAS, gráfica 2D, gráfica 3D y hoja de cálculo.	Tiene área principal de trabajo con un menú a la izquierda con los comandos. En cada línea se coloca un instrucción. Para graficar se abre una ventana con la representación que se pide.	Es un buscador de respuestas. Cuando se pone una pregunta se presenta una lista de respuestas que pueden tener varias presentaciones.
Comandos	Al colocar una palabra (en español) de lo que se quiere hacer aparece una lista de comandos similares, permitiendo elegir el que necesitamos.	Los comandos están en español. El menú los agrupa por temas.	Al escribir una palabra (en inglés) sobre lo que se quiere hacer se abre una lista de opciones que pueden ayudar a encontrar lo que se busca.
Introducción de las matrices	Se definen como lista o con la hoja de cálculo.	La entrada de las matrices se hace con plantillas que son bastante intuitivas.	Las matrices se introducen como lista.
Gráficas en el espacio	La representación en el espacio es muy buena y se puede girar.	Lo genera, pero es una imagen plana y cuando se intenta rotar no se percibe la tercera dimensión.	Puede representar un plano, pero cuando se pide la intersección de dos (solución de un SEL 2×2) no proporciona la representación gráfica.
Cálculos con parámetros	Permite definir deslizadores, adecuado para los problemas con parámetros.	Permite el lenguaje simbólico en los elementos de las matrices.	El lenguaje simbólico es versátil y permite cálculo con matrices o SEL con parámetros mostrando directamente la solución.
Otras dificultades	Solo admite un parámetro en una matriz y sólo funciona si se usa la x en su lugar. Cuando se quiere usar combinado con la versión gráfica se puede prestar a confusión para los alumnos, porque en efecto se representa al escribirlo.		La solución puede no ser la primera que se presenta y hay que saber cómo luce para encontrarla entre todas las opciones obtenidas.

Ejemplos de cómo definir una matriz:

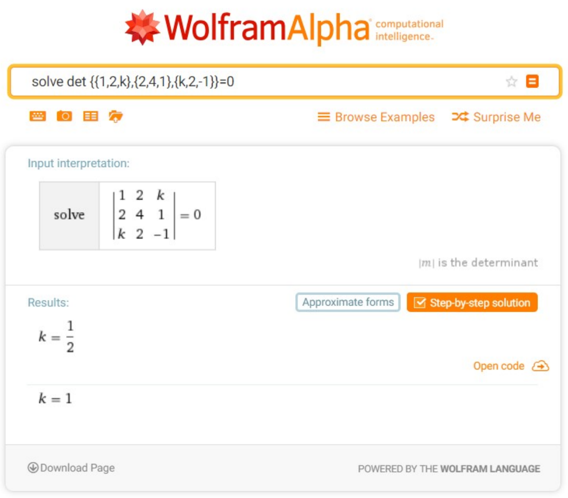
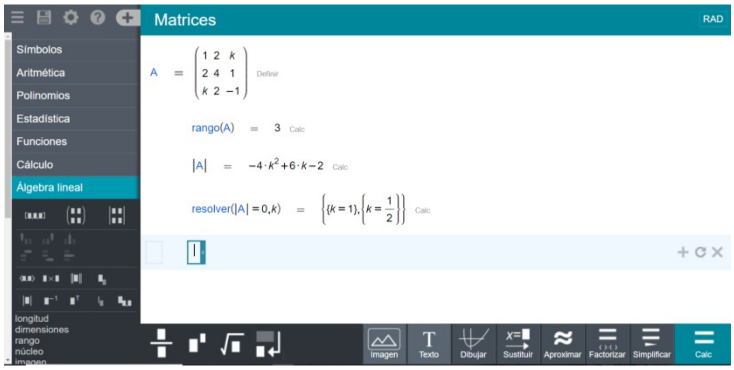
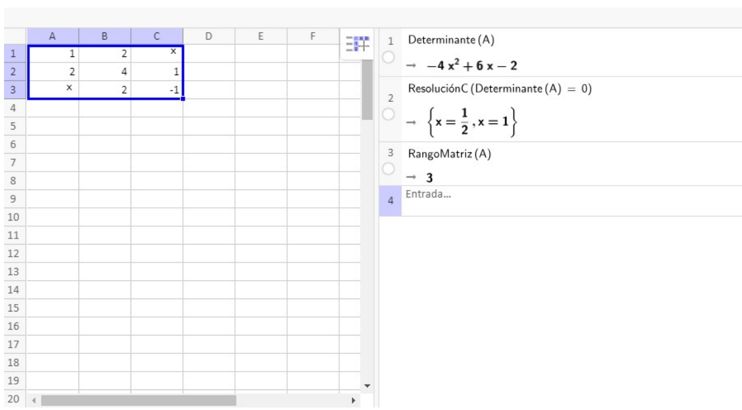
Lo cierto es que para introducir las matrices, es CalcMe la que tiene la interfaz más intuitiva, donde una matriz luce como se presenta en los libros y no como una lista. En WolframAlpha debemos poner $\{\{a_{11},a_{12},a_{13}\},\{a_{21},a_{22},a_{23}\},\{a_{31},a_{32},a_{33}\}\}$, mientras que con GeoGebra se puede definir desde un arreglo en la hoja de cálculo, seleccionando las entradas y pinchando en el comando del menú superior o con el botón derecho; o escribiendo la lista en la Vista Algebraica.

WolframAlpha	
GeoGebra Classic	
CalcMe	

Una vez que las matrices están definidas, los tres programas que estamos estudiando trabajan de forma muy intuitiva y permiten hacer operaciones entre ellas o calcular determinantes y rangos.

Ejemplos sobre parámetros en una matriz:

Sobre los cálculos con parámetros vuelve CalcMe a funcionar mejor. En la siguiente tabla se presentan las respuestas obtenidas cuando se intenta calcular los valores de k para los que un determinante 3×3 es 0. Las tres plataformas responden que el rango de la matriz es 3, lo cual no es cierto para los dos valores de k encontrados.

WolframAlpha	
GeoGebra Classic	
CalcMe	

Conclusiones

- Para el trabajo individual de los alumnos, considero que CalcMe es más intuitiva, pues se asemeja más a la notación a la que están acostumbrados. Puede proporcionar autonomía para resolver problemas, convirtiéndolo en una buena opción para usar en el aula.
- Las representaciones de las Vistas simultáneas en GeoGebra son muy buenas, aunque la Vista CAS no permite la manipulación de parámetros (diferente a la x)

dentro de matrices. Para la representación espacial, GeoGebra es la mejor opción.

- Con WolframAlpha se obtienen las respuestas a problemas de matrices o SEL con un parámetro directamente. En general, funciona más rápido y es cómodo para trabajar con lenguaje simbólico, proporcionando orientación para solventar los errores que detecta. Sin embargo, se deben escribir las instrucciones en inglés y hay que tener criterio para seleccionar la información que es útil entre todas las que se proporcionan.

6 Propuesta didáctica

La siguiente propuesta didáctica está compuesta de 5 actividades para profundizar sobre Álgebra Lineal, acompañada con un recurso de apoyo en línea para la discusión de problemas. Con este diseño se busca atender las dificultades descritas y analizadas en el diagnóstico.

Comenzaremos con la descripción del recurso, la manera de implementarlo y ejemplos; haremos reflexiones sobre las ventajas y dificultades que se pueden presentar al ponerla en práctica en el bloque de Álgebra.

6.1 Foro de discusión en línea

Consideraciones previas

El foro de discusión en línea es un recurso disponible en diferentes entornos virtuales de aprendizaje que permite a los alumnos la comunicación de forma asincrónica (Mora, 2011). Por nuestra experiencia se propone usar Moodle, pero se puede replicar en cualquier Sistema para la Gestión del Aprendizaje autorizado por el Centro, que cuente con un foro en línea. Este foro debe ser privado, con acceso solo para los alumnos del curso y el profesor.

Objetivos

- Plantear un espacio de discusión con problemas para desarrollar la comunicación escrita de los argumentos y lenguaje simbólico.
- Desarrollar y cultivar autonomía en los razonamientos, curiosidad e indagación, así como la revisión crítica de los argumentos.

Competencias clave

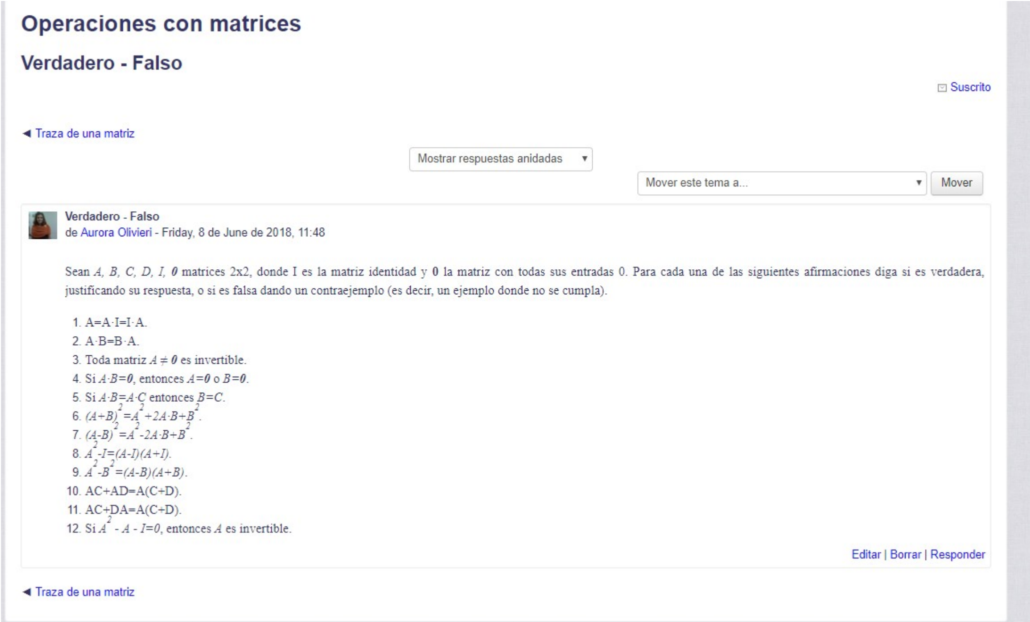
Además de ser un espacio para desarrollar la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología, que son centrales en nuestra asignatura, el uso del foro contribuye en el desarrollo de otras competencias clave: comunicación lingüística; competencia digital; aprender a aprender; competencias sociales y cívicas; y sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

Descripción

- Es un recurso de apoyo a la labor del profesor en el aula.
- Se destina como un espacio de práctica voluntario y no calificado, organizado con la misma estructura del temario.
- El profesor actúa como moderador del foro. En ese rol tiene varias tareas, similares a las que hace en una clase; como lo son orientar las aportaciones para alcanzar el objetivo; y corregir o concluir algún problema, cuando sea el caso. En el proceso se integra la evaluación no para calificar, sino para aprender de ella.
- Cada problema se propone como un Tema del foro, que en general inicia el profesor pero puede ser iniciado también un alumno.
- Los problemas se pueden tomar de diferentes fuentes, por ejemplo: del libro, de los modelos de la PAU, dudas de clase que necesiten una justificación, etc.

Hemos seleccionados dos ejemplos para mostrar el tipo de problemas que podemos colocar en estos foros. En Moodle se ha abierto un foro de nombre "Operaciones con matrices" y se han propuesto dos problemas, en sendos Temas con el título elegido para cada uno.

El primer Tema del foro, de nombre “Verdadero-Falso”, contiene una lista de afirmaciones con las instrucciones que se debe seguir para su justificación. No se espera que un solo alumno justifique todos, sino que lo resuelvan entre varios alumnos. También se puede presentar una afirmación a la vez y cuando este se haya resuelto, se le propone la siguiente.



Operaciones con matrices

Verdadero - Falso

Suscrito

◄ Traza de una matriz

Mostrar respuestas anidadas

Mover este tema a... Mover

Verdadero - Falso
de Aurora Olivieri - Friday, 8 de June de 2018, 11:48

Sean $A, B, C, D, I, \mathbf{0}$ matrices 2x2, donde I es la matriz identidad y **0** la matriz con todas sus entradas 0. Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera, justificando su respuesta, o si es falsa dando un contraejemplo (es decir, un ejemplo donde no se cumpla).

1. $A=A \cdot I=I \cdot A$.
2. $A \cdot B=B \cdot A$.
3. Toda matriz $A \neq \mathbf{0}$ es invertible.
4. Si $A \cdot B=\mathbf{0}$, entonces $A=\mathbf{0}$ o $B=\mathbf{0}$.
5. Si $A \cdot B=A \cdot C$ entonces $B=C$.
6. $(A+B)^2=A^2+2A \cdot B+B^2$.
7. $(A-B)^2=A^2-2A \cdot B+B^2$.
8. $A^2-I=(A-I)(A+I)$.
9. $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.
10. $AC+AD=A(C+D)$.
11. $AC+DA=A(C+D)$.
12. Si $A^2 - A - I=0$, entonces A es invertible.

Editar | Borrar | Responder

◄ Traza de una matriz

El segundo Tema que aparece, al que hemos llamado “Traza de una matriz”, fue tomado de un modelo de PAU de la Comunidad de Madrid y se coloca la referencia para motivarlos a participar. Estos problemas se pueden encontrar resueltos fácilmente, por ello el profesor debe hacer comentarios que ayude al alumno, que presenta una solución, a profundizar en sus argumentos para conseguir un aprendizaje significativo.

Operaciones con matrices

Traza de una matriz

Suscrito

Verdadero - Falso ►

Mostrar respuestas anidadas

Mover este tema a... Mover

Traza de una matriz
de Aurora Olivieri - Friday, 8 de June de 2018, 02:14

Junio 2000 (Opción A)

Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas .

a. Comprobar que se verifica: $Traza(A+B)=Traza(A) + Traza(B)$

b. Comprobar que $Traza(A \cdot B)=Traza(B \cdot A)$

c. Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB-BA=I$, donde I denota la matriz identidad.

Editar | Borrar | Responder

Verdadero - Falso ►

Sugerencias

- Hacer una sesión sobre cómo se utiliza el foro o dejar en el aula virtual un documento o video con las instrucciones más relevantes para sacarle el mayor provecho a este recurso.
- Llevar una discusión en el aula sobre el trabajo en los foros, para motivar a los alumnos a que participen.
- Colocar problemas de diferentes niveles de dificultad.
- Todos los foros pueden quedar disponibles el tiempo que se considere necesario, de forma que los alumnos puedan revisar o completar un ejercicio después de terminado el bloque.

Ventajas

- Se comparte todo lo que se discute en estos foros y queda disponible para futuras consultas.
- Es participativo y motivador, además de propiciar el trabajo colaborativo.
- El error forma parte real del aprendizaje. En este caso se va corrigiendo cada ejercicio a la vez, con una discusión sobre los argumentos más adecuados, sin la presión de la calificación.
- Al poder responderlo cuando se quiera, el alumno tiene tiempo de ordenar sus argumentos.

Dificultades

- **Que el foro tenga poca participación.** Por ello hay que motivar a los alumnos para que participen. Se puede hacer conexión con el trabajo del aula y destinar 5 minutos al comienzo de cada clase para comentar los avances que se han tenido o retos que aún quedan pendientes.
- **Que los alumnos tengan dificultades para escribir los símbolos y la notación matemática.** Algunos consejos para sortear estos inconvenientes se consiguen en (Petrov et al., 2015; Garbin y Olivieri, 2017); entre ellos usar editores en línea de latex, y adjuntar documentos o fotos.
- Pueden existir **limitaciones para acceder al aula virtual** pues no todos los alumnos cuentan con conexión de internet u ordenador para realizar estas tareas fuera del horario escolar. Si el Centro no cuenta con un laboratorio de ordenadores que los

alumnos puedan visitar fuera del horario de clase se puede sugerir el uso de las Bibliotecas Públicas de la Comunidad de Madrid.

6.2 Actividades

En esta sección se desarrollan las cinco actividades propuestas. Cada una se presentará siguiendo la siguiente estructura:

.- Motivación: Una pequeña introducción de dónde sale la actividad.

.- Descripción de la Actividad: Se presentará una tabla que contiene los objetivos, el contenido asociado y la descripción de su desarrollo, entre otros datos de la actividad.

.- Discusión propuesta para el aula: En el caso que la actividad esté asociada a un contenido se esbozará una propuesta para la discusión en el aula.

.- Recomendaciones: Algunas recomendaciones para su aplicación o posibles adaptaciones.

Lo materiales específicos de cada una de la actividades se pueden encontrar en el Anexo 2.

6.2.1 Introducción al Método de Gauss

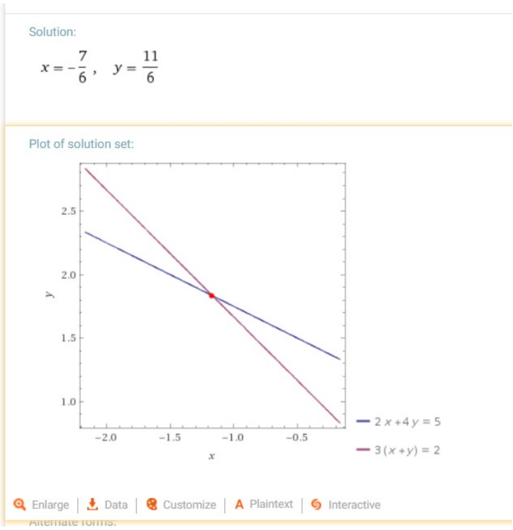
Motivación: Siguiendo el **Principio de Concretitud**, se quiere establecer una conexión entre los métodos enseñados en 2ºESO para resolver los sistemas 2×2 y el Método de Gauss. Para conseguir ese puente, se ha planteado una actividad en la que el alumno pueda reflexionar sobre las operaciones elementales y cómo estás modifican un SEL y su conjunto de soluciones.

Descripción de la Actividad:

Nombre	**Introducción al Método de Gauss**
Sesión de fase	Inicial
Lugar	Aula
Duración	25 minutos
Recursos	Proyector, lista de sistemas.
Contenido	Métodos de Gauss. (Operaciones elementales)
Objetivos	Comprobar (convencerse) que las operaciones elementales no cambian el conjunto de soluciones

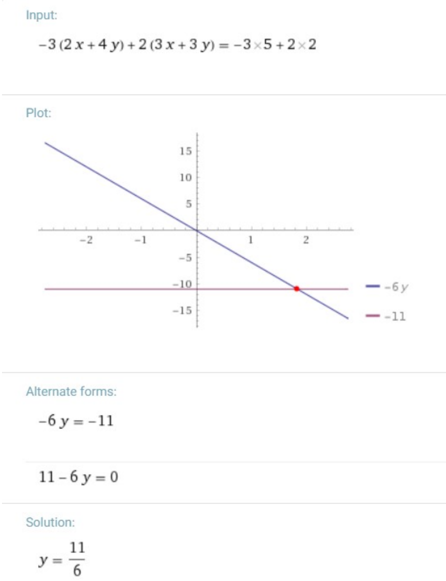
Desarrollo: Primera Parte: A cada alumno se le da un sistema de ecuaciones 2x2 diferente (ver lista en el Anexo 2). Son sistemas equivalentes y todos deben llegar a la misma respuesta. Segunda Parte: El profesor propone la discusión sobre las operaciones elementales.

Discusión propuesta para el aula: Se les ha pedido que resuelvan un sistema equivalente a $\begin{cases} 2x + 4y = 5, \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$. Hagamos una revisión gráfica con apoyo de WolframAlfa. Cuando se copian las dos ecuaciones se obtiene:



Recordemos el *método de reducción*: A partir de: $2x + 4y = 5$, $3x + 3y = 2$ se calcula, por ejemplo:

$$-3(2x + 4y) + 2(3x + 3y) = -3 \times 5 + 2 \times 2 \quad => \quad -6y = -11$$



Con $y = \frac{11}{6}$, lo que hacemos es calcular con una de las dos ecuaciones el valor de la *x*.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ \quad y = \frac{11}{6} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 3x + 3y = 2 \\ \quad y = \frac{11}{6} \end{cases}$$

Hemos cambiado una ecuación por $y = \frac{11}{6}$.

En general, si (x_0, y_0) es una solución del sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$

Entonces (x_0, y_0) será solución de cualquier ecuación que se obtenga de hacer una combinación lineal de ellas dos, pues

$$a(2x_0 + 4y_0) + b(3x_0 + 3y_0) = a \times 5 + b \times 2$$

A partir de aquí se puede deducir con los alumnos cuáles son las operaciones (elementales) que podemos hacer a un sistema de ecuaciones y que no cambie su conjunto de soluciones. Seguido a esta discusión introducir el Método de Gauss en general.

Recomendaciones:

- Se recomienda hacerlo en una sesión de fase inicial donde se presente el Método de Gauss sin usar la notación matricial.
- Como sirve de conexión entre los sistemas 2x2 y el Método de Gauss, puede ser utilizada en 1º de Bachillerato con el mismo objetivo.

6.2.2 El Álgebra lineal y el procesamiento digital de imágenes

Motivación: La siguiente actividad busca mostrar otro contexto donde las matrices y sus operaciones nos ayudan a representar y resolver problemas, sin necesidad de estar resolviendo SEL. Es una actividad de aprendizaje a partir de problemas que puede ser utilizada para enseñar las operaciones elementales en el álgebra de Matrices.

El tratamiento de la imagen es unos de los problemas de ejemplo del libro Éduscol (2012). En esta actividad, se ha ampliado a las imágenes a color y adaptado con algunas ideas encontradas en "El álgebra lineal y el procesamiento digital de imágenes" (Anibal, 2016). Esta ampliación nos permite presentarles a los alumnos un problema dónde la inversa de una matriz nos proporciona información, respondiendo a la pregunta planteada sobre la necesidad de invertir una matriz (**Principio de Necesidad**).

Descripción de la Actividad:

Nombre	**El álgebra lineal y el procesamiento digital de imágenes**
Sesión de fase	Desarrollo
Lugar	Laboratorio de Ordenadores o Aula
Duración	55 minutos
Contenido	• Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. • Operaciones de matrices.
Objetivos	Realizar operaciones de matrices asociadas a un modelo real y analizar estas acciones en ese modelo.
Desarrollo: El profesor expone detalles sobre las imágenes en blanco y negro, en escala de grises y a color (Anexo 2). Se les asignarán ejercicios a los alumnos.	

Discusión propuesta para el aula: La discusión de esta actividad es llevada por el profesor siguiendo los diferentes ejemplos.

Recomendaciones:

- Se pueden añadir otros ejercicios con matrices binarias, experimentando con ClacMe y las herramientas Image Binarizer y Binary Image Creator (dCode, 2018). Ejemplo: hacer la transpuesta de una matriz binaria y revisar el efecto sobre la imagen; estudiar otras simetrías en la imagen; etc.
- Se puede extender la explicación de los pixeles en modo RGB, hablando de los números en base 256 de tres dígitos:

(a,b,c) se representa como $a \cdot 256^2 + b \cdot 256 + c$; con $0 \leq a, b, c < 256$.

Esto permite convertir un vector en un número entero y se puede discutir cómo se recupera cada una de las componentes de este vector si se tiene un número entero. Se pueden realizar preguntas adicionales sobre las cotas para el número entero o cuántos colores diferentes se puede tener con este formato.

- Esta actividad se puede realizar en el aula con el apoyo de un proyector. Al seleccionar matrices se deben elegir de tamaños pequeños para que sean fáciles de operar, si se considera necesario se puede usar la calculadora para los cálculos más complicados.

6.2.3 Movimientos en el plano

Motivación: Dada una matriz cuadrada invertible, A, se puede resolver cualquier SEL asociado a ella, digamos que queremos resolver $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$, donde A^{-1} es la inversa de A. Se observa de $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ que cada uno de estos sistemas tiene solución única y por lo tanto es compatible determinado. Si lo central de las matrices fuera resolver SEL, ya tenemos un algoritmo que resuelve este problema y encuentra la solución, el Método de Gauss. ¿Por qué estudiar el álgebra de Matrices?

Las matrices son funciones lineales entre espacios vectoriales, y ese es uno de los motivos para estudiarlas. Además, esa correspondencia es uno a uno, es decir una transformación lineal (entre espacios de dimensión finita) está representada por una matriz. Entonces multiplicar matrices es una composición entre funciones (transformaciones lineales). En esta actividad queremos mostrar los movimientos en el plano que son transformaciones lineales de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$.

La actividad está motivada por la aplicación del mismo nombre que aparece en el libro de Hernández et al. (2002) y está diseñada para profundizar en contenidos a partir de problemas. Mostraremos a los alumnos las herramientas incluidas en GeoGebra que permiten hacer estos movimientos y haremos comparaciones con la transformación lineal definida por la matriz correspondiente. Se complementará todo este trabajo con dos recursos creados por Melbapplets (2014) y Matheagle (2018).

Descripción de la Actividad:

Nombre	**Movimientos en el plano**
Sesión de fase	Desarrollo
Lugar	Laboratorio de ordenadores
Duración	55 m
Contenido	• Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. • Operaciones de matrices. • Matriz inversa.
Objetivos	Realizar operaciones de matrices asociadas a los movimientos en el plano y analizar estas acciones en ese modelo.
Desarrollo: El profesor expone sobre los diferentes movimientos en el plano (Anexo 2) y presenta ejercicios en GeoGebra para experimentan sobre las acciones de estos movimientos.	

Discusión propuesta para el aula: La discusión de esta actividad es llevada por el profesor siguiendo los diferentes ejemplos.

Recomendaciones:

- Problemas para el foro:
  - Dada la matriz:

$$G_{45°} = \begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{pmatrix},$$

    encuentre un número natural n tal que $G_{45°}{}^{n} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
  - Demuestre que si A y B son matrices cuadradas invertibles, entonces AB también es invertible y su inversa es $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- Esta actividad se puede hacer demostrativa, es decir que el profesor sea el que maneje el GeoGebra y use el proyector para que lo vean los alumnos.

6.2.4 Invertir una matriz con el determinante y el desarrollo de Laplace

Motivación: La regla de Sarrus es un método fácil de memorizar y muy usada cuando se comienza a calcular determinantes, pero como es por todos conocido solo funciona en matrices 3×3. La siguiente actividad sirve para introducir el desarrollo de Laplace de los determinantes y a la vez calcular la inversa de la matriz por la adjunta. Esta actividad es una adaptación de los métodos interactivos para enseñar Álgebra lineal recogidos en Petrov et al. (2015) y está basada en el siguiente resultado: sea A una matriz cuadrada, entonces $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A)\, I_n$.

Una parte del trabajo en esta actividad, el cálculo de la adjunta, es colaborativo mientras que la segunda parte busca la discusión de posibles propiedades que de la adjunta de A con la inversa con CalcMe.

Descripción de la Actividad:

Nombre	**Invertir una matriz con el determinante y el desarrollo de Laplace**
Sesión de fase	Desarrollo
Lugar	Laboratorio de Ordenadores
Duración	55 minutos
Contenido	Determinantes. Matriz inversa (por adjunta).
Objetivos	• Deducir el desarrollo de Laplace para calcular determinante. • Comprobar que el desarrollo de Laplace se puede hacer por cualquier fila o columna con el mismo resultado. • Deducir la fórmula de la adjunta de una matriz.

Desarrollo:

El trabajo está diseñado para un grupo de 25 alumnos. Se le dará una matriz 5x5 para trabajar en CalcMe. A cada alumno se le asigna un posición en la matriz con un par (i,j) con i,j entre 1 y 5.

Primera parte:

Cada alumno calcula el menor de la posición asignada siguiendo las instrucciones del tutorial del Anexo 2. Se pone en común la información de los 25 Menores en la pizarra o proyector, todos copian en su ordenador una nueva matriz 5x5 de nombre AdjM.

Segunda parte:

Saquemos conclusiones sobre la información contenida en AdjM.

A. Se reparte entre los alumnos el siguiente trabajo:

Desarrollo de Laplace por fila *i:*

$$M_{i,1}*AdjM_{i,1}+ M_{i,2}*AdjM_{i,2}+ M_{i,3}*AdjM_{i,3}+ M_{i,4}*AdjM_{i,4}+ M_{i,5}*AdjM_{i,5}$$

Desarrollo por la Columna *j*:

$$M_{1,j}*AdjM_{1,j}+ M_{2,j}*AdjM_{2,j}+ M_{3,j}*AdjM_{3,j}+ M_{4,j}*AdjM_{4,j}+ M_{5,j}*AdjM_{5,j}$$

(Ver Anexo 2 para las instrucciones necesarias en CalcMe.)

B. Cálculo de la inversa: Proponga la siguiente operación: $M*(AdjM)^T$ C. (Opcional) Compruebe que la AdjM está bien calculada: $(\lvert M\rvert*M^{-1})^T$ Obtenga con sus alumnos las conclusiones que considere.

<u>Discusión propuesta para el aula</u>:

Esta actividad nos permite sacar varias conclusiones como que el desarrollo de Laplace se puede hacer por cualquier fila o columna.

$$|M|=M_{i,1}*AdjM_{i,1}+M_{i,2}*AdjM_{i,2}+M_{i,3}*AdjM_{i,3}+M_{i,4}*AdjM_{i,4}+M_{i,5}*AdjM_{i,5}=$$
$$M_{1,j}*AdjM_{1,j}+M_{2,j}*AdjM_{2,j}+M_{3,j}*AdjM_{3,j}+M_{4,j}*AdjM_{4,j}+M_{5,j}*AdjM_{5,j}$$

Es un buen momento para discutir con ellos cuál es la fila o columna que involucra menos cálculos.

Cuando se ha calculado $M*(AdjM)^T$ se obtuvo una matriz con $|M|$ en su diagonal.

$$M \cdot AdjM^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Calc

Esto nos permite concluir que si hacemos $\frac{1}{|M|}.(AdjM)^T$ tendremos la inversa: M^{-1}. Además les podemos enseñar que se puede verficar si los cálculos de la adjunta los hemos hecho bien haciendo $(|M|*M^{-1})^T$:

$$|M| \cdot M^{-1^T} = \begin{pmatrix} 20 & 3 & -8 & -3 & -9 \\ -50 & -12 & 22 & 22 & 26 \\ -10 & -6 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 10 & 2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Calc

Recomendaciones:

- Si los alumnos tienen conocimiento de programación se puede adaptar algunos cálculos para hacerlos más cortos, por ejemplo:

```
D = 0   Definir

para i en 1..5 hacer
D = D + M_{i,1} · AdjM_{i,1}
fin                      = 10   Calc
```

- Ejercicios para el foro:
    - Deducir una expresión para el determinante de AdjA en términos de |A| para matrices 2x2.
    - Sea A una matriz 3x 3. Si A es antisimétrica, es decir A^t= -A, calcula su determinante.
- Se puede aprovechar la oportunidad para señalar lo que sucede al multiplicar la fila *i*-ésima de M con la columna *j*-ésima de $(AdjM)^T$, cuando $i \neq j$, a lo que podemos sacarle más información en la siguiente sesión para introducir las propiedades de los determinantes.

$$\boxed{M_{1,1}*AdjM_{2,1}+M_{1,2}*AdjM_{2,2}+M_{1,3}*AdjM_{2,3}+M_{1,4}*AdjM_{2,4}+M_{1,5}*AdjM_{2,5}=0}$$

También se podría extender esta actividad con una sesión donde los alumnos modifiquen matrices y calculen su determinante, para deducir las propiedades del determinante. Por supuesto, las modificaciones deben ser guiadas para que no se distraigan del objetivo. En esa misma línea, se pueden proponer para el foro que los alumnos completen las demostraciones más elementales de estas propiedades.

6.2.5 Discusión de un SEL con un parámetro apoyado con GeoGebra

Motivación: La conexión entre los sistemas de ecuaciones 3×3 y su representación geométrica es difícil de conseguir en el aula como hemos observado a lo largo del TFM. Según nuestra revisión, encontramos dos factores que lo condiciona, el primero es el orden de los temas como aparecen en el currículo y la segunda es la PAU, para la que se preparan con la memorización de algoritmos y la resolución de problemas modelos.

Esta actividad es una adaptación del video de Pérez Laserna (2015) al que nos referimos anteriormente. Se han hecho unas pocas modificaciones para adaptarla a la versión en línea y se ha cambiado el orden de la presentación de algunos comandos, porque lo hemos considerado más acorde a la presentación de los contenidos dado en esta propuesta.

Descripción de la Actividad:

Nombre	**Discusión de un SEL con un parámetro apoyado con GeoGebra**
Sesión de fase	Síntesis
Lugar	Laboratorio de ordenadores
Duración	55 m
Contenido	• Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. • Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.
Objetivos	• Enseñar al alumno a representar un SEL 3×3, con un parámetro, en GeoGebra. • Analizar las soluciones del SEL para diferentes valores del parámetro y su representación en el espacio.
Desarrollo: El profesor expone sobre la secuencia de comandos de GeoGebra para representar el SEL propuesto (Anexo 2).	

Discusión propuesta para el aula: La discusión de esta actividad es llevada por el profesor siguiendo el procedimiento.

Recomendaciones:

- Se debe reservar un espacio para que el alumno resuelva un problema adicional de forma autónoma utilizando GeoGebra. En este problema se van tomando decisiones mientras se consiguen los resultados con el programa, es por ello que el alumno debe realizar el procedimiento de forma individual para que pueda identificar esos puntos en el proceso.

6.3 Consideraciones finales sobre esta propuesta

Todas las actividades que se han diseñado para el laboratorio de ordenadores se pueden adaptar a una clase demostrativa donde el profesor es el único que realiza la manipulación de los problemas y utiliza el proyector para compartir el proceso con los alumnos. En este caso, recomendamos proponer algunos problemas como deberes y abrir un espacio en el foro para comentar los resultados.

Quiero citar a Young (1986) que escribió:

> (...) we are participating in a revolution in mathematics as profound as the introduction of Arabic numerals into Europe, or the invention of the calculus. Those earlier revolutions had common features: hard problems became easy, and solvable not only by an intellectual elite but by a multitude of people without special mathematical talents; problems arose that had not been previously visualized, and their solutions changed the entire level of the field.

Se refería Gail S. Young (1915-1999), hace más de treinta años, al ordenador personal como herramienta vislumbrando la revolución que traería al avance de las matemáticas.

Debe equilibrarse en el aula la comprensión de cómo y por qué funcionan algunos algoritmos y a la vez, enseñar a usar herramientas que hagan esos cálculos. Esta capacidad para decidir cuál es el recurso informático más adecuado aparece repetidas veces en el bloque de "Proceso, métodos y actitudes en Matemáticas".

Como observé en las conclusiones de la Memoria de las prácticas del módulo específico, los alumnos han cambiando y, a mi parecer, le dan menos valor a la acumulación de conocimiento porque están convencidos que lo pueden conseguir en internet cuando la necesiten. Cuentan con una gran cantidad de información disponible y debemos cambiar la manera cómo le mostramos los conocimientos, ayudándoles a desarrollar, entre otras, las competencias clave aprender a aprender y la digital.

7 Conclusiones

Se ha realizado un análisis al proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra lineal en 2º Bachillerato de la Modalidad de Ciencias. Esta reflexión nos permitió realizar un diagnóstico y fijar acciones que nos permitieron proponer una propuesta didáctica que atendiera la problemática detectada.

La propuesta plantea la creación y gestión de un foro de discusión en línea para que los alumnos resuelvan problemas que requieran destrezas en argumentación y comunicación con el lenguaje matemático.

Además, contiene cinco actividades diseñadas para fundamentar conceptos complejos del tema, proporcionar ejemplos donde las matrices sirven para resolver problemas e integrar herramientas informáticas de Sistemas de Cómputo Algebraico como apoyo a estos temas.

- Las actividades "El álgebra lineal y el procesamiento digital de imágenes" y "Movimientos en el planos", sirven para mostrar contextos dónde las matrices ayudan a resolver problemas.
- Para realizar la conexión entre los sistemas de ecuaciones y su representación geométrica en el caso 3×3, se presentó la actividad "Discusión de un SEL con un parámetro apoyado con GeoGebra".
- Las actividades "Introducción al Método de Gauss" e "Invertir una matriz con el determinante y el desarrollo de Laplace" están pensada siguiendo los tres principios de Harel (2000), necesarios para fundamentar los conceptos que serán desarrollados en el primer año de universidad.

8 Referencias

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V., Sanz, L., … Sada, M., (2016), *Savia, Matemáticas II, 2 Bachillerato*, España: Fundación Santa María-Ediciones SM.

Andreoli, D. (2009). *Análisis de los Obstáculos en la Construcción del Concepto de Dependencial Lineal de Vectores en Alumnos de Primer Año de la Universidad* (Tesis de Maestría). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Anibal (23 de septiembre de 2016). El álgebra lineal y el procesamiento digital de imágenes, Partes I, II y III [Mensajes en un blog]. Nibcode Solutions. Recuperado de http://www.nibcode.com/es/blog/12/algebra-lineal-y-el-procesamiento-digital-de-imagenes-parte-I

Boal, N., Bueno, C., Leris, M.D., y Sein-Echaluce M.L. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las Pruebas de Acceso a la Universidad. Un estudio en varias universidades públicas españolas. *Revista de Investigación Educativa, 62* (1), 11-23. Recuperado de http://revistas.um.es/rie/article/view/94081/90711

BOCM-Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. BOCM del 20 de mayo de 2015.

BOCM-Decreto 52/2015, de 21 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato. BOCM del 22 de Mayo de 2015.

BOE-Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

BOE-Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE del 10 de Diciembre de 2013.

BOE-Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE del 3 de Enero de 2015.

BOE-Real Decreto-ley 5/2016, de 9 de diciembre, de medidas urgentes para la ampliación del calendario de implantación de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

BOE-Orden ECD/42/2018, de 25 de enero, por la que se determinan las características, el diseño y el contenido de la evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad, las fechas máximas de realización y de resolución de los procedimientos de revisión de las calificaciones obtenidas, para el curso 2017/2018.

BOEN- nº 8 (13 de octubre 2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique (Annexe). Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011. Ministère de l'Éducation nationale. Francia. Recuperado de http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

CalcMe (mayo 2018). Recuperado de https://calcme.com/a

Colera, J., y Oliveira, M. (2009), *Matemáticas II 2ºBachillerato*, Madrid, España: Anaya Educación.

Cárcamo, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemáticas para el conjunto generador y espacio generado* (tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2017/hdl_10803_458629/acb1de1.pdf

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., y Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *College Mathematics Journal, 24* (1), 41-46.

CodeCogs (2001-2015). Recuperado de http://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php

dCode (mayo 2018). Herramientas: Image Binarizer y Binary Image Creator en Image in Binary 0 1. Recuperado de https://www.dcode.fr/binary-image

De León, M. (2007). Las Matemáticas españolas en su encrucijada. *ARBOR. Ciencia, Pensamiento y Cultura*, *725*, 341-346.

Day, J., y Kalman, D. (2001), Teaching linear algebra: Issues and resources, *College Mathematics Journal, 32*, 162–168.

Dorier, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., y Rogalsiu, M. (2000). Parte II- Chapter 1 The Obtacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. (pp. 85-124). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic publishers.

Dorier, J.-L. (2002).Teaching Linear Algebra at University. *ICM, III*, 1–3. Recuperado de https://arxiv.org/pdf/math/0305018.pdf

Dorier, J.-L. (2016). Duality between formalism and meaning in the learning of linear algebra. In: R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, H.-G. Rück. *Didactics of Mathematics in HigherEducation as a Scientific Discipline*. Kassel, Germany: Universitätsbibliothek Kassel.

Éduscol (2012). *Matrices - Ressources pour faire la classe en mathématiques au lycée. Mathématiques Série S, Enseignement de spécialité*. Ministère de l'Éducation nationale. Francia. Recuperado de http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/20/8/LyceeGT_ressources_SpeMath_Matrices_218208.pdf

Game3Dover (13 de enero de 2015). Como cambiar de cámara en unity3d (Cámara Orbital) [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=oH1fdZQTuAk

Gámez, J., Marín, S., Martín, A., Pérez, C., y Sánchez, D. (2016), *Matemáticas II Serie Resuelve 2 Bachillerato Saber Hacer*. España: Santillana Educación, S.L.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (2), 137-153.

Garbin, S. (2015). Investigar en pensamiento matemático avanzado. En J. Ortiz y M. Iglesias (Eds.), *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 137-153). Maracay, Venezuela: Universidad de Carabobo.

Garbin, S. y Olivieri, A. (2017). Una experiencia sobre el uso del foro online en cursos de álgebra universitaria: una posibilidad para favorecer las competencias de comunicación y argumentación. Por aparecer en las *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Madrid- España.

GeoGebra Classic (Mayo 2018). Recuperado de https://www.geogebra.org/classic

Harel, G. (1989). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11* (2), 139-148.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach highschool students basic notions in linear algebra. *International Journal for Education in Science and Technology*, *21* (3), 387-392.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. (pp. 177-189). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic publishers.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior, 46*, 69-95.

Hernández, E., Quirós, A., y Tarrés, J. (2002). *Euler 2 matemáticas: Bachillerato : Ciencias de la naturaleza y de la salud/Tecnología*. Madrid: Ediciones SM.

Herrero, H., y Solares, C. (2017). Enseñanza práctica del concepto de espacio vectorial mediante resolución de problemas. Por aparecer en las *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Madrid- España.

Hodgson, B., y Muller, E. (1992) The impact of symbolic Mathematical Systems on Mathematical Education. En B. Cornu y A. Ralston (Ed.), *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching, Science and technology education*, *44*, (pp. 93-107). Paris, Francia: UNESCO. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0009/000937/093772eo.pdf

Knill, O. (2014) When was Matrix Multiplication invented? Recuperado de http://www.math.harvard.edu/~knill/history/matrix/

Martínez, I., Almazán, J., Lentini, M.L., Lentini, M.C., y Hernán, C. (2013). Estudio y Análisis de dificultades detectadas en el tema “Ecuaciones con parámetros- Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros”. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo, Uruguay.

Matheagle (13 de febrero de 2018). Linear transformation. Recurso para GeoGebra. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/vC3EffcJ

Melbapplets (17 de julio de 2014). Linear transformations and eigenvectors in 2D. Recurso para GeoGebra. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/mdvN0HTt

Mora, F (2011). Foros Virtuales: Aspectos por considerar. *Revista Calidad en la Educación Superior, 2*(2), 1-16. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5580796.pdf

Musat, I. (31 de mayo de 2018). *Problemas de Selectividad de Matemáticas II Comunidad de Madrid (Resueltos)*. Recuperado de http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

O'Connor, J. J., y Robertson, E. F. (1996). MacTutor History of Mathematics: Matrices and determinants. Recuperado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico* (tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. Recuperado de http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t25694.pdf

Pérez Laserna, R. (2015, 29 de abril). Resolución de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y un parámetro, con GeoGebra [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=FIjyPcY_-fE

Petrov, P., Gyudzhenov, I., y Tuparova, D. (2015). Adapting Interactive Methods in the Teaching of Linear Algebra – Results from Pilot Studies. *Procedia - Social and Behavioral Sciences. 191*, 142-146.

Prietro, A. (2014). El Papel del Álgebra Lineal en el Bachillerato y en la Universidad (trabajo de fin de máster). Universidad de Cantabria, Santander, España. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/4723/PrietoSierraAna.pdf?sequence=1

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G., y Lozano, M.D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications, 432,* 2125–2140.

Salgado, H. (2015). *El Papel de la Modelación en la Enseñanza de Conceptos Abstractos de Álgebra Lineal* (tesis doctoral). Instituto Técnico Nacional, Ciudad de México, México.

Serrano, H. (junio 2018) How is math used in video game designing and programming? Quora. Recuperado de https://www.quora.com/How-is-math-used-in-video-game-designing-and-programming

Thomas, S. (2011). *An activity theory analysis of linear algebra teaching within university mathematics* (tesis doctoral). Loughborough University, Loughborough, Reino Unido. Recuperado de https://dspace.lboro.ac.uk/dspace-jspui/bitstream/2134/9843/2/Thesis-2011-Thomas.pdf

WolframAlpha (Mayo 2018). Recuperado de https://www.wolframalpha.com/

Young, G. (1986). Epilogue in R.E. Ewing, K.I. Gross y C.F. Martin (Eds.), *The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics*, 213- 214, New York: Springer-Verlag.

9 Anexos

Anexo 1

Entrevista a la Profesora de Matemáticas de 2º Bachillerato

1. *¿Cuántos alumnos hay este año en 2º Bachillerato de ciencias?*

   Respuesta de la Profesora (RP): Tenemos 26 alumnos.
2. *¿Cuántos años lleva en el colegio?*

   RP: Empecé en septiembre de 2017. Aunque trabajé dos años en otro colegio.
3. *¿Cuáles son los cursos que imparte normalmente en Bachillerato?*

   RP: He dictado 2º, pero Física.
4. *¿Enfoque que le das al álgebra lineal?*

   RP: Sigo el orden del libro comienzo con las matrices para resolver los SEL.
5. *¿De dónde salen los problemas que haces habitualmente?*

RP: Tomo directamente los ejercicios de la PAU, de la página web del profesor Isaac Musat Hervás. Todas las clases están enfocadas a enseñar a los alumnos a resolver ejercicios del nivel de esa prueba.

6. *¿Usas algún recurso o material alternativo al libro?*

   RP: El proyector con presentaciones y los ejercicios de la PAU.

7. *¿Permites o usas apoyo de calculadoras simbólicas?*

   RP: No me ha parecido necesario.

8. *¿Relacionas el Álgebra lineal y la Geometría?*

   RP: Sí, durante la parte de Geometría intento que los alumnos relacionen lo que se hace con los temas anteriores, pero creo que les cuesta mucho y no lo llegan a comprender.

9. *¿Refuerzas los ejercicios de álgebra lineal con su representación en el espacio?*

   RP: No, porque Geometría es posterior.

10. *¿Consultas a los alumnos cuáles son sus preferencias de carreras universitarias para usarlo como motivación con los problemas que aparecen?*

    RP: Lo pregunto, pero generalmente no lo tienen claro, salvo unos pocos. Van cambiando a lo largo del curso. De todas formas, sobre los problemas de ingeniería de los cuales conozco se los señalo para que sepan lo que se encontrarán los que elijan estas carreras.

11. *¿Cuáles son los aspectos con más dificultad en estos temas?*

    RP: En orden de dificultad sé que les cuesta discutir los SEL, aunque es a lo que más tiempo le dedicamos de estos temas; aplicar la Regla de Carmer y calcular una inversa.

12. *¿Dónde comenten más errores?*

    RP: En la discusiones de los SEL.

Planificación temporal de 2º Bachillerato del Colegio Zurbarán

Evaluación	Unidad	Título	Semanas
Primera (9 a 10 semanas)	7	Álgebra de matrices	2
	8	Determinantes	2
	9	Sistemas de ecuaciones lineales	2
	10	Vectores en el espacio	2
Semanas de ajustes, desfases y refuerzos			½
Segunda (9 a 10 semanas)	11	Puntos, rectas y planos en el espacio	2
	12	Problemas métricos (posiciones relativas entre recta y planos)	2
	13	Azar y probabilidad	2

	14	Distribución de probabilidad	2
Semanas de ajustes, desfases y refuerzos			½
Tercera (9 a 10 semanas)	2	Derivadas	2
	3	Aplicaciones de las derivadas	2
	4	Representación gráfica de funciones	2
	5	Cálculo de primitivas	2
	6	La integral definida	2
Semanas de ajustes, desfases y refuerzos			½
Total			30

Anexo 2: Información complementaria de las Actividades

6.2.1. Introducción al Método de Gauss.

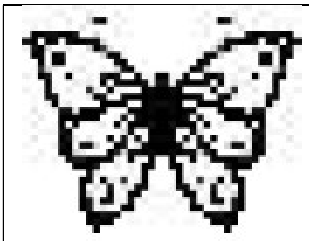
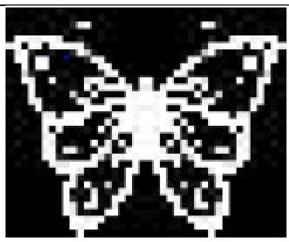
Los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son todos equivalentes:

1. $\begin{cases} 2x+4y=5, \\ 3x+3y=2 \end{cases}$	2. $\begin{cases} -x+y=3, \\ 3x+3y=2 \end{cases}$	3. $\begin{cases} x-y=-3, \\ 2x+4y=5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x+3y=2, \\ 5x+7y=7 \end{cases}$	5. $\begin{cases} 3x+3y=2 \\ -x+y=3 \end{cases}$	6. $\begin{cases} -x+y=3, \\ x+5y=8 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 4x+2y=-1, \\ 3x+3y=2 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 5x+y=-4, \\ -x+y=3 \end{cases}$	9. $\begin{cases} 3x+9y=13, \\ 2x+4y=5 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 7x+5y=1, \\ 3x+3y=2 \end{cases}$	11. $\begin{cases} 7x+5y=1, \\ 4x+2y=-1 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 7x+5y=1, \\ 11x+7y=0 \end{cases}$
13. $\begin{cases} -x+y=3, \\ 4x+2y=-1 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 2x+4y=5, \\ x+5y=8 \end{cases}$	15. $\begin{cases} 3x+9y=13, \\ x+5y=8 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 3x+3y=2, \\ 10x+8y=3 \end{cases}$	17. $\begin{cases} 8x+10y=9, \\ 5x+7y=7 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 4x+2y=-1, \\ 11x+7y=0 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 8x+10y=9, \\ 11x+13y=11 \end{cases}$	20. $\begin{cases} 5x+7y=7, \\ 2x+4y=5 \end{cases}$	21. $\begin{cases} 5x+1y=-4, \\ 4x+2y=-1 \end{cases}$
22. $\begin{cases} 4x+2y=-1, \\ -13x-5y=6 \end{cases}$	23. $\begin{cases} x+5y=8, \\ 2x+16y=27 \end{cases}$	24. $\begin{cases} -x+y=3, \\ 2x-8y=-17 \end{cases}$
25. $\begin{cases} 7x+11y=12, \\ 2x+4y=5 \end{cases}$	26. $\begin{cases} -x+7y=14, \\ -x+y=3 \end{cases}$	27. $\begin{cases} 7x-y=-10, \\ -x+y=3 \end{cases}$
28. $\begin{cases} -x+7y=14, \\ 2x-8y=-17 \end{cases}$	29. $\begin{cases} -3x+15y=31, \\ 2x-8y=-17 \end{cases}$	30. $\begin{cases} 3x+9y=13, \\ 5x+13y=18 \end{cases}$

6.2.2. El álgebra lineal y el procesamiento digital de imágenes

Esta mariposa es una imagen digital y si la acercamos lo suficiente veremos que está formada por pixeles, que es la unidad más pequeña de una imagen como esta. La palabra **Pixel** es un acrónimo del inglés *picture element*, que quiere decir 'elemento de imagen'.

La imagen original se ha convertido con una herramienta en línea (https://www.dcode.fr/binary-image) que convierte cada pixel en 0 si es oscuro y en 1 si es claro. En este caso la mariposa la ha convertido en una matriz de 40x33.

	
Original	Negativo
1111111111111111111111111111111111111111	0000000000000000000000000000000000000000
1111111111111111111111111111111111111111	0000000000000000000000000000000000000000
1111111110011111111111111111100111111111	0000000001100000000000000000011000000000
1111111111111111111111111111111111111111	0000000000000000000000000000000000000000
1000000011111111111111111111111100000001	0111111100000000000000000000000001111110
0010010000011111111111111111100000100100	1101101111100000000000000000011111011011
1001111111001111111111111111100111111001	0110000000110000000000000000011000000110
1001001111100111111111111100111111001001	0110110000001100000000000000110000001101 10
1101001111110011111111111001111111001011	0010110000000110000000000011000000110100
1101111111111100111111110011111111111011	0010000000000011000000001100000000000100
1100110111100011011001101100011110110011	0011001000011100100110010011100001001100
1110111111101000000100100000101111110111	0001000000010111110110111110100000001000
1110111110110111100000011110110111110111	0001000001001000011111100001001000001000
11100111110011000000000000001100111100111	0001100000110011111111111100110000011000
1111011111100001100000011000011111101111	0000100000011110011111100111100000010000
111110010000111000000000000111000010011111	0000011011110001111111111000111101100000
111110000001110100000000001011100000011111	0000011111100010111111110100011111100000
111110101111101000000000000101111101011111	0000010100000101111111111010000010100000
1111100111111101100001101111111100 11111	0000011000000001001111001000000001100000
1111100111110101010000101010111110011111	0000011000001010101111010101000001100000
1111100100111001100000011001110010011111	0000011011000110011111100110001101100000
1111100111110010000000000010011111 0011111	0000011000001101111111111011000001100000
1111110000000110110110110110000000111111	0000001111111001001001001001111111000000
1111111000011111100110011111100001111111	0000000111100000011001100000011110000000
1111111110111111101110111111101111111111	0000000001000000010001000000010000000000
1111111100101101101110110101001111111	0000000011010010010000100100101100000000
1111111101110111001110011101110111111111	0000000010001000110000110001000100000000
1111111101110100111110010111011111111	0000000010001001100000011001000100000000
1111111100100110111111101100100111111111	0000000011011001000000001001101100000000
1111111100111100111111110011110011111111	0000000011000011000000001100001100000000
1111111110000011111111111110000011111111	0000000001111100000000000001111100000000
1111111110000111111111111111000011111111	0000000001111000000000000000011110000000
1111111110111111111111111111110111111111	0000000000100000000000000000010000000000

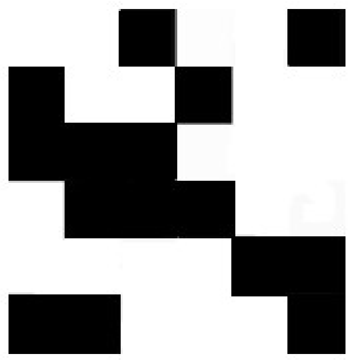
Para obtener el negativo lo que se ha hecho es: **1**- A, donde **1**= $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1:

Para la siguiente imagen:

a. Escribir la matriz de binaria que la representa.

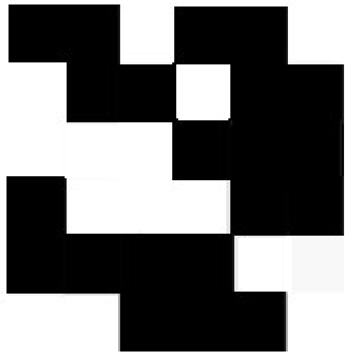
b. Calcular su negativo y ver su imagen en https://www.dcode.fr/binary-image.

	<u>Respuesta</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Definir

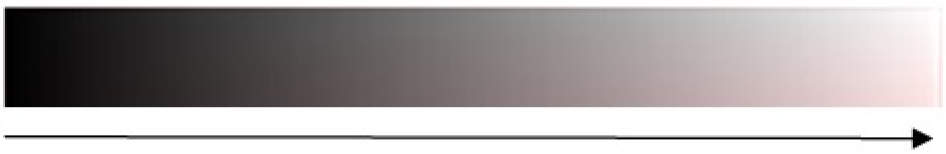
$$Uno = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Definir

$$Uno - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Calc

Respuesta:	
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Escala de grises

En escala de grises se trabaja con un número de 0 a 255 (2^8=256 opciones). El 0 es el negro y el 255 es el blanco.

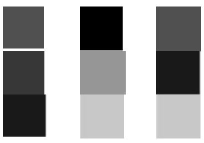


0 255

Ejemplo

La siguiente matriz representa los siguientes tonos de grises:

$$\begin{pmatrix} 80 & 0 & 80 \\ 55 & 150 & 25 \\ 25 & 200 & 200 \end{pmatrix}$$



Ejercicios 2:

Para experimentar:

a. ¿Qué representará en la imagen la suma de dos matrices?
b. ¿Qué representará la multiplicación por un escalar? Por 2 o por ½.

En CalcMe, con las matrices $A=\begin{pmatrix}21 & 134 & 210\\ 35 & 124 & 0\\ 112 & 23 & 245\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}80 & 11 & 65\\ 67 & 45 & 210\\ 184 & 172 & 75\end{pmatrix}$, realiza operaciones y concluye sobre las condiciones que deben tener estas operaciones para que vuelva a ser una matriz que represente una imagen en escala de grises.

Imagen a color

Cuando la imagen es a color, el pixel tiene más información. En el modo RGB, cada color se forma por la combinación de tres canales: rojo (Red), verde (Green) y azul (Blue). Por cada uno se tienen 256 opciones (del 0 al 255) y se puede representar como un vector (125, 80, 200), que quiere decir que se tiene 200 de rojo, 80 de verde y 200 de azul, lo que resulta el color: .

Algunos filtros cambian una imagen a color, por ejemplo la convierte en tonos grises o sepia. Veamos cómo lo hace:

La conversión a escala de grises: Si multiplicamos un vector que representa un pixel por esta matriz $EG=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$, los componentes del nuevo pixel es la media de los tres componentes. Por ejemplo, el rojo (255,0,0), el verde (0,255,0) y el azul (0,0,255) dan el mismo tono de gris  que corresponde al número 85.

¿Cómo se decodifica una imagen en binario?

En programa que **convertía la imagen a blanco y negro**, lo convierte en 1 si $\frac{R+G+B}{3}>127$ y 0 en caso contrario. Para el rojo (255,0,0), el verde (0,255,0) y el azul (0,0,255), el programa los convertiría a 0, que es negro, pues $\frac{R+G+B}{3}=85$.

La conversión con efecto sepia: Si multiplicamos un vector que representa un pixel por esta matriz $ES=\begin{pmatrix}0.393 & 0.769 & 0.189\\ 0.349 & 0.686 & 0.168\\ 0.272 & 0.534 & 0.131\end{pmatrix}$ la imagen adquiere un color rojizo que da a la fotografía un tono monocromático (Anibal, 2016).

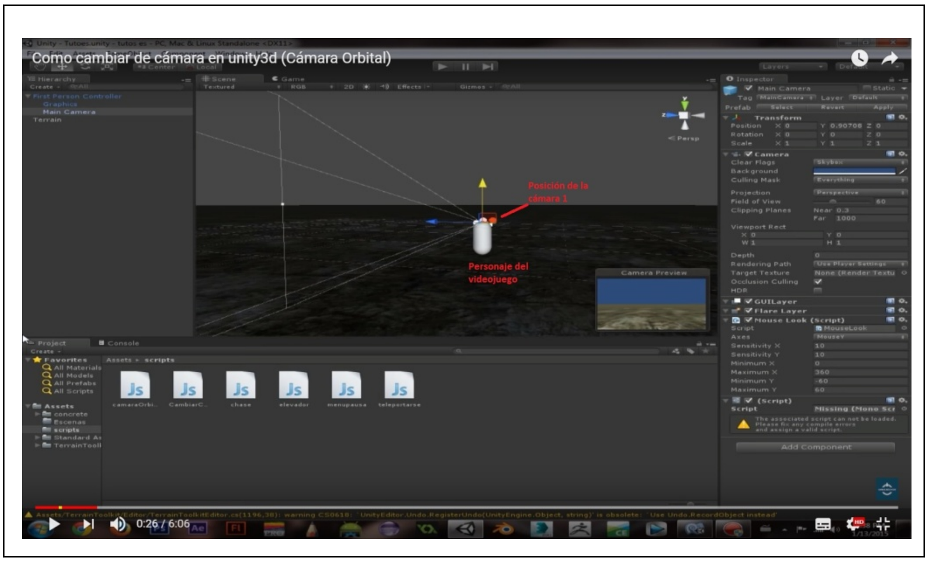
Ejercicio 3

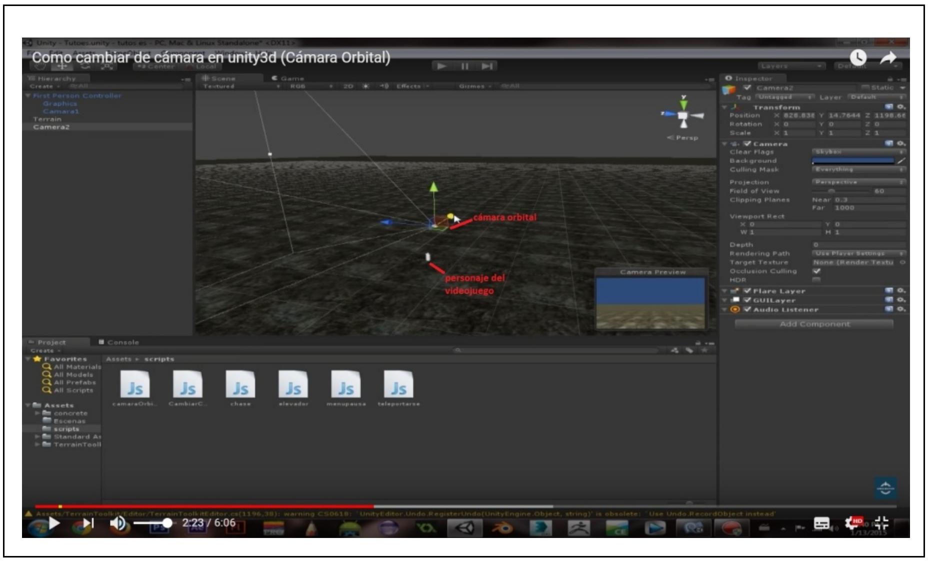
Elija un vector de un pixel a color, es decir (R,G,B), tal que cada una de sus entradas sea un número de 0 a 255. En un selector de color, por ejemplo la herramienta de editar colores de Paint, revise el color seleccionado. En CalcMe realice:

1. Multiplique el vector por la matriz a escala de grises, *EG*. Revise cuál es el tono de gris al que lo convierte en el selector de color.
   a. ¿Cómo es un vector (R,G,B) en la escala de grises?
   b. Dado un vector en tonos grises, ¿se puede recuperar la información del color una vez transformado?
2. Multiplique el vector por la matriz de efecto sepia, *ES*. Revise cuál es el color al que lo convierte en el selector de color.
   a. Si se le aplicó al pixel la transformación “efecto sepia”, ¿se puede recuperar la información del color original que tenía?

6.2.3. Movimientos en el plano

En el video tutorial de Game3Dover (2015), se muestra cómo cambiar de una cámara con la visión del personaje a una cámara orbital, que tiene una visión global del espacio de juego. En este caso se está programando en unity3d, un motor de videojuego, que permite el diseño, creación y representación de un videojuego.





Se puede ver que tiene un sistema de vectores cuando establece la posición de la cámara 1 y se explica cómo cambiar a la orbital, que tiene otro sistema de vectores. Cuando se hace un cambio de cámara el motor de búsqueda lo que hace es multiplicar por una matriz y para volver a la visión anterior hace su inversa (Serrano, 2018).

Con esta idea en mente, vamos a ver cómo podemos hacer estos cambios en el plano.

Ejemplo 1: Simetría respecto al eje OY

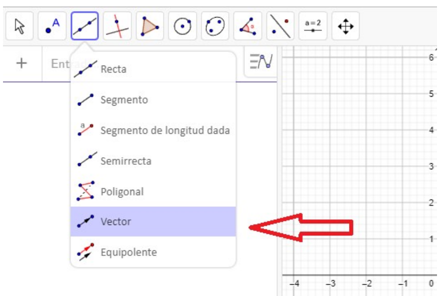
Para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$, sabemos que $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector simétrico respecto al eje OY.

La matriz $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa la **simetría respeto al eje OY**.

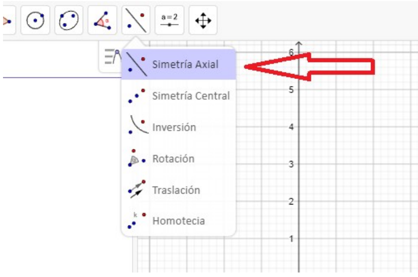
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejercicio de GeoGebra

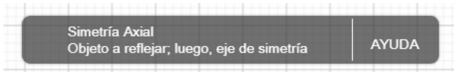
- Seleccionar un vector en el primer cuadrante.



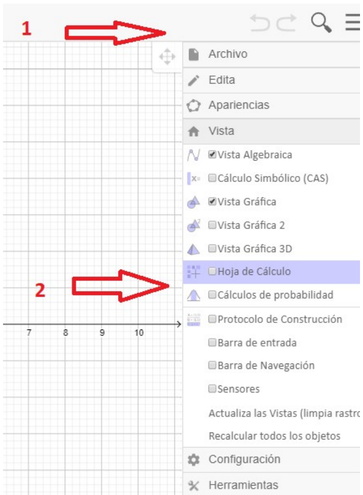
- Realizar una simetría axial, seleccionando el vector y el eje OY.



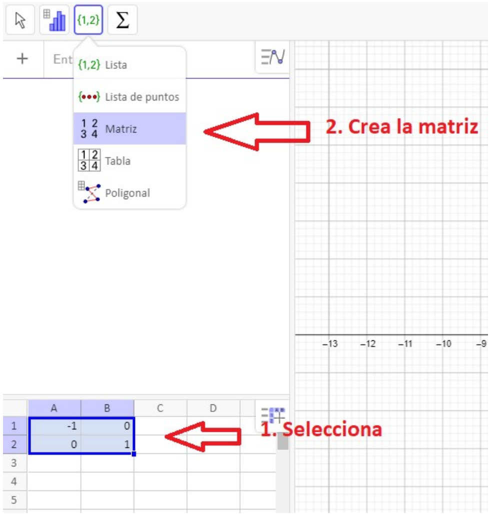
Para ello debes seleccionar el vector y luego el eje OY:

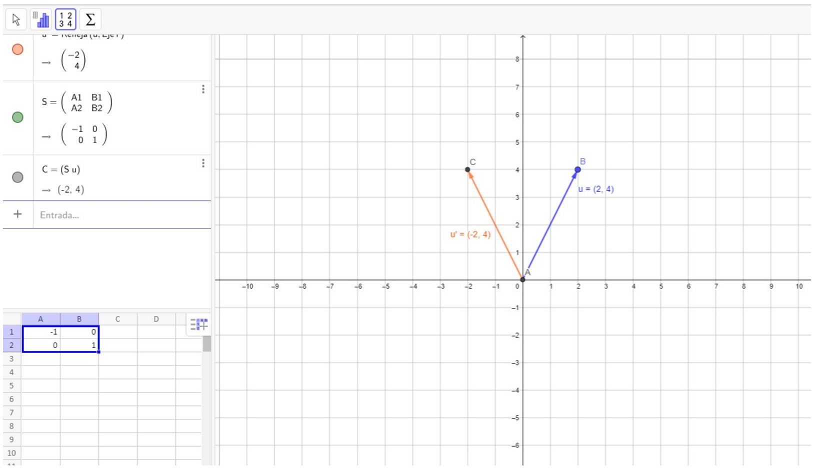


- Abre la Hoja de cálculo.

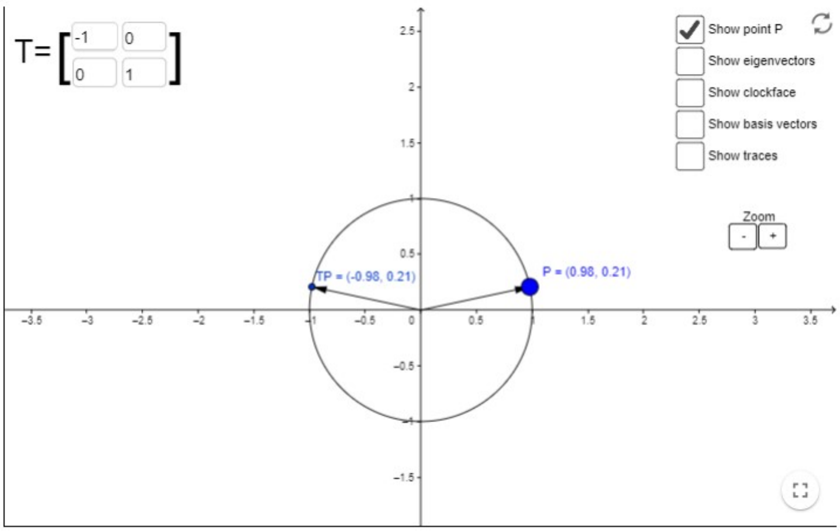


- Escribe la matriz S y calcula $S{\cdot}u$.





- Pon la matriz en https://www.geogebra.org/m/mdvN0HTt, mueve el punto P para cómo queda TP.



Ejemplo 2: Giro de ángulo α

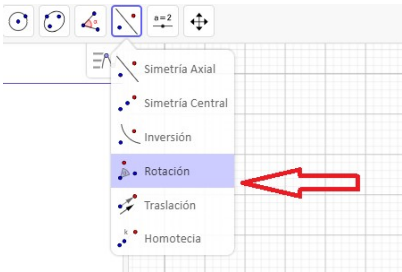
Si queremos girar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 90º alrededor del origen, en sentido antihorario (contrario al de las agujas del reloj): $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

La matriz $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ representa el giro de 90º.

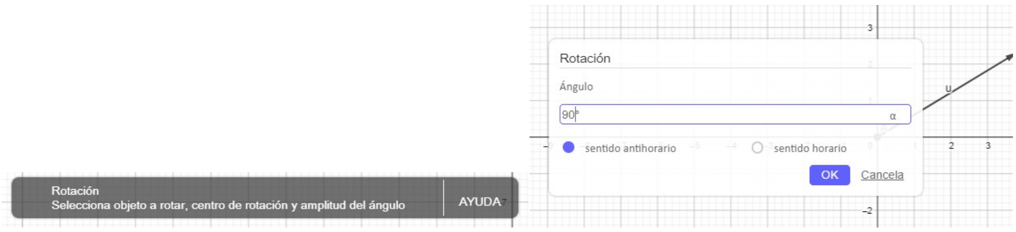
En general, un **giro de ángulo α** alrededor del origen está representado por $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ejercicio de GeoGebra

- Seleccionar un vector en el primer cuadrante.
- Realizar una rotación con respecto al origen de 90º, seleccionando el vector, el origen y poniendo de ángulo 90º.

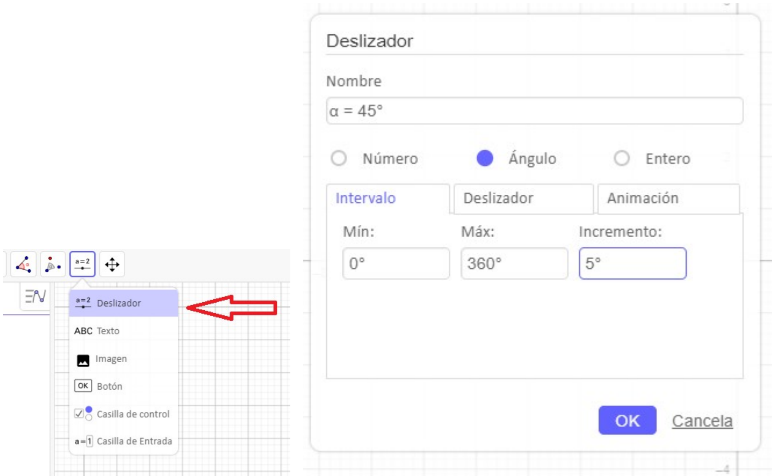


Sigue las instrucciones:

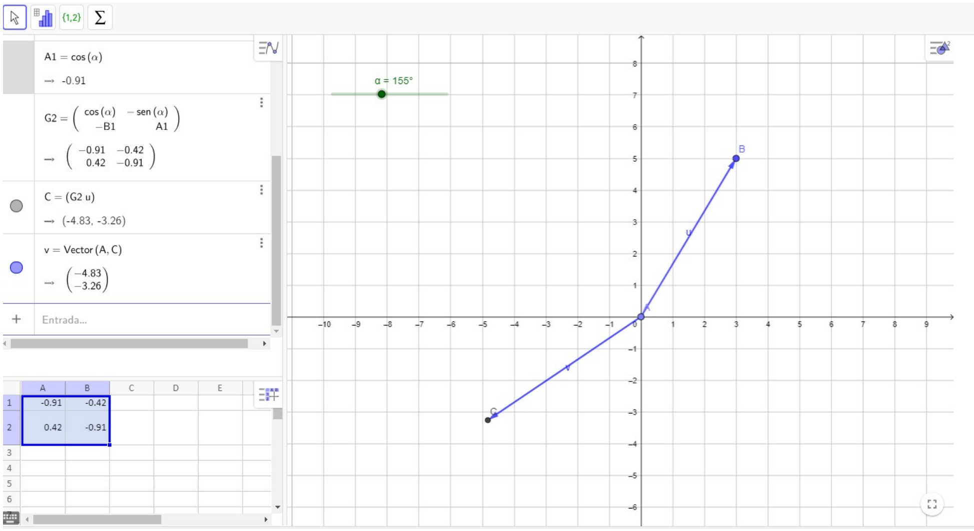


Selecciona el vector, el origen (centro de rotación) y en la ventana emergente coloca 90º.

- Animación:
  - Crear un deslizador, lo llamamos α del tipo ángulo, variando del 0º a 360º, con incremento 1º.

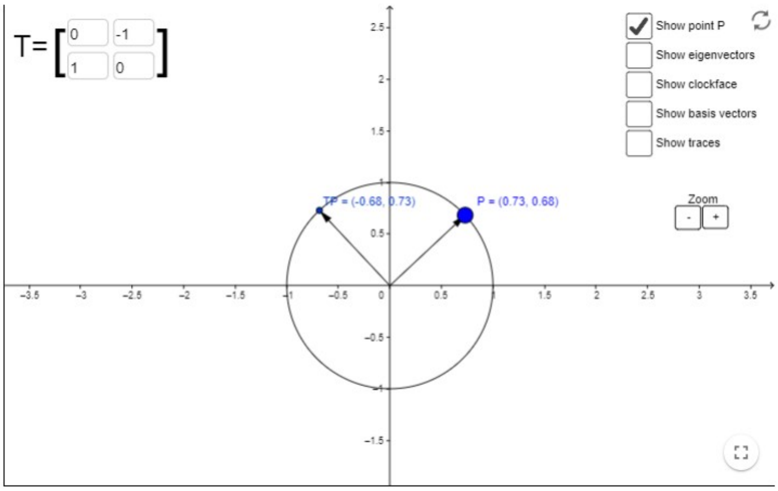


  - En la hoja de cálculo crear la matriz $G2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
  - Al hacer $G2{\cdot}u$, se creará un punto. Marcar un vector del origen a este punto. Activar la animación de α para ver las diferentes matrices de rotación y el vector imagen al hacer $G2{\cdot}u$.

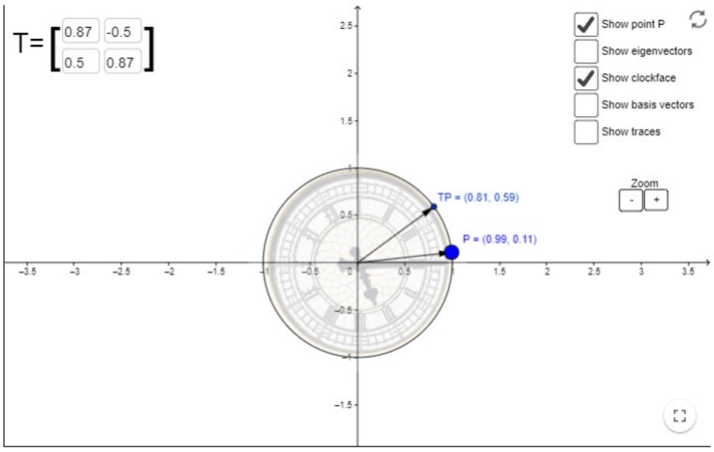


- Pon las siguientes matrices en https://www.geogebra.org/m/mdvN0HTt, mueve el punto P para ver cómo queda TP.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix}$$

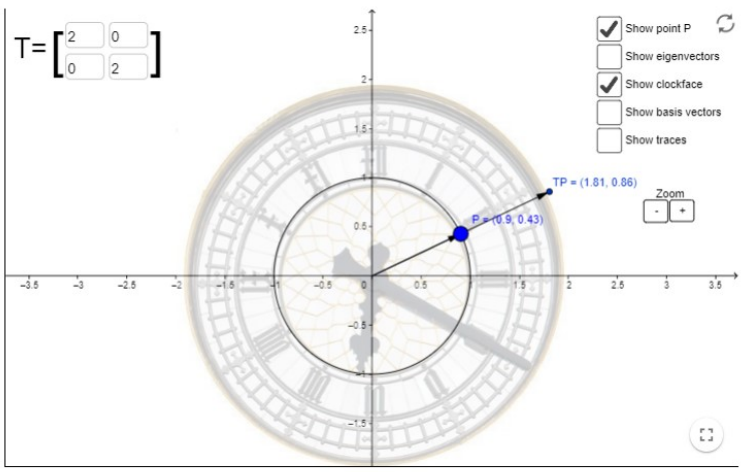


Ejemplo 3: La homotecia del centro el origen y razón k≠0

La homotecia cambia de tamaño ambas coordenadas, corresponde a la matriz H=$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, con k≠0.

- Pon varias homotecias $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ en https://www.geogebra.org/m/mdvN0HTt. Activa el reloj para ver cómo cambia el círculo con esta transformación.

.



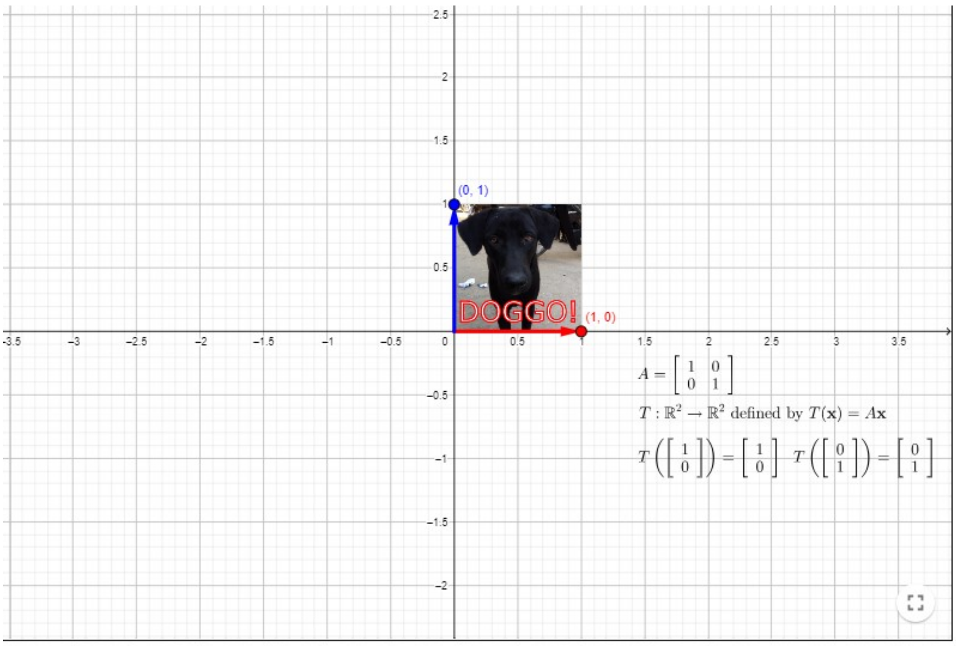
Ejemplo 4: Composición de movimientos

La multiplicación de matrices es una composición de movimientos. Por ejemplo, si hacemos H·G·S, le hará primero una simetría "S", un giro por "G" y una homotecia por k.

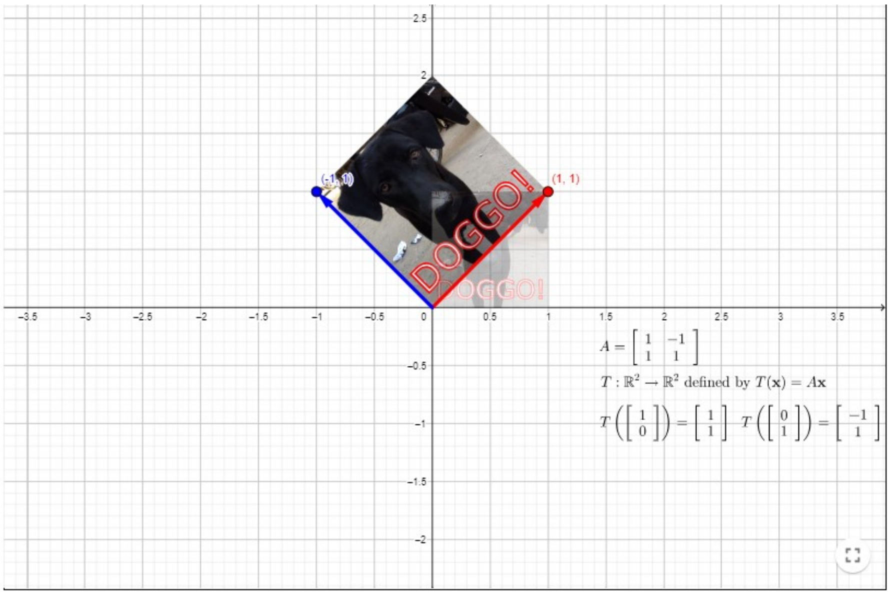
- Animación:
  - Crear un deslizador, lo llamamos k del tipo número, variando del -5 a 5, con incremento 0.1.
  - En la hoja de cálculo crear la matriz $H = \begin{pmatrix} \mathrm{k} & 0 \\ 0 & \mathrm{k} \end{pmatrix}$.
  - Hacer $H{\cdot}G{\cdot}S{\cdot}u$, se creará un punto. Marcar un vector del origen hasta ese punto. Activar la animación de k para ver cómo cambia el vector. Cuando k=1 aparece la transformación obtenida de $G{\cdot}S$.

Extensión: Una transformación lineal queda determinada por dos vectores

En el recurso para GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/vC3EffcJ



Mover los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y verás cómo cambia la foto del perro. Así es cómo se deformaría un objeto en el plano si se le aplica la transformación que produce la matriz que aparece abajo a la izquierda.



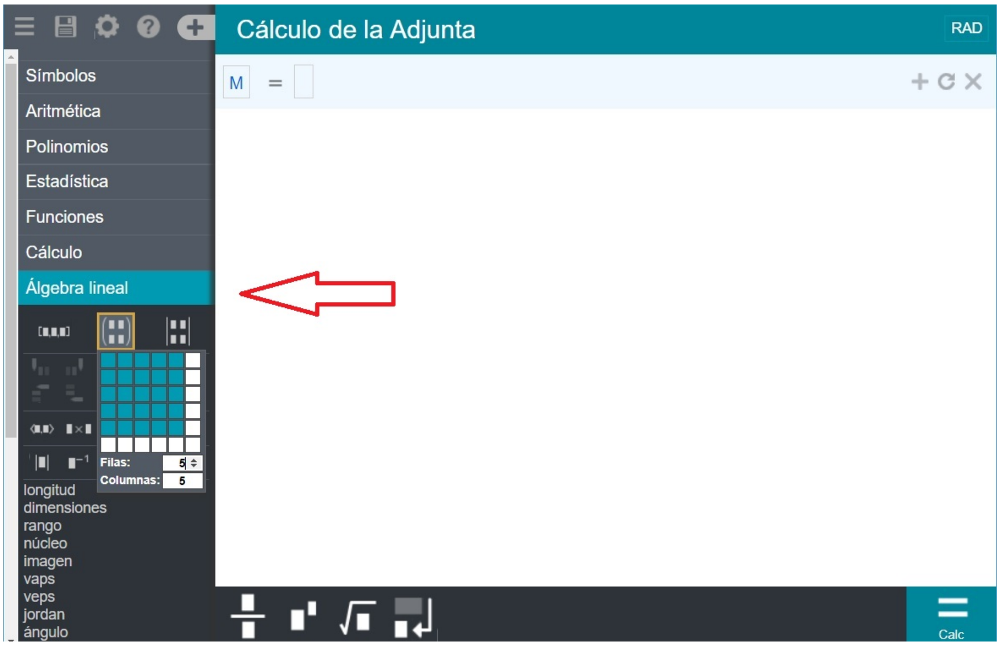
6.2.4. Invertir una matriz con el determinante y el desarrollo de Laplace

Tutorial CalcMe

Primera Parte

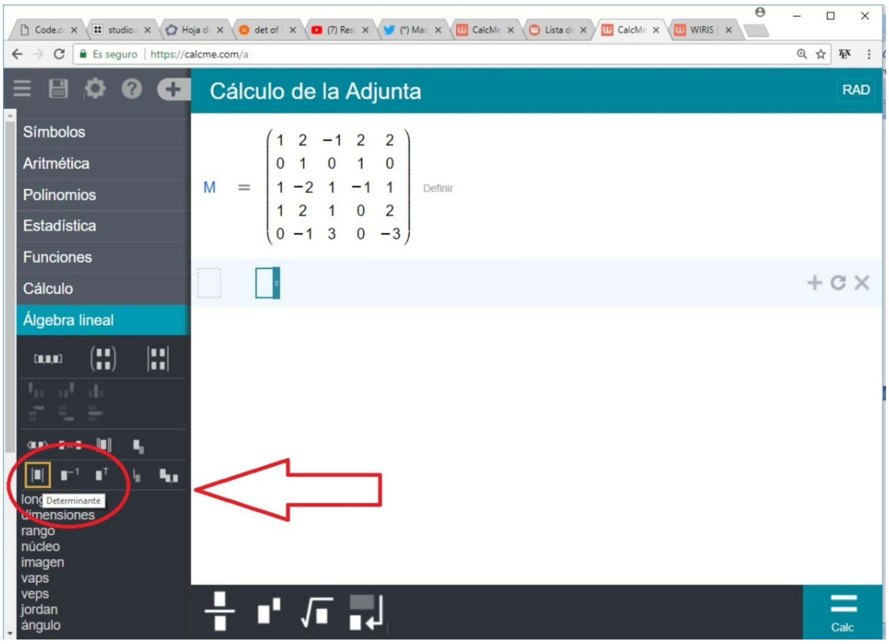
Entre a la página de CalcMe: https://calcme.com/a

En el Menú de la izquierda seleccione una matriz 5x5, a la que llamaremos M.



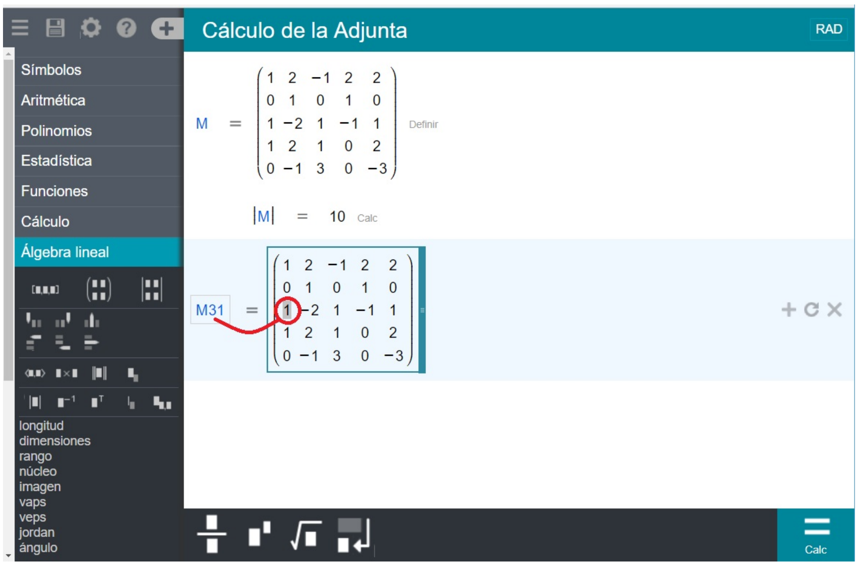
Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, realice las siguientes tareas:

1. Calcule el determinante de M.

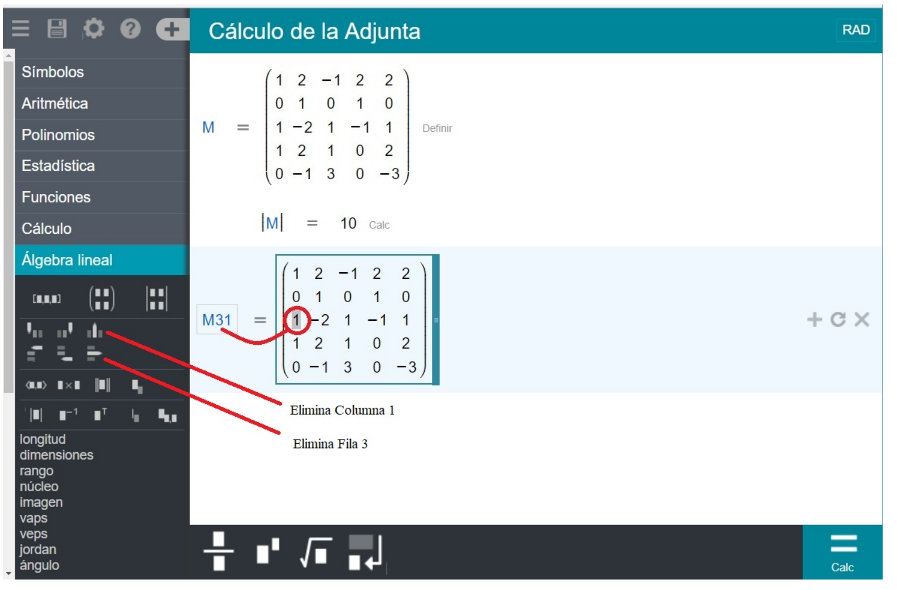


Puede seleccionar en el menú: | ■ | o simplemente escribir: |M| y darle a la tecla de enter.

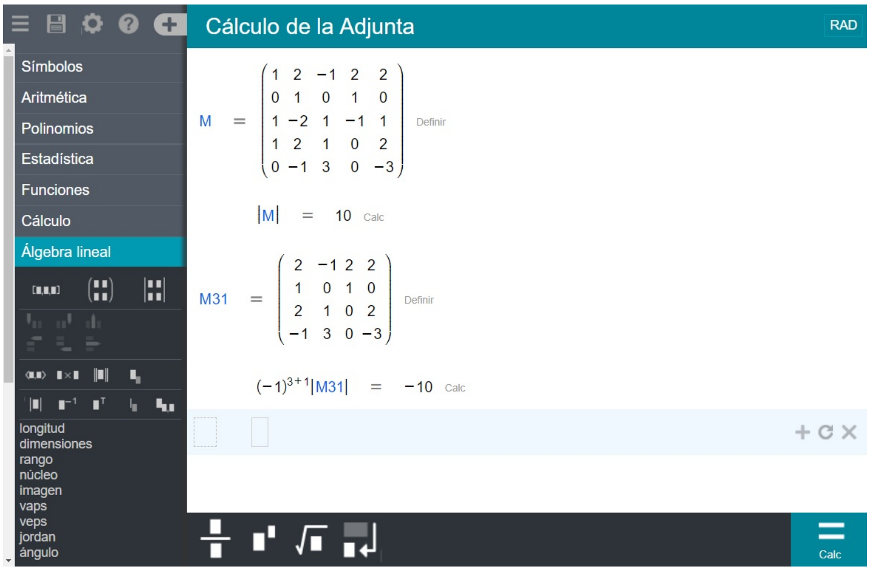
2. Calcule el Menor asignado. Seleccione y copie la matriz M, en un nuevo renglón de trabajo y ponga el cursor en la posición *i,j* de M. Por ejemplo, si le asignaron el $M_{3,1}$, debe colocarse en:



Ahora, en el menú de la izquierda elimine la Fila y la Columna sin mover el cursor. Le damos a esta nueva matriz el nombre de Mij.



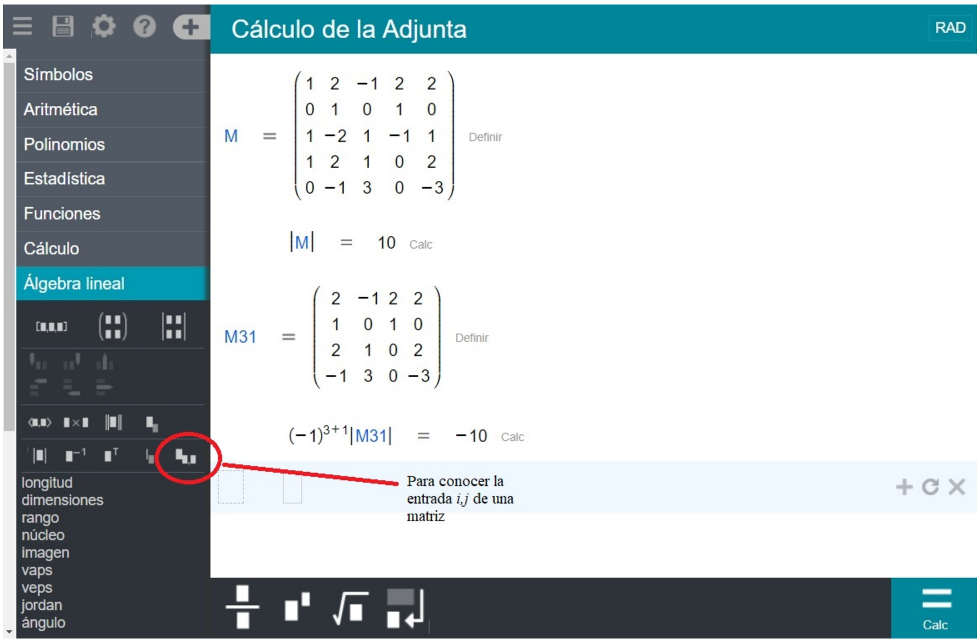
En una nueva línea, calcule: $(-1)^{i+j}|Mij|$



Nota: Para poner el exponente utilice ^ a continuación de la base y aparecerá el espacio para poner los datos.

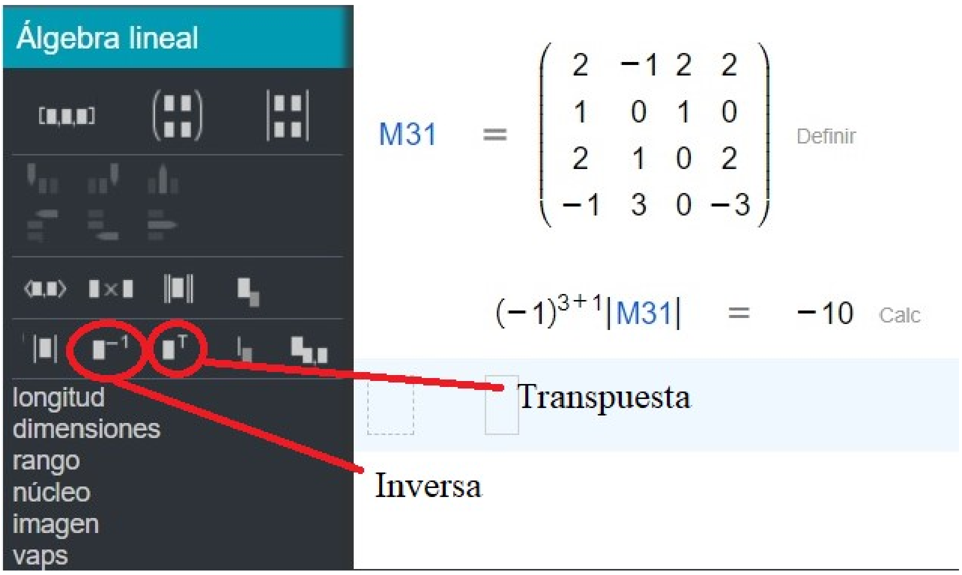
Segunda Parte

Para conocer la **entrada i,j** de una matriz, tenemos un comando



Ejemplo:

Puede calcular la **transpuesta de una matriz** o su **inversa** con los siguientes comandos:

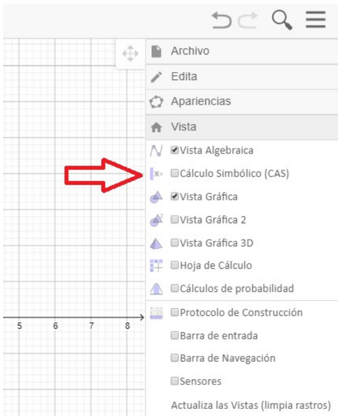


6.2.5. Discusión de un SEL con un parámetro apoyado con GeoGebra

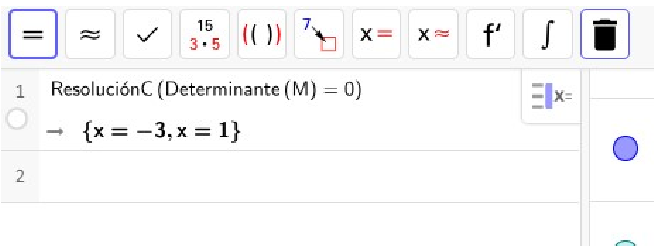
Vamos a discutir un SEL

Septiembre 2001-Opción B (Comunidad de Madrid)
4. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2y = 1 \\ y + z = a \end{cases}$ a) Discutir el sistema según los valores del parámetro *a*. b) Resolver el sistema para *a*=2. c) Resolver el sistema para *a*=1.

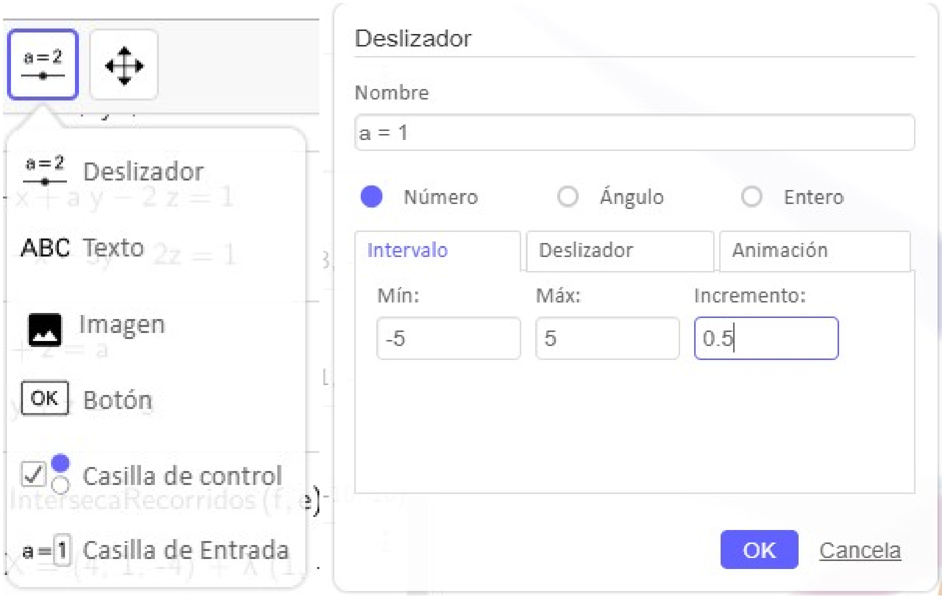
- En la Vista algebraica, definimos la matriz de coeficientes del SEL. Copiar: M={{*x*,1,4},{-1,*x*,-2},{0,1,1}}.
- Abra la Vista CAS del GeoGebra.



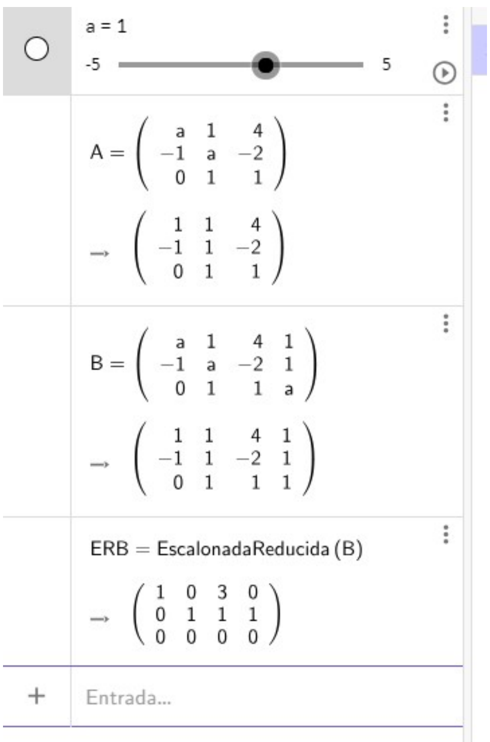
- Para calcular los valores en el que el determinante se anula, escribir: ResoluciónC(Determinante(M)=0).



- Creamos un deslizador que llamaremos *a*, del tipo número, incremento 0.5.



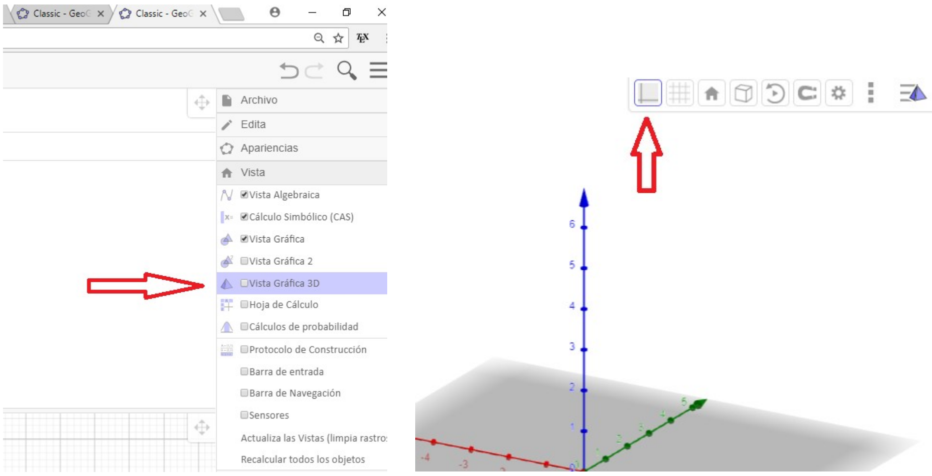
- En la Vista algebraica, definamos la matriz A={{a,1,4},{-1,a,-2},{0,1,1}} y la matriz aumentada B={{a,1,4,1},{-1,a,-2,1},{0,1,1,a}}, una a la vez.
- Calculamos la matriz ERB=EscalonadaReducida(B). Movemos el deslizador para ver cómo cambia el Rango de la matriz escalonada de ERB según los diferentes valores del parámetro *a*.



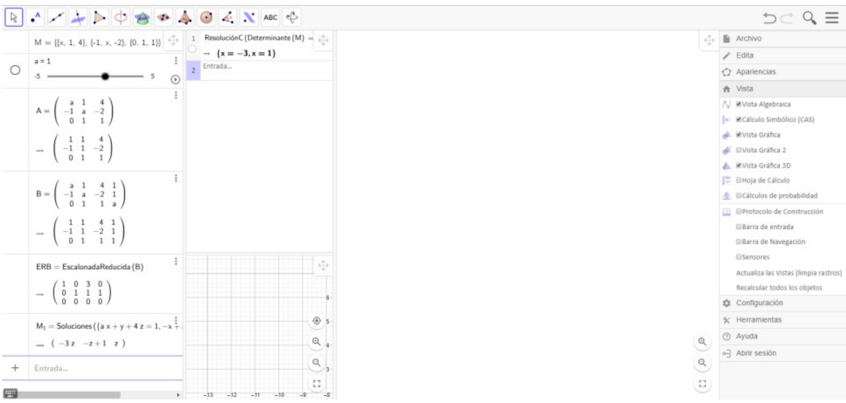
- También se puede calcular RangoMatriz(A) y RangoMatriz(B), escribiendo esos comandos en la Vista algebraica.
- Resolvamos el sistema de ecuaciones:

Soluciones({a*x+y+4z=1,-x+a*y-2z=1,y+z=a})

- Activemos la vista 3D. De esta vista, quitemos los ejes y el plano XY.

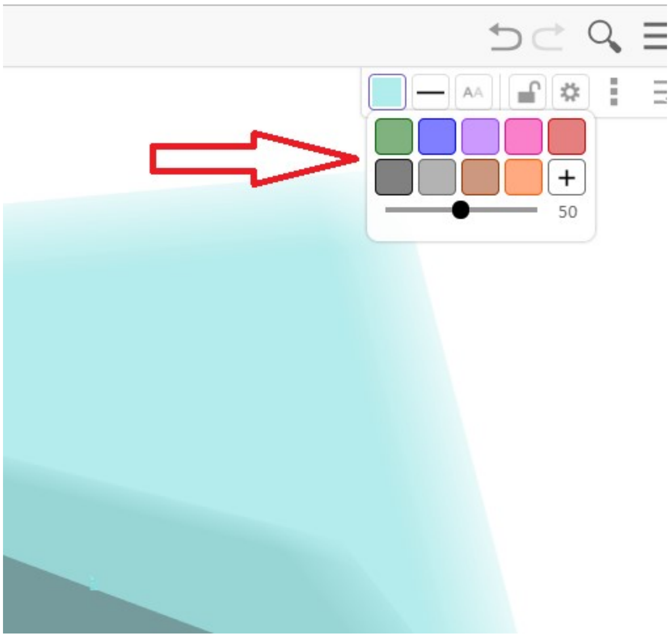


Ordene las áreas de trabajo para que esta Vista ocupe la mitad de la pantalla. Por ejemplo, puede poner en la misma columna la Vista gráfica y la Vista CAS que no la vamos a necesitar. Para mover cada Vista, seleccione el menú principal (en la parte superior derecha de la pantalla) la opción de Vista y use el símbolo que aparece en cada una de ellas.

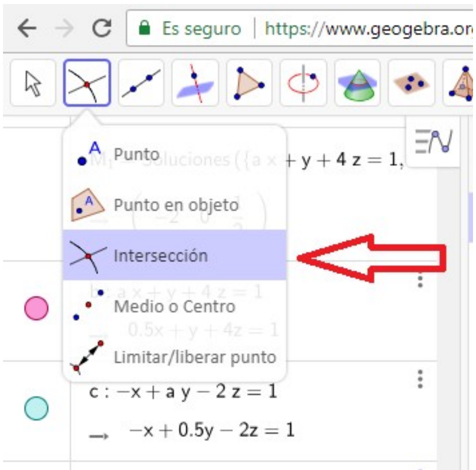


- En la Vista Algebraica copiemos un plano a la vez:
  - a*x+y+4z=1,
  - -x+a*y-2z=1,
  - y+z=a

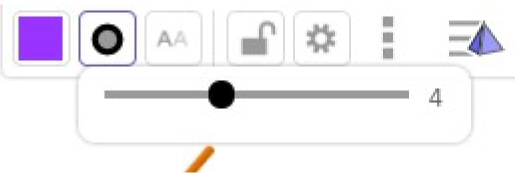
Aparecerá cada plano y puede cambiarles el color para diferenciarlos. Para ello selecciona un plano y pincha en el cuadrado de color para seleccionar un nuevo color.



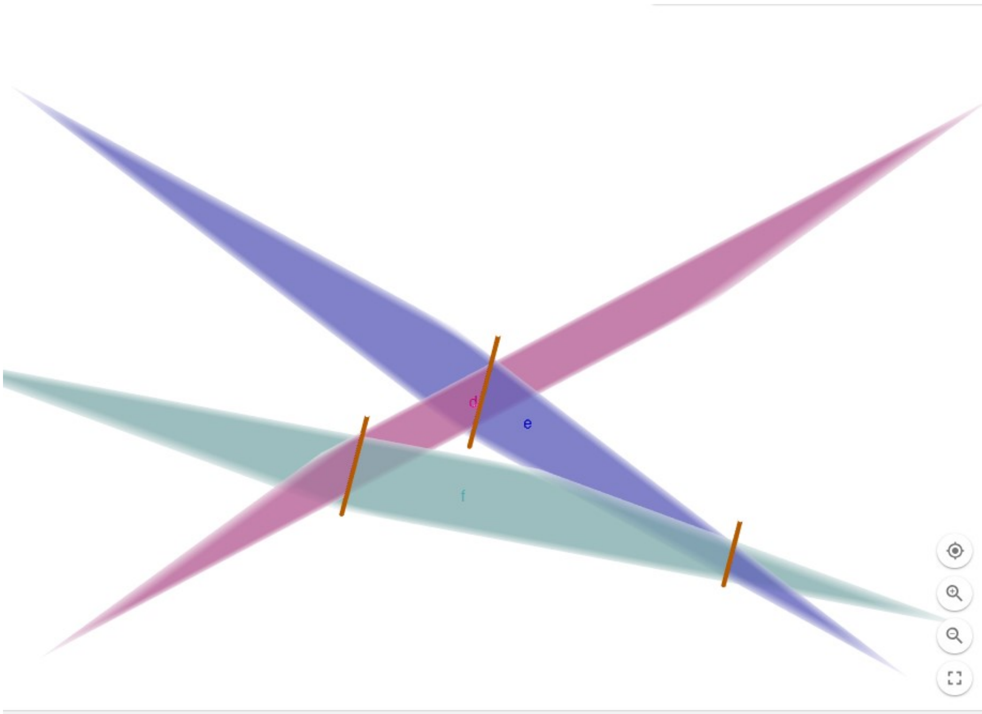
- Usar la instrucción:  "Intersección de dos superficies". Selecciona dos a dos los planos. Mueve el deslizador, cuando tenga solución única el SEL marca la intersección de dos de las rectas.



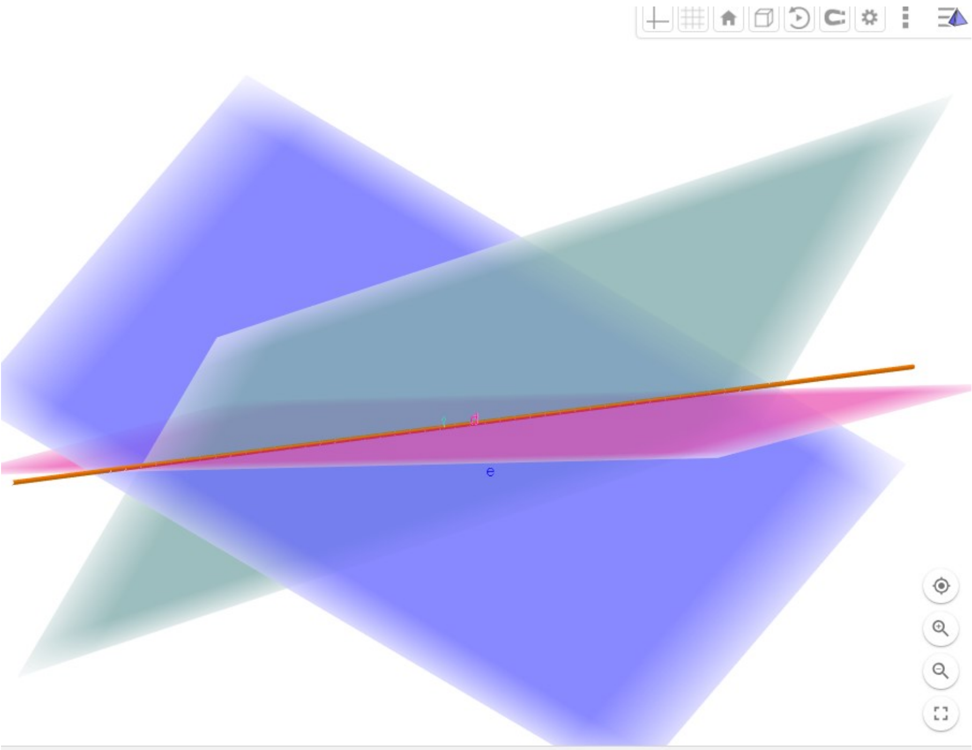
  Aparecerá un punto. Selecciónalo para poder cambiarle el color y aumentar su tamaño para distinguirlo mejor.



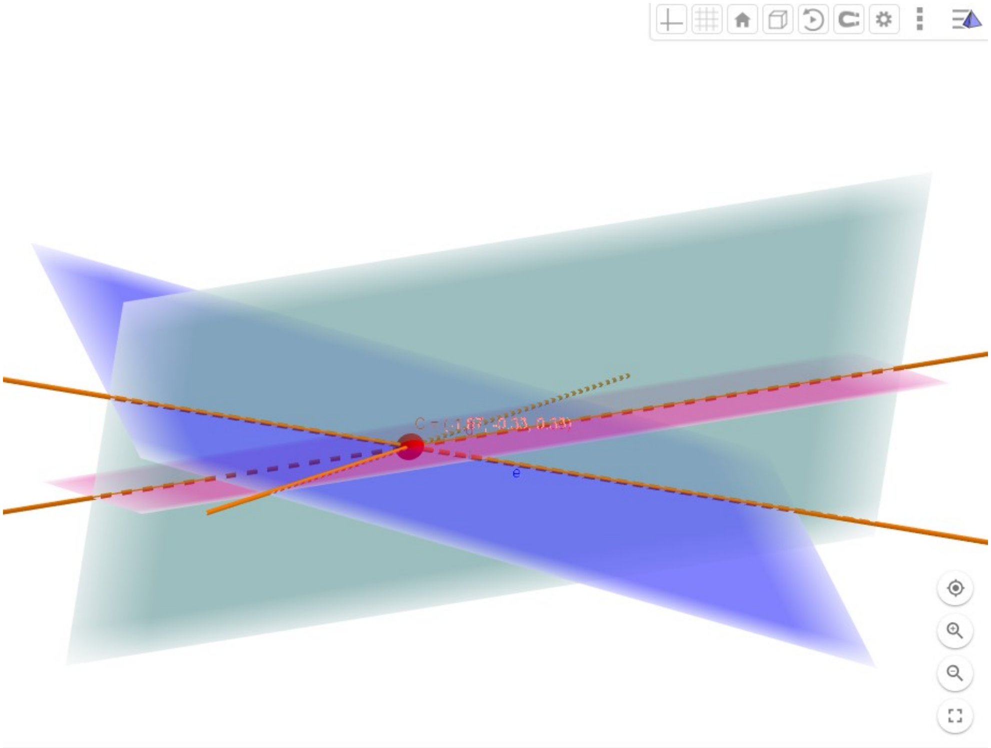
Ahora mueve el deslizador para ver el cambio en los planos y sus intersecciones. Cuando *a*=-3, el SEL es incompatible:



Cuando a=1, el SEL es compatible indeterminado.



Cuando $a \neq 1$ y $a \neq -3$, el SEL es compatible determinado. Por ejemplo, $a=0$.



Ejercicio

Junio, 2002 (Opción B)
3. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a: $\begin{cases} x - y & = & 2 \\ ax + y + 2y & = & 0 \\ x - y + a\,z & = & 1 \end{cases}$ Se pide: d) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a. e) Resolver el sistema para $a= -1$. f) Resolver el sistema para $a=2$.